

# MEHRFACHE GITTERFÖRMIGE KREISLAGERUNGEN IN DER EBENE

Von

A. HEPPES (Budapest)  
(Vorgelegt von G. HAJÓS)

Wir streuen in der euklidischen Ebene abzählbar unendlich viele kongruente Kreisscheiben aus. Gehört ein jeder Punkt zum Inneren von höchstens  $k$  Kreisen, so sprechen wir von einer  $k$ -fachen Kreislagerung. Gehört dagegen jeder Punkt zu wenigstens  $k$  Kreisen, so handelt es sich um eine  $k$ -fache Kreisüberdeckung.

Wir bezeichnen mit  $\delta_k$  und  $\Delta_k$  die (obere bzw. untere) Dichte [1] einer  $k$ -fachen Kreislagerung bzw. einer  $k$ -fachen Kreisüberdeckung und betrachten die obere und untere Grenze  $d'_k = \sup \delta_k$  und  $D'_k = \inf \Delta_k$  der Zahlen  $\delta_k$  bzw.  $\Delta_k$ , erstreckt über alle  $k$ -fachen Kreislagerungen bzw. Kreisüberdeckungen, und die obere und untere Grenze  $d_k = \sup \delta_k$  und  $D_k = \inf \Delta_k$  der Zahlen  $\delta_k$  bzw.  $\Delta_k$ , erstreckt über die *gitterförmigen* Kreislagerungen bzw. Kreisüberdeckungen. (Wir nennen eine Kreislagerung bzw. Kreisüberdeckung *gitterförmig*, wenn die Mittelpunkte der Kreise ein Punktgitter bilden.) Bekanntlich gilt [1]

$$d_1 = d'_1 = \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0,9069 \dots$$

und

$$D_1 = D'_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{27}} = 1,209 \dots$$

Ferner haben wir

$$kd_1 \leq d_k \leq d'_k < k$$

und

$$kD_1 \geq D_k \geq D'_k > k.$$

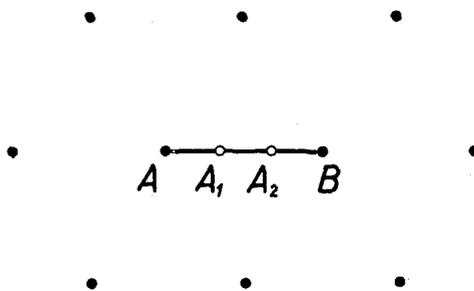


Fig. 1

Wir betrachten nämlich das Punktgitter, das für  $k=1$  die extremale Dichte liefert, sowie eine Strecke, die zwei Gitterpunkte  $A$  und  $B$  verbindet, aber keinen weiteren Gitterpunkt enthält (Fig. 1). Wir zerlegen die Strecke  $AB$  durch die Punkte  $A_1, A_2, \dots, A_{k-1}$  in  $k$  kongruente Teilstrecken. Wenden wir auf die Punkte  $A=A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  die ursprünglichen Gittertranslationen an, so entsteht ein neues Punktgitter, welches eine neue gitterförmige Kreislagerung bzw. Kreisüberdeckung von der Dichte  $kd_1$  bzw.  $kD_1$  erzeugt. Die übrigen Ungleichungen sind trivial.

W. J. BLUNDON hat unlängst bewiesen [2], daß

$$D_2 = D_1 \cdot 2,$$

$$D_3 = D_1 \cdot \frac{(15 + \sqrt{97})\sqrt{11 + 5\sqrt{97}}}{48\sqrt{2}} = D_1 \cdot 2,841 \dots,$$

$$D_4 = D_1 \cdot \frac{25}{4\sqrt{3}} = D_1 \cdot 3,608 \dots$$

Wir beweisen hier den folgenden

**SATZ.** *Bedeutet  $d_k$  die Dichte der dichtesten  $k$ -fachen gitterförmigen Kreislagerung, so gilt*

$$(I) \quad d_k = kd_1 \quad \text{für} \quad k < 5$$

und

$$(II) \quad d_k > kd_1 \quad \text{für} \quad k \geq 5.$$

In einer früheren Arbeit [3] habe ich gezeigt, daß für  $k > 1$   $d'_k > kd_1$  ausfällt. Daraus folgt dann, daß die Lösung des Problems der dichtesten mehrfachen Kreislagerung für  $1 < k < 5$  nicht gitterförmig ist.

