

Le calcul de flutter en régime supersonique

Par WERNER RUPPEL, Madrid, et ROBERT WEBER, La Haye

Introduction

L'établissement de l'équation du flutter, pour le calcul de la vitesse critique de flutter d'une surface portante d'un avion, nécessite la détermination de trois genres de coefficients: les coefficients massiques, les coefficients élastiques et les coefficients aérodynamiques. La détermination numérique de ces coefficients est assez longue et délicate, à part celle des coefficients élastiques qui, en général, peuvent se déduire directement des coefficients massiques. Le calcul des coefficients massiques ayant déjà été traité ailleurs [1]¹⁾, la présente étude se limitera à la seule détermination numérique des coefficients aérodynamiques.

Les paramètres aérodynamiques apparaissant dans les formules pour les coefficients aérodynamiques sont des fonctions transcendentes de plusieurs variables et complexes. Généralement le calcul de ces coefficients se fait à l'aide de tables numériques pour les paramètres aérodynamiques [2], et le volume de ces calculs est assez grand. Pour pouvoir cependant les effectuer dans un temps raisonnable, on a souvent recours à des méthodes mécanographiques. Mais, comme l'usage des tables numériques présente certains inconvénients pour la détermination mécanographique des coefficients aérodynamiques, il est nécessaire de développer une méthode de calcul évitant l'emploi de ces tables.

Le présent rapport a pour but de donner une telle méthode de calcul mécanographique des coefficients aérodynamiques. La méthode est exposée pour le cas général d'une aile en flèche munie d'un aileron indéformable en lui-même.

On notera cependant que la méthode n'est exacte que pour le cas d'une aile plane et pour certains cas limites de l'aile tridimensionnelle qui, dans le supersonique, peuvent être traités rigoureusement au moyen des paramètres pour l'aile plane (par exemple l'aile en delta). Pour le cas général d'une aile tridimensionnelle, les paramètres aérodynamiques ne sont en effet pas connus, et on est alors obligé de recourir à la même méthode d'approximation que dans le subsonique: à l'intégration par tranches planes successives, en négligeant ainsi l'effet du bord extérieur libre de la surface portante. Cette approximation semble donner, comme dans le subsonique, des résultats assez satisfaisants.

La méthode qui va être exposée et qui est indépendante de tout système de notations, présente l'avantage que la fréquence réduite, apparaissant dans les formules pour les paramètres aérodynamiques comme variable auxiliaire, peut être complètement éliminée. Il ne reste plus, de ce fait, dans l'équation du flutter

¹⁾ Les chiffres entre crochets renvoient à la Bibliographie, page 144.

que les seules inconnues intéressantes pour le problème : la fréquence de flutter et le nombre de Mach critique correspondant à la vitesse critique de flutter cherchée. De plus, comme on peut éviter l'emploi de tables numériques, on évitera également les erreurs numériques d'interpolation qui se présentent toujours lorsqu'on utilise de telles tables. Enfin, la méthode est applicable à toute surface élastique exposée à un écoulement supersonique (par exemple une pale).

Remarquons encore que la méthode pourra être étendue au régime subsonique lorsqu'on connaîtra un développement des paramètres aérodynamiques dans ce régime ; il sera toutefois nécessaire alors d'isoler la singularité à l'origine.

1. Dénominations

Abréviation	Dimension	Désignation
z	m	Coordonnée dans le sens de l'envergure
Az_n	m	Largeur d'une tranche
$l(z)$	m	Profondeur totale du profil
$x l$	m	Coordonnée dans le sens de la profondeur
$x_0 l$	m	Ordonnée sur l'axe des $x l$ du bord d'attaque du profil
τl	m	Profondeur de l'aileron
$e l$	m	Distance du bord d'attaque de l'aileron à son axe de rotation
δ	—	Angle compris entre l'axe des x et la direction d'une nervure
δ_0	—	Angle compris entre l'axe des z et le bord d'attaque du profil
δ_m	—	Angle de flèche moyen du profil (valeur moyenne des angles du bord d'attaque et du bord de fuite avec l'axe des z)
$\mu(x, z)$	$\text{kg m}^{-3} \text{s}^2$	Répartition de la masse du profil par unité de surface
$Y_i(x, z)$	m	i -ième déformation propre de la surface portante
$y_0(z)$	m	Amplitude de translation du bord d'attaque
$\beta(z)$	—	Angle de rotation des nervures par rapport au plan $x z$
$\gamma_R(z)$	—	Angle de rotation de l'aileron par rapport au plan des nervures
$\Pi_i(x, z)$	kg m^{-2}	Pression aérodynamique exercée en un point de la surface portante par suite de la déformation $Y_i(x, z)$ de la surface
ν	s^{-1}	Fréquence de flutter
ν_i	s^{-1}	Fréquence propre de la i -ième déformation $Y_i(x, z)$
ρ_0	$\text{kg m}^{-4} \text{s}^2$	Masse spécifique de l'air
V	m s^{-1}	Vitesse du vent (dans la direction de l'axe des x)
c	m s^{-1}	Vitesse du son
M	—	Nombre de Mach
$\omega_r = \nu l / (2 V)$	—	Fréquence réduite (définition KÜSSNER)
t	s	Coordonnée du temps

2. Equation du flutter

2. 1. Déformation

Considérons une section d'aile parallèle à la direction des nervures (voir figure 1). Nous supposons les nervures indéformables en elles-mêmes lorsque l'aile effectue un mouvement vibratoire. L'amplitude Y d'un point $P(z, x)$ quelconque de cette section sera alors donnée par l'équation [3]:

$$Y(z, x) = y_0(z + h) + \frac{h}{\sin \delta} \beta(z + h). \quad (1)$$

En développant $y_0(z + h)$ et $\beta(z + h)$ en une série de TAYLOR autour du point $h = 0$, et en remplaçant h par sa valeur:

$$h = l(x - x_0) \frac{\cos \delta_0 \sin \delta}{\cos(\delta_0 - \delta)}$$

qui s'obtient à partir du triangle PQR de la figure 1, l'équation (1) pour $Y(z, x)$ devient:

$$Y(z, x) = \frac{l}{2} \sum_r \gamma_r(z) l^r \left[\frac{x(z) - x_0(z)}{l/2} \right]^r = \frac{l}{2} \sum_r \gamma_r(z) 2^r [x(z) - x_0(z)]^r. \quad (2)$$

Cette équation représente la déformation d'une section d'aile parallèle à l'axe des x .