Im folgenden werden wir unter einer Kreislagerung stets eine gitterförmige Lagerung von Einheitskreisen verstehen. Wir beziehen die Ortsvektoren auf einen Gitterpunkt  $\mathbf{o}$ , und bezeichnen einen Punkt und seinen Ortsvektor mit demselben Symbol.  $\mathbf{a}$  bedeute immer einen kürzesten und  $\mathbf{b}$  einen zu  $\mathbf{a}$  nicht parallelen kürzesten Gittervektor, so daß  $\mathbf{o}$ ,  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  ein rechtwinkliges oder spitzwinkliges Dreieck bestimmen.

Es ist leicht einzusehen, daß die Dichte einer Kreislagerung  $\frac{\pi}{P}$  ist, wo  $P$  den Inhalt eines Grundparallelogrammes bedeutet.

**BEWEIS VON (I).** Eine Kreislagerung ist dann und nur dann  $k$ -fach, wenn kein Einheitskreis der Ebene  $k+1$  Gitterpunkte in seinem Inneren enthält. Daraus folgt die notwendige

**Bedingung A.** In einer beliebigen  $k$ -fachen Kreislagerung gilt  $|\mathbf{a}| \geq \frac{2}{k}$ .

**HILFSSATZ.** *Sind sowohl die Seiten wie der Umkreishalbmesser eines rechtwinkligen oder spitzwinkligen Dreiecks  $\geq s$ , so ist der Inhalt des Dreiecks  $\geq \frac{\sqrt{3}}{2}s^2$ . Gleichheit gilt nur für ein rechtwinkliges Dreieck von den Katheten  $s$  und  $\sqrt{3}s$ .*

**BEWEIS.** Ein Dreieck, das den Bedingungen des Hilfssatzes Genüge leistet, wollen wir *zulässig* nennen. Wir werden einige Eigenschaften eines zulässigen Dreiecks  $D$  vom kleinstmöglichen Inhalt zeigen. Die Existenz eines

solchen extremalen Dreiecks wird durch den bekannten Weierstraßschen Satz gesichert.

$D$  ist rechtwinklig. Wir betrachten ein zulässiges, aber nicht rechtwinkliges Dreieck von der kürzesten Seitenlänge  $l$ . Das rechtwinklige Dreieck mit gleichem Umkreishalbmesser  $r$  und mit einer Kathete  $l$  hat einen kleineren Inhalt, und dieses neue Dreieck ist auch zulässig. Die andere Kathete ist nämlich mindestens  $r \cong s$ , da  $l$  höchstens  $\sqrt{3}r$  ist (Fig. 2).

Die Länge der kleinsten Seite von  $D$  ist  $s$ . Wir betrachten ein zulässiges rechtwinkliges Dreieck, das einem vorgegebenen Kreis einbeschrieben ist. Wir können uns die Gesamtheit solcher Dreiecke so vorstellen, daß sie an einer gemeinsamen Hypotenuse als Basis ruhen. Unter diesen Dreiecken

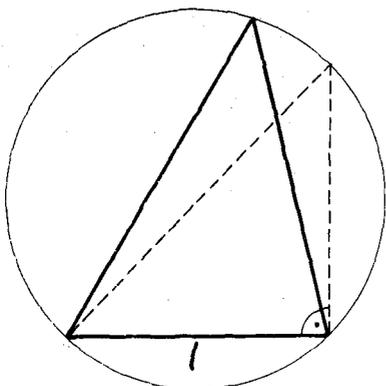


Fig. 2

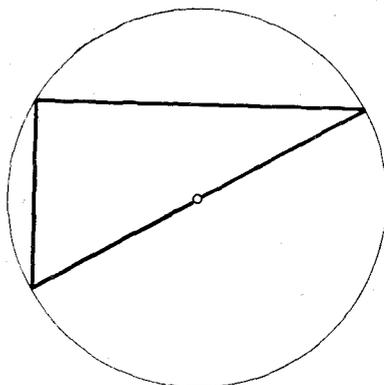


Fig. 3

hat dasjenige Dreieck den kleinstmöglichen Inhalt, welches die kleinstmögliche Höhe, also kleinstmögliche kürzeste Kathete hat. Folglich hat  $D$  eine Kathete von der Länge  $s$ .

Der Umkreishalbmesser von  $D$  ist  $s$ . Unter den rechtwinkligen Dreiecken von der Hypotenuse  $2r$  und Kathete  $s$  besitzt dasjenige den kleinstmöglichen Inhalt, welches die kleinstmögliche Hypotenuse hat. Mit Rücksicht auf  $r \cong s$  erreicht also der Flächeninhalt sein Minimum im Falle  $r = s$  (Fig. 3).

Damit ist unser Hilfssatz bewiesen, und wir kehren zum Beweis von (I) zurück.

Fall  $k=2$ . In Hinblick auf die Bedingung A ist  $|\mathbf{a}| \cong 1$ ; folglich sind alle Seiten des Dreiecks  $\mathbf{o}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \cong 1$ . Da ferner auch der Umkreisradius von  $\mathbf{o}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \cong 1$  ausfällt, ist der Inhalt von  $\mathbf{o}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$  mit Rücksicht auf unseren Hilfssatz  $\cong \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Gleichheit gilt nur im Falle  $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = \sqrt{3}$ . Daraus folgt,

daß die Dichte einer zweifachen Lagerung  $\cong \frac{\pi}{\sqrt{3}}$  ist, und Gleichheit kann nur im erwähnten Falle bestehen (Fig. 4). Diese Lagerung ist tatsächlich zweifach, und so ist  $d_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} = 2d_1$ .

Fall  $k=3$ . Mit Rücksicht auf die Bedingung A ist  $|\mathbf{a}| \cong \frac{2}{3}$ . Außerdem muß bei einer dreifachen Lagerung die weitere notwendige Bedingung erfüllt

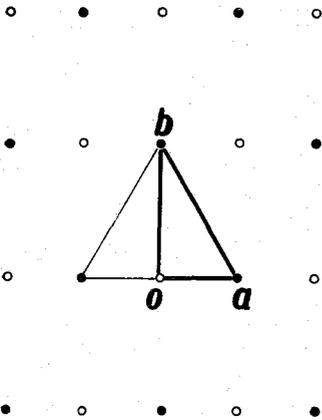


Fig. 4

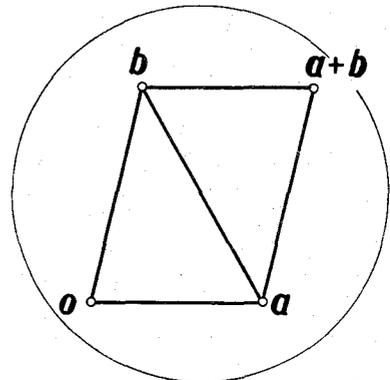


Fig. 5

sein, daß jede Schwerlinie des Dreiecks  $o, a, b$  mindestens 1 ist, denn sonst wäre z. B. der Punkt  $\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}$  viermal bedeckt (Fig. 5). Wir behaupten, daß der Inhalt von  $o, a, b$  in jedem Gitter, das diesen beiden Bedingungen Genüge leistet,  $\cong \frac{\sqrt{3}}{3}$  ist.

Wir werden also beweisen, daß der Inhalt eines spitzwinkligen oder rechtwinkligen Dreiecks, dessen Seiten  $\cong \frac{2}{3}$  und Schwerlinien  $\cong 1$  sind, mindestens  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  beträgt. Diese untere Schranke wird nur für zwei verschiedene Dreiecke erreicht. Die drei Schwerlinien zerlegen unser Dreieck in sechs flächengleiche Dreiecke (Fig. 6). Unter diesen Teildreiecken gibt es immer ein rechtwinkliges oder spitzwinkliges. Neben den ursprünglichen Seiten liegen nämlich höchstens drei und bei dem Schwerpunkt höchstens zwei stumpfe Winkel. Da ferner  $o, a, b$  nicht stumpfwinklig ist, sind insgesamt höchstens fünf stumpfe Winkel vorhanden. Die Seiten des spitzwinkligen bzw. rechtwink-

ligen Teildreiecks sind mindestens  $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$  bzw.  $\frac{2}{3}$ . Deshalb ist auch der Umkreishalbmesser dieses Teildreiecks mindestens  $\frac{1}{3}$ . Folglich ist nach unserem

Hilfssatz der Inhalt dieses Teildreiecks

$$\cong \frac{\sqrt{3}}{18},$$

und Gleichheit tritt nur für ein solches rechtwinkliges Dreieck in Kraft, dessen Hypotenuse  $\frac{2}{3}$  und eine Kathete  $\frac{1}{3}$  ist. Die Hypotenuse muß immer an

einer Schwerlinie von der Länge 1 liegen, die kürzere Kathete kann dagegen entweder an einer Schwerlinie von der

Länge 1 oder an einer Seite von der Länge  $\frac{2}{3}$  liegen. Deshalb kann das ursprüngliche Dreieck von zwei verschiedenen Typen sein (Fig. 7). In beiden Fällen ist der Inhalt des zugehörigen Grundparallelogrammes  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ . Da sich aus beiden