Les coefficients $\gamma_r(z)$ sont sans dimension et s'expriment à l'aide des données initiales. On a:

$$\begin{aligned} \gamma_0(z) &= \frac{y_0(z)}{l/2}, \\ \gamma_1(z) &= \left[\beta(z) + y'_0(z) \sin \delta(z) \right] \frac{\cos \delta_0(z)}{\cos[\delta_0(z) - \delta(z)]}, \\ \gamma_2(z) &= \left[\beta'(z) + y''_0(z) \frac{\sin \delta(z)}{2} \right] \frac{\cos^2 \delta_0(z) \sin \delta(z)}{\cos^2[\delta_0(z) - \delta(z)]}, \\ \gamma_3(z) &= \left[\frac{1}{2} \beta''(z) + y'''_0(z) \frac{\sin \delta(z)}{6} \right] \frac{\cos^3 \delta_0(z) \sin^2 \delta(z)}{\cos^3[\delta_0(z) - \delta(z)]}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} y'_0(z) &= \frac{dy_0(z)}{dz}, \quad \dots, \quad \text{etc.}, \\ \beta'(z) &= \frac{d\beta(z)}{dz}, \quad \dots, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

et, d'une façon générale,

$$\gamma_r(z) = \left[\frac{1}{(r-1)!} \cdot \frac{d^{r-1} \beta(z)}{dz^{r-1}} + \frac{d^r y_0(z)}{dz^r} \cdot \frac{\sin \delta}{r!} \right] \frac{\cos^r \delta_0(z) \sin^{r-1} \delta(z)}{\cos^r[\delta_0(z) - \delta(z)]}. \quad (r \geq 1)$$

Le cas particulier de l'aile droite s'obtient en posant $\delta_0 = 0$ et celui des nervures parallèles à l'axe des x en posant $\delta = 0$.

Dans ce qui suit, nous nous limiterons à un nombre fini de termes de la série (2) et considérerons de plus une aile comprenant un aileron effectuant un mouvement de rotation d'amplitude γ_R autour de sa charnière. Nous supposons

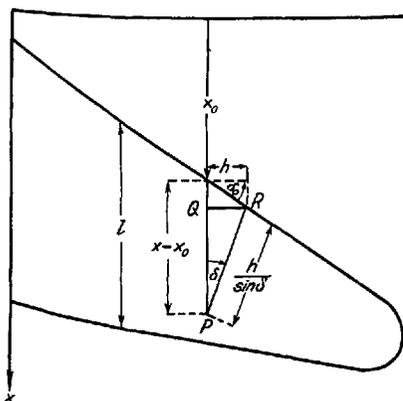


Fig. 1

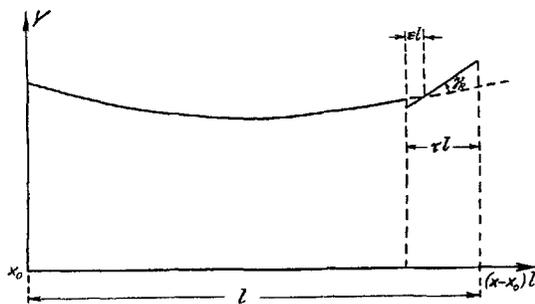


Fig. 2

rons l'aileron indéformable. La déformation d'une section d'aile parallèle à l'axe des x s'écrira alors (voir figure 2):

$$Y(z, x) = \frac{l}{2} \left[\sum_{r=0}^{R-1} \gamma_r(z) 2^r (x - x_0)^r + 2 \eta (x - x_0 - 1 + \tau - \epsilon) \gamma_R \right] \quad (3)$$

$$\text{avec } \eta = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq 1 - \tau, \\ 1 & \text{pour } 1 - \tau \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Dans le cas où l'aileron reste toujours horizontal, on posera:

$$\gamma_R = -\gamma_1 - 4(1 - \tau + \epsilon) \gamma_2.$$

2.2. Les coefficients de l'équation du flutter

On sait que la vitesse critique de flutter s'obtient par la résolution d'une équation donnée sous la forme d'un déterminant complexe:

$$\left| \frac{1}{v^2} \varphi_{ik} - \mu_{ik} + A_{ik} \right| = 0. \quad (4)$$

Les coefficients de cette équation sont généralement définis par les formules suivantes:

Coefficient massique

$$\mu_{ik} = \begin{cases} \int \int l(z) Y_i(x, z) \mu(x, z) Y_k(x, z) dx dz & \text{pour } i = k, \\ 0 & \text{pour } i \neq k; \end{cases}$$

Coefficient élastique

$$\varphi_{ik} = \begin{cases} \nu_i^2 \mu_{ii} & \text{pour } i = k, \\ 0 & \text{pour } i \neq k; \end{cases}$$

Coefficient aérodynamique

$$A_{ik} = \frac{1}{v^2} \int \int l(z) Y_i(x, z) \Pi_k(x, z) dx dz,$$

$Y_i(x, z)$ et $Y_k(x, z)$ représentant les formes propres calculées de la surface portante ou encore les formes de résonance obtenues dans un essai au sol. Les intégrales dans ces formules s'étendent à toute la surface portante.

On voit que pour calculer le coefficient A_{ik} il est nécessaire de connaître la pression Π_k exercée en un point de l'aile par suite de la déformation Y_k de l'aile. Or cette pression Π_k n'est connue explicitement que pour le cas d'une aile «plane», c'est-à-dire une aile à bords parallèles et d'envergure infinie. Pour un cas pratique de calcul de la vitesse critique de flutter d'une aile d'envergure finie, on est alors obligé de recourir à une méthode d'approximation qui consiste à diviser l'aile en un certain nombre de tranches par des sections parallèles à la direction du vent. On suppose que ces tranches d'ailes ont leurs bords parallèles et que la déformation est constante dans chaque tranche. Cette méthode conduit à la définition suivante du coefficient A_{ik} :

$$A_{ik} = \frac{1}{v^2} \sum_n \left\{ l_n(z_n) \int_0^1 Y_i(x, z_n) \Pi_k(x, z_n) dx \right\} \Delta z_n, \quad (5)$$

$l_n(z_n)$ désignant la profondeur moyenne de la tranche n , $Y_i(x, z_n)$ désignant la déformation «moyenne» de cette tranche et $\Pi_k(x, z_n)$ désignant la pression exercée en un point x de cette tranche par suite de la déformation $Y_k(x, z_n)$.

Dans ce qui suit, nous nous occuperons uniquement du calcul du coefficient A_{ik} , le calcul des μ_{ik} et φ_{ik} pouvant se faire de la manière habituelle, c'est-à-dire en divisant l'aile en tranches parallèles aux nervures.

2.3. Calcul du coefficient aérodynamique A_{ik}

D'après l'équation (3), on voit que la déformation Y_i peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire des termes γ_{ir} qui s'obtiennent à partir des données initiales du problème. On montre que la pression $\Pi_k(x, z_n)$ peut également s'écrire comme combinaison linéaire des termes γ_{ks} correspondant à la

déformation Y_k (voir Annexe, page 137) :

$$\Pi_k(x, z_n) = \sum_{s=0}^R \gamma_{ks}(z_n) \phi_s(x). \quad (6)$$

En introduisant les équations (3) et (6) dans l'équation (5), on obtient pour A_{ik} :

$$A_{ik} = \frac{1}{v^2} \sum_n \left\{ l_n \int_0^1 \left(\frac{l_n}{2} \sum_{r=0}^{R-1} \gamma_{ir} 2^r (x-x_0)^r \right) \left(\sum_{s=0}^R \gamma_{ks} \phi_s \right) dx \right. \\ \left. + \int_{1-\tau}^1 \frac{l_n}{2} \gamma_{iR} 2 (x-x_0-1+\tau-\varepsilon) \sum_{s=0}^R \gamma_{ks} \phi_s dx \right\} \Delta z_n$$

et, en transformant légèrement cette équation :

$$A_{ik} = \frac{1}{v^2} \sum_n \left\{ \frac{l_n}{2} \sum_{r=0}^{R-1} \sum_{s=0}^R \gamma_{ir} \gamma_{ks} l_n \int_0^1 2^r (x-x_0)^r \phi_s dx \right. \\ \left. + \frac{l_n}{2} \sum_{s=0}^R \gamma_{iR} \gamma_{ks} l_n \int_{1-\tau}^1 2 (x-x_0-1+\tau-\varepsilon) \phi_s dx \right\} \Delta z_n. \quad (7)$$

Les intégrales apparaissant dans l'équation (7) peuvent être ramenées au cas particulier de l'aile droite ($\delta_m = 0$), c'est-à-dire d'une aile ayant ses bords perpendiculaires à la direction du vent, par la relation :

$$\phi_s = \cos \delta_m (\phi_s)_{\delta_m=0}.$$

En introduisant encore les abréviations suivantes :

$$l_n \int_0^1 2^r (x-x_0)^r (\phi_s)_{\delta_m=0} dx = \varrho_0 V^2 \frac{4}{\sqrt{M^2-1}} \cdot \frac{l_n}{2} m_{rs}, \quad (0 \leq r \leq R-1) \quad (8a)$$

$$l_n \int_{1-\tau}^1 2 (x-x_0-1+\tau-\varepsilon) (\phi_s)_{\delta_m=0} dx = \varrho_0 V^2 \frac{4}{\sqrt{M^2-1}} \cdot \frac{l_n}{2} m_{Rs}, \quad (8b)$$

où les paramètres m_{rs} sont des paramètres aérodynamiques qui peuvent être explicitement calculés (voir Annexe, page 141), l'équation (7) pour A_{ik} devient :

$$A_{ik} = \left(\frac{V}{v} \right)^2 \varrho_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2-1}} \sum_n \left(\frac{l_n}{2} \right)^2 \left(\sum_{r=0}^R \sum_{s=0}^R \gamma_{ir} m_{rs} \gamma_{ks} \right) \Delta z_n$$

ou bien, en notation matricielle :

$$A_{ik} = \left(\frac{V}{v} \right)^2 \varrho_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2-1}} \sum_n \left(\frac{l_n}{2} \right)^2 [\gamma_{ir}] [m_{rs}] [\gamma_{sk}] \Delta z_n. \quad (9)$$

Dans cette équation :

$[m_{rs}]$ est une matrice carrée, représentant les paramètres aérodynamiques de l'aile pour la tranche n ;

$[\gamma_{ir}]$ est un vecteur contrevariant (ligne) représentant la i -ième déformation de l'aile pour la tranche n ;

$[\gamma_{sk}]$ est un vecteur covariant (colonne) représentant la k -ième déformation de l'aile pour la tranche n .

Lorsque l'aile à étudier a des nervures parallèles à l'axe des x ($\delta = 0$), l'ordre de chacune des trois matrices ci-dessus diminue d'une unité.

Les paramètres aérodynamiques m_{rs} sont représentés par des fonctions continues de la fréquence réduite ω_r (du moins pour des valeurs finies de ω_r). On peut donc développer ces fonctions en des séries convergentes autour du point $\omega_r = 0$. Ces développements sont connus sous la forme générale suivante (voir Annexe, page 143) :

$$m_{rs} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} m_{rs,\sigma} (-j \omega_r)^\sigma, \quad (10)$$

j étant l'unité imaginaire.

Les coefficients $m_{rs,\sigma}$ sont des fonctions du nombre de Mach et, pour les paramètres de l'aileron, de certaines grandeurs géométriques de l'aileron.

Le nombre de termes nécessaires de cette série dépend d'une part de la précision désirée et d'autre part de M et de ω_r . Pour les problèmes stationnaires (divergence, inversion, stabilité, etc. [4]) caractérisés par des valeurs de ω_r extrêmement faibles, ainsi que pour les problèmes de flutter à très haute vitesse, on pourra se limiter aux deux premiers termes de la série. Pour les calculs de flutter usuels ($1 \leq M \leq 2$) il faudra en général prendre les huit premiers termes de la série ($0 \leq \sigma \leq 7$).

En introduisant la série (10) dans l'équation (9) on obtient :

$$A_{ik} = \left(\frac{V}{v}\right)^2 \varrho_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \sum_n \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-j \omega_r)^\sigma \left(\frac{l_n}{2}\right)^2 [\gamma_{ir}] [m_{rs,\sigma}] [\gamma_{sk}] \Delta z_n$$

ou bien :

$$\left. \begin{aligned} A_{ik} &= \left(\frac{V}{v}\right)^2 \varrho_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \\ &\times \sum_n \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-j)^\sigma \left(\frac{2 \omega_r}{l_n}\right)^\sigma \left(\frac{l_n}{2}\right)^{\sigma+2} [\gamma_{ir}] [m_{rs,\sigma}] [\gamma_{sk}] \Delta z_n. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

En inversant la suite des sommations dans cette équation et en remarquant que le rapport $2 \omega_r / l_n = v / V$ ne dépend pas de la tranche n considérée, on a finalement pour A_{ik} :

$$A_{ik} = \varrho_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-j)^\sigma \left(\frac{v}{V}\right)^{\sigma-2} A_\sigma \quad (12)$$

avec

$$A_{\sigma} = \sum_n \left(\frac{l_n}{2}\right)^{\sigma+2} B_{\sigma n} \Delta z_n \quad (13a)$$

et

$$B_{\sigma n} = [\gamma_{i r}] [m_{r s, \sigma}] [\gamma_{s k}] \quad (13b)$$

ou, en séparant en parties réelle et imaginaire :

$$A_{i k} = A'_{i k} + i A''_{i k}$$

avec

$$A'_{i k} = \varrho_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \sum_{\sigma=0} (-1)^{\sigma} \left(\frac{\nu}{V}\right)^{2\sigma-2} A_{2\sigma},$$

$$A''_{i k} = \varrho_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \sum_{\sigma=0} (-1)^{\sigma+1} \left(\frac{\nu}{V}\right)^{2\sigma-1} A_{2\sigma+1}.$$

Les indices n et σ de l'expression (13b) pour $B_{\sigma n}$ indiquent qu'il faut calculer $B_{\sigma n}$ pour chaque σ et chaque tranche. D'après l'équation (13a), la somme de toutes les tranches donne l'expression A_{σ} qui ne dépend donc plus que de σ . L'équation (12) donne ensuite le coefficient $A_{i k}$ en fonction du rapport ν/V .

Remarquons que l'équation (10) peut également s'écrire dans la forme matricielle suivante :

$$A_{i k} = \varrho_0 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \left[(-j)^{\sigma} \left(\frac{\nu}{V}\right)^{\sigma-2} \right] \left[\left(\frac{l_n}{2}\right)^{\sigma+2} B_{\sigma n} \right] [\Delta z_n] \quad (14)$$

$\left[(-j)^{\sigma} \left(\frac{\nu}{V}\right)^{\sigma-2} \right]$ étant une matrice à une ligne ;

$\left[\left(\frac{l_n}{2}\right)^{\sigma+2} B_{\sigma n} \right]$ étant une matrice rectangulaire ;

$[\Delta z_n]$ étant une matrice à une colonne,

et $B_{\sigma n}$ étant défini par l'équation (13b).

Enfin, en remplaçant dans les équations (12) et (14) V par $M c$, on obtient :

$$A_{i k} = \varrho_0 c^4 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \sum_{\sigma=0} (-j)^{\sigma} \nu^{\sigma-2} \bar{A}_{\sigma} \quad (15)$$

avec

$$\bar{A}_{\sigma} = \sum_n \left(\frac{l_n}{2 c}\right)^{\sigma+2} \bar{B}_{\sigma n} \Delta z_n, \quad (16a)$$

$$\bar{B}_{\sigma n} = [\gamma_{i r}] \left[\frac{m_{r s, \sigma}}{M^{\sigma-2}} \right] [\gamma_{s k}] \quad (16b)$$

ou bien

$$A_{i k} = \varrho_0 c^4 \cos \delta_m \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \left[(-j)^{\sigma} \nu^{\sigma-2} \right] \left[\left(\frac{l_n}{2 c}\right)^{\sigma+2} \bar{B}_{\sigma n} \right] [\Delta z_n]. \quad (17)$$

On voit qu'en employant pour les coefficients $A_{i k}$ les expressions (15) ou (17), l'équation du flutter ne contient plus que les deux inconnues ν et M .

3. Résolution de l'équation du flutter

Les coefficients μ_{ik} , φ_{ik} et A_{ik} une fois calculés, il ne reste plus qu'à résoudre l'équation du flutter (4). Deux méthodes sont possibles, selon que l'on choisit comme équation de définition de A_{ik} une des équations (12) ou (14) contenant ν , V et M comme inconnues, ou bien une des équations (15) ou (17) ne contenant que ν et M comme inconnues. Par suite du caractère compliqué des coef-

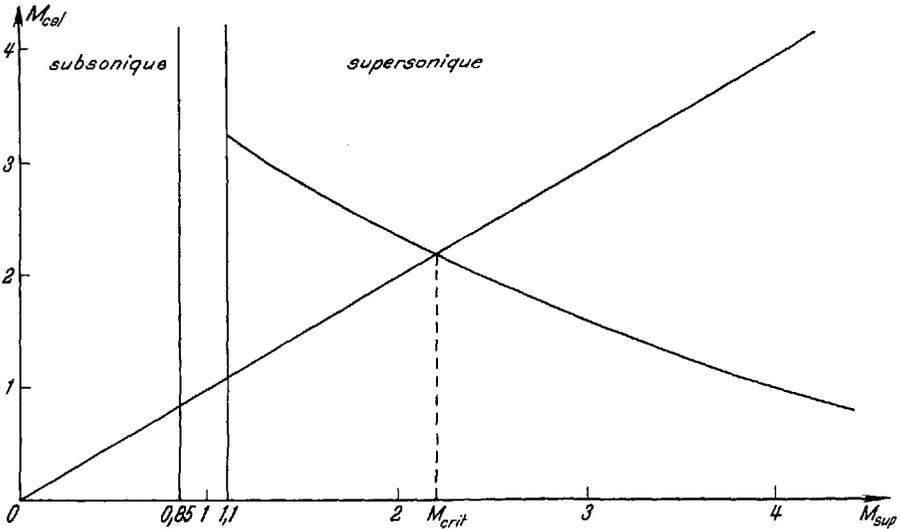


Fig. 3

ficients A_{ik} , on sera, dans les deux cas, obligé de recourir à un procédé de résolution semi-graphique de l'équation (4).

Dans le premier cas [équation de définition (12) ou (14) pour A_{ik}], on considérera M comme paramètre et ν et ν/V comme inconnues. On se donnera différentes valeurs de M et on déterminera, pour chacune de ces valeurs, les inconnues ν et V de telle façon que l'équation (4) soit satisfaite, la solution du problème étant celle pour laquelle la valeur calculée de V correspond à celle de M introduite comme paramètre. On part donc d'une vitesse critique supposée V_{sup} et on détermine d'abord le nombre de Mach effectif M correspondant, par la relation :

$$M = V_{sup} \frac{\cos \delta_m}{c},$$

V_{sup} devant être choisi tel que M soit supérieur à 1.

Les deux équations résultant de l'équation complexe (4) ne contiennent alors plus que ν et ν/V comme inconnues. Pour la résolution de ce système d'équa-

tions, on procédera comme dans l'incompressible, c'est-à-dire on calculera les coefficients des équations pour un certain nombre de valeurs ν/V , et on déterminera ν graphiquement de telle sorte que les deux équations soient satisfaites. On obtiendra ainsi les solutions ν et ν/V de l'équation (4) correspondant à la valeur de M introduite dans le calcul. Du couple de valeurs calculées ν et ν/V , on déduira V que l'on appellera vitesse critique calculée V_{cal} . On effectuera ainsi plusieurs calculs, chaque fois en partant d'une autre valeur pour V_{sup} , de façon à pouvoir tracer la courbe V_{cal} en fonction de V_{sup} . L'intersection de la droite $V_{cal} = V_{sup}$ avec cette courbe donnera la vitesse critique de flutter cherchée (voir figure 3). Si la courbe possède plusieurs points d'intersection avec la droite, l'intersection correspondant à la vitesse la plus faible donnera la vitesse critique cherchée.

Dans le deuxième cas [équation de définition (15) ou (17) pour $A_{i,k}$], on cherchera pour différentes valeurs de M la ou les valeurs réelles ν_1 annulant la partie réelle de l'équation (4) et la ou les valeurs réelles ν_2 annulant la partie imaginaire de l'équation (4). On tracera ensuite les courbes ν_1 et ν_2 en fonction de M . L'intersection des deux courbes donnera la fréquence critique ν_{crit} et le nombre de Mach critique M_{crit} correspondant à la vitesse critique de flutter cherchée; la vitesse critique elle-même s'obtiendra par la formule

$$V_{crit} = M_{crit} \frac{c}{\cos \delta_m}.$$

ANNEXE

Détermination des paramètres aérodynamiques

On sait qu'en régime supersonique les effets ne se répercutent que dans le sens de l'écoulement. Il s'en suit que la pression aérodynamique $\Pi(x)$ exercée en un point x d'une aile plane A , ayant une profondeur égale à τl et effectuant un mouvement d'amplitude Y , est égale à la pression exercée en un point $(x + 1 - \tau)$ de l'aileron d'une aile plane B dont la partie située en avant de l'aileron n'effectue pas de mouvement, l'aileron en question ayant une profondeur égale à τl et effectuant le même mouvement d'amplitude Y que l'aile A . Il suffira donc de calculer les paramètres $\bar{m}_{r,s}$ pour une aile plane de profondeur τl , tous les paramètres $m_{r,s}$ pour une aile plane de profondeur totale l et munie d'un aileron de profondeur τl pouvant être déduits directement des paramètres $\bar{m}_{r,s}$.

De plus, comme les paramètres aérodynamiques pour une aile plane dont les bords font l'angle δ_m avec la direction du vent se déduisent de ceux d'une aile droite ($\delta_m = 0$) par simple multiplication par $\cos \delta_m$, on peut se limiter, pour la détermination des paramètres $\bar{m}_{r,s}$, au cas particulier $\delta_m = 0$; on pourra par conséquent également supposer $x_0 = 0$.

Nous considérerons donc une aile plane droite ayant une profondeur totale égale à τl et effectuant un mouvement vibratoire, harmonique en fonction du temps, d'amplitude:

$$\bar{Y}(x) e^{j\nu t} = \frac{l}{2} \sum_{r=0}^R \gamma_r 2^r x^r e^{j\nu t}, \quad (1)$$

cette aile étant exposée à un écoulement parallèle animé d'une vitesse super-sonique V .

Pour les besoins du calcul de flutter d'une aile il sera suffisant de pousser la série (1) jusqu'au troisième terme ($R = 2$).

D'après la définition des paramètres $m_{r,s}$ et d'après ce qui a été dit ci-dessus, il nous faudra calculer des intégrales de la forme générale suivante:

$$M_r(\tau, \xi) = l \int_0^\tau 2^r (x - \xi)^r \Pi(x) dx, \quad (0 \leq r \leq 2) \quad (2)$$

ξ étant un point de référence quelconque.

1. Calcul de $M_0(\tau)$

La pression $\Pi(\tau)$ exercée au point τ de la tranche d'aile est donnée par la formule [5]:

$$\Pi(\tau) = 2 \varrho_0 V^2 \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \times \left[-w(\tau) + \frac{2 M^2}{M^2 - 1} \omega_r \int_0^\tau w(x) K\left(\frac{1}{M}, \frac{2 M^2}{M^2 - 1} \omega_r (\tau - x)\right) dx \right] \quad (3a)$$

$$= \varrho_0 V^2 \frac{2}{\sqrt{M^2 - 1}} [\gamma_0 \bar{p}_0(\tau) + \gamma_1 \bar{p}_1(\tau) + \gamma_2 \bar{p}_2(\tau)] \quad (3b)$$

avec

$$K(v, u) = v e^{-ju} [J_1(vu) + jv J_0(vu)]$$

et

$$w(x) = \frac{1}{V} \cdot \frac{d}{dt} \bar{Y} = \frac{1}{l} \cdot \frac{d\bar{Y}}{dx} + j \frac{v}{V} \bar{Y}.$$

J_0 et J_1 sont les fonctions de BESSEL d'ordre 0 et 1. En posant la série (1) dans $w(x)$, et sachant que

$$\frac{v}{V} = \frac{2 \omega_r}{l},$$

on obtient:

$$w(x) = \gamma_0 j \omega_r + \gamma_1 (1 + 2 j \omega_r x) + \gamma_2 4 (x + j \omega_r x^2). \quad (4)$$

On sait que l'on a pour $M_0(\tau)$:

$$M_0(\tau) = l \int_0^\tau \Pi(x) dx \quad (5a)$$

$$= 2 \varrho_0 V^2 \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}} \times l \left[-w_1(\tau) + \frac{2 M^2}{M^2 - 1} \omega_r \int_0^\tau w_1(x) K\left(\frac{1}{M}, \frac{2 M^2}{M^2 - 1} \omega_r (\tau - x)\right) dx \right] \quad (5b)$$

$$= \varrho_0 V^2 \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} \cdot \frac{l}{2} [\gamma_0 m_{00}(\tau) + \gamma_1 \bar{m}_{01}(\tau) + \gamma_2 \bar{m}_{02}(\tau)] \quad (5c)$$

avec

$$w_1(x) = \int_0^x w(\xi) d\xi = \gamma_0 j \omega_r x + \gamma_1 (x + j \omega_r x^2) + \gamma_2 4 \left(\frac{x^2}{2} + j \omega_r \frac{x^3}{3} \right). \quad (6)$$

Le paramètre $\bar{m}_{00}(\tau)$ est connu et admet un développement en une série convergente autour de $\omega_r = 0$ ([2]). On a :

$$\bar{m}_{00}(\tau) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tau^\sigma h_{0,\sigma}(M) (-j \omega_r)^\sigma = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{00,\sigma} (-j \omega_r)^\sigma \quad (7)$$

avec

$$\begin{aligned} h_{0,0} &= 0, & h_{0,1} &= -\frac{M^2}{6(M^2-1)^3} (4M^2+1), \\ h_{0,1} &= -1, & h_{0,5} &= -\frac{M^4}{12(M^2-1)^4} (4M^2+3), \\ h_{0,2} &= -\frac{1}{M^2-1}, & h_{0,6} &= -\frac{M^4}{60(M^2-1)^5} (8M^4+12M^2+1), \\ h_{0,3} &= -\frac{M^2}{(M^2-1)^2}, & h_{0,7} &= -\frac{M^6}{180(M^2-1)^6} (8M^4+12M^2+5), \\ h_{0,8} &= -\frac{M^6}{5040(M^2-1)^7} (64M^6+240M^4+60M^2+5) \end{aligned}$$

ou bien, d'une façon générale :

$$h_{0,\sigma}(M) = -\frac{M^{\sigma-2}}{(\sigma-1)(M^2-1)^{\sigma-1}} \sum_{m=0}^{(\sigma/2)-1} \frac{(2M)^{\sigma-2-2m}}{(\sigma-2-2m)! m! (m+1)!} \text{ pour } \sigma \geq 2.$$

Remarquons ici que cette série est également valable pour des valeurs complexes de ω_r .

En comparant les équations (3a), (3b) et (4) avec les équations (5b), (5c) et (6), on voit que l'on a :

$$\bar{p}_1(\tau) = \frac{1}{j \omega_r} \bar{p}_0(\tau) + 2 m_{00}(\tau) \quad (8)$$

et

$$\bar{p}_2(\tau) = 4 \bar{m}_{01}(\tau). \quad (9)$$

En intégrant l'équation (8) de 0 à τ on obtient :

$$\bar{m}_{01}(\tau) = \frac{1}{j \omega_r} \bar{m}_{00}(\tau) + 2 \int_0^\tau \bar{m}_{00}(\xi) d\xi$$

et, en introduisant pour $\bar{m}_{00}(\tau)$ la série (7) :

$$m_{01}(\tau) = -\sum_{\sigma=0}^{\infty} \tau^\sigma h_{0,\sigma}(M) (-j \omega_r)^{\sigma-1} + 2 \sum_{\sigma=0}^{\infty} \frac{\tau^{\sigma+1}}{\sigma+1} h_{0,\sigma}(M) (-j \omega_r)^\sigma. \quad (10)$$

Sachant que $h_{0,0}(M) = 0$, l'équation (10) peut s'écrire :

$$\bar{m}_{01}(\tau) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tau^{\sigma+1} (-j \omega_r)^\sigma \left[\frac{2}{\sigma+1} h_{0,\sigma}(M) - h_{0,\sigma+1}(M) \right].$$

Nous posons encore:

$$h_{1,\sigma}(M) = \frac{2}{\sigma+1} h_{0,\sigma}(M) - h_{0,\sigma+1}(M) \quad (11)$$

et $m_{01}(\tau)$ sera égal à:

$$\bar{m}_{01}(\tau) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tau^{\sigma+1} h_{1,\sigma}(M) (-j \omega_r)^\sigma = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{01,\sigma} (-j \omega_r)^\sigma. \quad (12)$$

En intégrant l'équation (9) de 0 à τ , on obtient:

$$\bar{m}_{02}(\tau) = 4 \int_0^\tau \bar{m}_{01}(\xi) d\xi$$

et, en introduisant pour $\bar{m}_{01}(\xi)$ la série (12):

$$\bar{m}_{02}(\tau) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} 4 \frac{\tau^{\sigma+2}}{\sigma+2} h_{1,\sigma}(M) (-j \omega_r)^\sigma = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{02,\sigma} (-j \omega_r)^\sigma. \quad (13)$$

2. Calcul de $M_1(\tau, \xi)$

On a pour $M_1(\tau, \xi)$:

$$M_1(\tau, \xi) = l \int_0^\tau 2(x - \xi) \Pi(x) dx$$

et, en effectuant une intégration partielle,

$$\begin{aligned} M_1(\tau, \xi) &= 2(\tau - \xi) M_0(\tau) - 2 \int_0^\tau M_0(x) dx \\ &= \varrho_0 V^2 \frac{l}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} [\gamma_0 \bar{m}_{10}(\tau, \xi) + \gamma_1 \bar{m}_{11}(\tau, \xi) + \gamma_2 \bar{m}_{12}(\tau, \xi)]. \end{aligned}$$

Il s'en suit:

$$\bar{m}_{1s}(\tau, \xi) = 2(\tau - \xi) \bar{m}_{0s}(\tau) - 2 \int_0^\tau \bar{m}_{0s}(x) dx.$$

On aura donc, en introduisant dans cette équation tour à tour les séries (7), (12) et (13):

$$\bar{m}_{10}(\tau, \xi) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} 2 \left(\tau - \xi - \frac{\tau}{\sigma+1} \right) \tau^\sigma h_{0,\sigma}(M) (-j \omega_r)^\sigma = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{10,\sigma} (-j \omega_r)^\sigma,$$

$$\bar{m}_{11}(\tau, \xi) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} 2 \left(\tau - \xi - \frac{\tau}{\sigma+2} \right) \tau^{\sigma+1} h_{1,\sigma}(M) (-j \omega_r)^\sigma = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{11,\sigma} (-j \omega_r)^\sigma,$$

$$\bar{m}_{12}(\tau, \xi) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} 2 \left(\tau - \xi - \frac{\tau}{\sigma+3} \right) 4 \frac{\tau^{\sigma+2}}{\sigma+2} h_{1,\sigma}(M) (-j \omega_r)^\sigma = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{12,\sigma} (-j \omega_r)^\sigma.$$

3. Calcul de $M_2(\tau, \xi)$

On a pour $M_2(\tau, \xi)$:

$$M_2(\tau, \xi) = l \int_0^\tau 4 (x - \xi)^2 \Pi(x) dx$$

et, en effectuant deux intégrations partielles successives:

$$\begin{aligned} M_2(\tau, \xi) &= 4 \left[(\xi - \tau)^2 M_0(\tau) + 2 (\xi - \tau) \int_0^\tau M_0(x) dx + 2 \int_0^\tau \int_0^x M_0(\zeta) d\zeta dx \right] \\ &= \varrho_0 V^2 \frac{l}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{M^2 - 1}} [\gamma_0 \bar{m}_{20}(\tau, \xi) + \gamma_1 \bar{m}_{21}(\tau, \xi) + \gamma_2 \bar{m}_{22}(\tau, \xi)]. \end{aligned}$$

Il s'en suit:

$$\bar{m}_{2s}(\tau, \xi) = 4 \left[(\xi - \tau)^2 \bar{m}_{0s}(\tau) + 2 (\xi - \tau) \int_0^\tau \bar{m}_{0s}(x) dx + 2 \int_0^\tau \int_0^x \bar{m}_{0s}(\zeta) d\zeta dx \right].$$

On aura donc, en introduisant dans cette équation successivement les séries (7), (12) et (13):

$$\begin{aligned} \bar{m}_{20}(\tau, \xi) &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} 4 \left[(\tau - \xi)^2 - (\tau - \xi) \frac{2\tau}{\sigma + 1} + \frac{2\tau^2}{(\sigma + 2)(\sigma + 1)} \right] \tau^\sigma h_{0,\sigma}(M) (-j\omega_r)^\sigma \\ &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{20,\sigma} (-j\omega_r)^\sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_{21}(\tau, \xi) &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} 4 \left[(\tau - \xi)^2 - (\tau - \xi) \frac{2\tau}{\sigma + 2} + \frac{2\tau^2}{(\sigma + 3)(\sigma + 2)} \right] \tau^{\sigma+1} h_{1,\sigma}(M) (-j\omega_r)^\sigma \\ &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{21,\sigma} (-j\omega_r)^\sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_{22}(\tau, \xi) &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} 4 \left[(\tau - \xi)^2 - (\tau - \xi) \frac{2\tau}{\sigma + 3} + \frac{2\tau^2}{(\sigma + 4)(\sigma + 3)} \right] \\ &\quad \times \frac{4\tau^{\sigma+2}}{\sigma + 2} h_{2,\sigma}(M) (-j\omega_r)^\sigma \\ &= \sum_{\sigma=0}^{\infty} \bar{m}_{22,\sigma} (-j\omega_r)^\sigma. \end{aligned}$$

4. Calcul des paramètres $m_{r,s}$

Nous pouvons maintenant calculer sans peine les paramètres $m_{r,s}$ et $m_{R,s}$ définis par les équations (7a) et (7b) du paragraphe 2 du présent rapport.

Les paramètres $m_{r,s}$ concernant l'aile ($0 \leq r, s \leq 2$) se déduisent des paramètres $\bar{m}_{r,s}$ en posant $\tau = 1$ et $\xi = 0$ [puisque le point de référence est, d'après l'équation de définition (8a) du paragraphe 2, le bord d'attaque]. On a donc:

$$m_{r,s} = \bar{m}_{r,s}(1, 0). \quad (0 \leq r, s \leq 2)$$

Les paramètres m_{R_s} concernant l'aile ($0 \leq s \leq 2$) et ayant comme point de référence l'axe de rotation de l'aileron s'obtiennent à partir des paramètres \bar{m}_{r_s} en décomposant l'intégrale de définition (8b) du paragraphe 2 de la façon suivante (avec $x_0 = 0$):

$$l \int_{1-\tau}^1 (x-1+\tau-\varepsilon) p_s dx = l \left[2 \int_{1-\tau}^1 [x-(1-\tau)] p_s dx - 2 \varepsilon \int_{1-\tau}^1 p_s dx \right].$$

On a donc pour m_{R_s} :

$$m_{R_s} = \bar{m}_{1s}(1, 1-\tau) - \bar{m}_{1s}(1-\tau, 1-\tau) - 2 \varepsilon [\bar{m}_{0s}(1) - \bar{m}_{0s}(1-\tau)]. \quad (0 \leq s \leq 2)$$

Pour calculer les paramètres m_{r_R} concernant l'aileron ($0 \leq r \leq 2$ et $r = R$), nous devons effectuer une transformation des paramètres du fait que la rotation de l'aileron ne s'effectue pas autour de son bord d'attaque, mais autour de sa charnière. En désignant par \bar{m}_{r_R} le paramètre de l'aileron, pris par rapport au point de référence ξ , lorsque l'aileron effectue une rotation autour de sa charnière, on a d'une façon générale:

$$\bar{m}_{r_R}(\tau, \xi) = \bar{m}_{r_1}(\tau, \xi) - 2 \varepsilon \bar{m}_{r_0}(\tau, \xi). \quad (0 \leq r \leq 2 \text{ et } r = R)$$

Pour les trois premiers de ces paramètres ($0 \leq r \leq 2$), le point de référence est, d'après leur équation de définition (8a) (paragraphe 2), le bord d'attaque de l'aile, c'est-à-dire situé à une distance égale à $|\tau - 1|$ du bord d'attaque de l'aileron. On a donc $\xi = \tau - 1$, et on obtient:

$$m_{r_R} = \bar{m}_{r_R}(\tau, \tau - 1) = \bar{m}_{r_1}(\tau, \tau - 1) - 2 \varepsilon \bar{m}_{r_0}(\tau, \tau - 1). \quad (0 \leq r \leq 2)$$

Enfin le quatrième paramètre m_{RR} , qui correspond au moment par rapport à l'axe de rotation de l'aileron, lorsque l'aileron effectue une rotation autour de son axe [d'après l'équation de définition (8b) du paragraphe 2], s'obtient de $\bar{m}_{1R}(\tau, \xi)$ en y posant $\xi = \varepsilon$; on a:

$$m_{RR} = \bar{m}_{1R}(\tau, \varepsilon) = \bar{m}_{11}(\tau, \varepsilon) - 2 \varepsilon \bar{m}_{10}(\tau, \varepsilon).$$

5. Cas d'un aileron avec fente fermée

Dans ce qui précède nous n'avons considéré qu'un aileron avec fente ouverte (définition KÜSSNER-SCHWARTZ [6]), c'est-à-dire avec une compensation aérodynamique. Il nous faut donc encore considérer le cas d'un aileron avec fente fermée. On sait que cette caractéristique n'a d'influence que sur le paramètre aérodynamique provenant d'une translation de l'aileron, donc le paramètre \bar{m}_{00} . Soit \bar{m}_{00} le paramètre de l'aileron avec fente fermée lorsque celui-ci effectue une translation. Considérons la figure 4. Le profil d'aile A_1 est rigide et effectue un mouvement vibratoire de rotation autour du bord d'attaque $x = 0$. Le profil A_2 se compose d'une suite d'ailerons à fente fermée et disposés en escalier; chaque aileron a la même profondeur Δx ; les ailerons effectuent chacun un mouvement vibratoire de translation, tous avec la même fréquence et en phase, de sorte que lorsque les ailerons passent par zéro (axe des x) le profil A_2 est une droite. En désignant par β l'angle de rotation du profil A_1 , on voit que l'amplitude de vibration d'un aileron par rapport à l'aileron précédent est égale à $l \beta \Delta x$. La force aérodynamique agissant sur le profil A_1 est égale (à un facteur près) à $l \beta m_{01}/2$, tandis que celle agissant sur le profil A_2 est égale à $l \Sigma \beta \Delta x \bar{m}_{00}$. A la limite

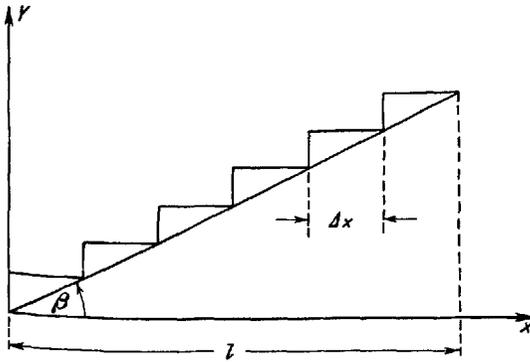


Fig. 4

$\Delta x \rightarrow 0$, les deux forces aérodynamiques sont égales:

$$m_{01} = 2 \int_0^1 \bar{m}_{00} dx.$$

Par le changement de variable $x = 1 - \tau$, on obtient:

$$m_{01} = 2 \int_0^1 \bar{m}_{00} d\tau.$$

Nous développons \bar{m}_{00} en une série semblable à la série (7):

$$\bar{m}_{00} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \tau^{\sigma} \bar{h}_{0,\sigma}(M) (-j \omega_r)^{\sigma}.$$

En introduisant pour m_{01} la série (12), avec $\tau = 1$, on obtient:

$$h_{1,\sigma}(M) = 2 \bar{h}_{0,\sigma}(M) \int_0^1 \tau^{\sigma} d\tau = \frac{2}{\sigma + 1} \bar{h}_{0,\sigma}(M).$$

On voit donc que pour un aileron non compensé aérodynamiquement (fente fermée) il suffit de remplacer $\bar{h}_{0,\sigma}(M)$ par

$$\bar{h}_{0,\sigma}(M) = \frac{\sigma + 1}{2} h_{1,\sigma}(M)$$

dans les formules pour $m_{r,R}$ ($0 \leq r \leq 2$ et $r = R$).

6. Les paramètres $m_{r,s}$ pour $r, s > 2$

Dans certains cas (pales ou autres surfaces de ce genre), il sera nécessaire de considérer plus que trois termes dans le développement en série de TAYLOR de \bar{Y} . Il sera alors également nécessaire de connaître les paramètres $m_{r,s}$ pour $r, s > 2$. Pour déterminer ces paramètres, on posera, en généralisant les formules obtenues dans les paragraphes précédents:

$$m_{r,s} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} m_{r,s,\sigma} (-j \omega_r)^{\sigma}.$$

Comme on pourra facilement s'en rendre compte en raisonnant par récurrence, les termes $m_{r,s,\sigma}$ s'obtiennent par la formule générale suivante:

$$m_{r,s,\sigma} = \frac{2^{\sigma} (\sigma + s)}{\sigma + r + s} m_{0s,\sigma} \quad (r, s \neq R)$$

avec

$$m_{0s,\sigma} = \begin{cases} h_{0,\sigma} & \text{pour } s = 0, \\ \frac{2^{s-1} s! (\sigma + 1)!}{(\sigma + s)!} h_{1,\sigma} & \text{pour } s \geq 1. \end{cases}$$

7. Conclusion

Nous avons ainsi obtenu un développement en série autour de $\omega_r = 0$ pour les seize paramètres $m_{r,s}$ entrant en ligne de compte pour un calcul de flutter d'une aile avec aileron. Comme on a pu s'en rendre compte, tous les paramètres se déduisent d'un seul d'entre eux, en l'occurrence le paramètre m_{00} . De plus, les coefficients des séries sont des produits d'une fonction de ω_r seul et d'une fonction de M seul; d'ailleurs cette fonction de M ne doit être calculée que pour un seul paramètre; en effet, il n'apparaît dans les coefficients que les fonctions $h_{0,\sigma}$ et $h_{1,\sigma}$ et les deux fonctions sont liées par une relation très simple [équation (11)]. Dans les cas pratiques, on déterminera donc uniquement $h_{0,\sigma}$, et on en déduira $h_{1,\sigma}$ par la relation (11).

Tous les résultats obtenus dans cette annexe pour les paramètres $m_{r,s}$ sont rassemblés dans le tableau ci-contre.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. WEBER, *Orthogonalisation des formes de vibration d'un avion, mesurées dans un essai au sol*, Publication O. N. E. R. A., N° 29 (1949).
- [2] R. WEBER, *Table des coefficients aérodynamiques instationnaires, Régime plan supersonique*, 1^{re} partie, Publication O. N. E. R. A. N° 41 (1950).
- [3] W. RUPPEL, *Sur la détermination des coefficients aérodynamiques instationnaires d'une aile en flèche*, Recherche aéronaut. N° 16, 55-59 (1950).
- [4] W. RUPPEL, *Etude de l'instabilité stationnaire d'un avion en vol à l'aide des coefficients d'influence*, Recherche aéronaut. N° 14, 25-29 (1950).
- [5] R. WEBER, *Détermination des coefficients aérodynamiques instationnaires en régime supersonique. Problème plan. Méthode L. Schwartz*, Publication O. N. E. R. A. N° 5 (1948).
- [6] H. G. KÜSSNER et L. SCHWARTZ, *Der schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenem Ruder*, Luftfahrtforschung 17, 337-354 (1940).

Zusammenfassung

In vorliegendem Bericht wird eine Methode entwickelt zur numerischen Berechnung der im Überschallgebiet geltenden Luftkraftkoeffizienten mit Hilfe von Lochkartenmaschinen oder programmgesteuerten Maschinen. Dazu werden die Ausdrücke für diese Koeffizienten in Reihen entwickelt, wobei jedes Reihenglied ein Matrizenprodukt ist. Dadurch wird es ebenfalls möglich, die reduzierte Frequenz, die bei Flatterrechnungen immer als Hilfsvariable auftritt, zu eliminieren. Die Flattergleichung enthält dann als Unbekannte nur noch die wirklich interessierenden Grössen: die kritische Frequenz (Flatterfrequenz) und die kritische Machsche Zahl (Flattergeschwindigkeit).

Da die Luftkraftbeiwerte für den allgemeinen Fall einer schwingenden Tragfläche noch nicht bekannt sind, wird diese streifenweise eben angenommen. Die Methode wird dargelegt an Hand einer schräg zur Windrichtung angestellten Tragfläche mit ebenfalls schräg zur Windrichtung angebrachten Querrippen. Alle anderen Fälle lassen sich ohne weiteres aus diesem allgemeinen Fall ableiten.

In einem Anhang werden die zur Berechnung der Luftkraftkoeffizienten benötigten Reihenentwicklungen der Luftkraftbeiwerte bestimmt.

r effet		s cause		
		Aile		Rotation de l'aileron autour de son axe
		Translation du bord d'attaque	Rotation autour du bord d'attaque	Courbure au bord d'attaque
Force totale $m_{0,s,\sigma}$	0	1	2	K
	$h_{0,\sigma}$	$h_{1,\sigma}$	$\frac{4}{\sigma+2} h_{1,\sigma}$	$\tau^{\sigma+1} h_{1,\sigma}$ $-2 \varepsilon \tau^\sigma \bar{h}_{0,\sigma}$
Moment total par rapport au bord d'attaque $m_{1,s,\sigma}$	$2 \frac{\sigma}{\sigma+1} h_{0,\sigma}$	$2 \frac{\sigma+1}{\sigma+2} h_{1,\sigma}$	$2 \frac{\sigma+2}{\sigma+3} \cdot \frac{4}{\sigma+2} h_{1,\sigma}$	$2 \left(1 - \frac{\tau}{\sigma+2}\right) \tau^{\sigma+1} h_{1,\sigma}$ $-2 \varepsilon 2 \left(1 - \frac{\tau}{\sigma+1}\right) \tau^\sigma \bar{h}_{0,\sigma}$
	$4 \frac{\sigma}{\sigma+2} h_{0,\sigma}$	$4 \frac{\sigma+1}{\sigma+3} h_{1,\sigma}$	$4 \frac{\sigma+2}{\sigma+4} \cdot \frac{4}{\sigma+2} h_{1,\sigma}$	$4 \left(1 - \frac{2\tau}{\sigma+2} + \frac{2\tau^2}{(\sigma+2)(\sigma+3)}\right) \tau^{\sigma+1} h_{1,\sigma}$ $-2 \varepsilon 4 \left(1 - \frac{2\tau}{\sigma+1} + \frac{2\tau^2}{(\sigma+1)(\sigma+2)}\right) \tau^\sigma \bar{h}_{0,\sigma}$
Moment du deuxième degré par rapport au bord d'attaque $m_{2,s,\sigma}$	$2 \left(\tau - \frac{1 - (1-\tau)^{\sigma+1}}{\sigma+1}\right) h_{0,\sigma}$ $-2 \varepsilon [1 - (1-\tau)^\sigma] h_{0,\sigma}$	$2 \left(\tau - \frac{1 - (1-\tau)^{\sigma+2}}{\sigma+2}\right) h_{1,\sigma}$ $-2 \varepsilon [1 - (1-\tau)^{\sigma+1}] h_{1,\sigma}$	$2 \left(\tau - \frac{1 - (1-\tau)^{\sigma+3}}{\sigma+3}\right) \frac{4}{\sigma+2} h_{1,\sigma}$ $-2 \varepsilon [1 - (1-\tau)^{\sigma+2}] \frac{4}{\sigma+2} h_{1,\sigma}$	$\left(\frac{\sigma+1}{\sigma+2} - 2\varepsilon\right) \tau^{\sigma+1} h_{1,\sigma}$ $-2 \varepsilon \left(2\tau \frac{\sigma}{\sigma+1} - 2\varepsilon\right) \tau^\sigma \bar{h}_{0,\sigma}$
	$m_{R,s,\sigma}$	Tableau des paramètres $m_{r,s,\sigma}$		

$$m_{r,s} = \sum_{\sigma=0}^{\infty} m_{r,s,\sigma} (-j\omega_r)^\sigma$$