Möglichkeiten tatsächlich dreifache Lagerungen ergeben, haben wir

$$d_3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} = 3d_1.$$

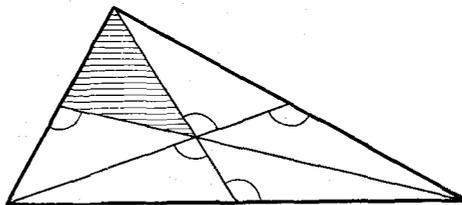


Fig. 6

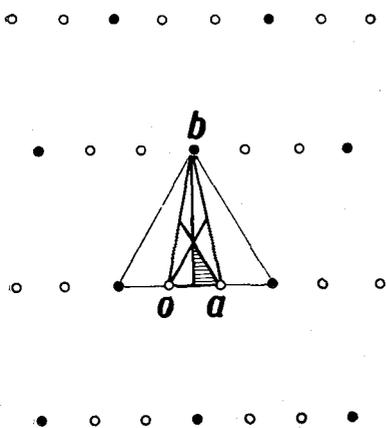


Fig. 7a

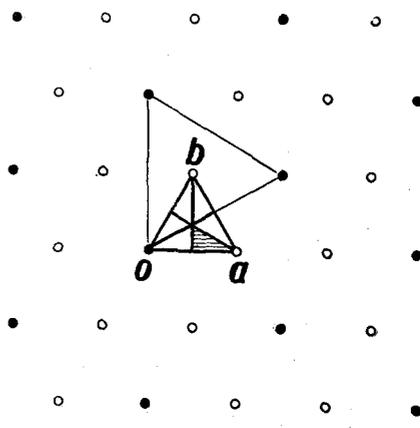


Fig. 7b

Fall  $k = 4$ . Nach der Bedingung A haben wir  $|a| \cong \frac{1}{2}$ . Wir heben noch zwei weitere notwendige Bedingungen hervor:

Es ist  $|\mathbf{b}| \geq 1$ . Sonst wären die Punkte  $\mathbf{o}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $-\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $-\mathbf{b}$  im Inneren des um  $\mathbf{o}$  geschlagenen Einheitskreises, der Punkt  $\mathbf{o}$  wäre also fünfmal bedeckt.

Der Radius des durch die Punkte  $\mathbf{o}$ ,  $2\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  gehenden Kreises ist mindestens 1. Um dies einzusehen, zeigen wir zunächst, daß dieser Kreis

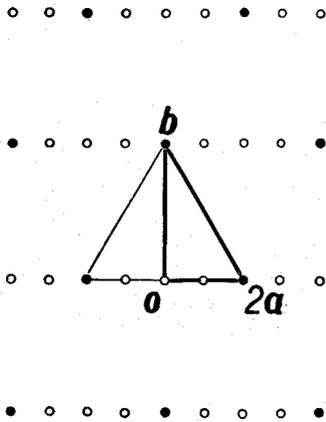


Fig. 8a

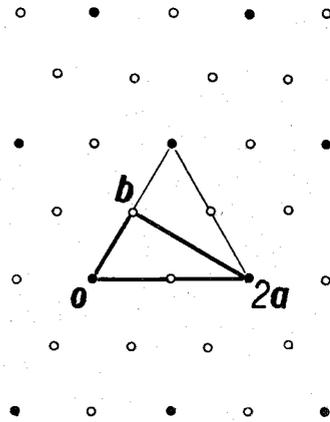


Fig. 8b

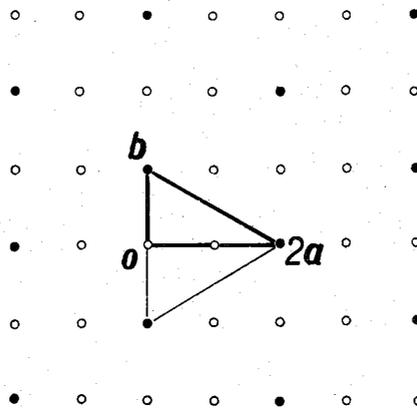


Fig. 8c

immer fünf Gitterpunkte am Rand oder im Inneren enthält. Die Punkte  $\mathbf{o}$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $2\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  gehören natürlich zum Kreis. Da aber nach der Definition von  $\mathbf{b}$   $|\mathbf{a}-\mathbf{b}| \geq |\mathbf{b}|$  ist, enthält der Kreis auch den Punkt  $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ . Wäre also der Radius dieses Kreises  $< 1$ , so würde der konzentrische Einheitskreis fünf Gitterpunkte in seinem Inneren enthalten.

Aus unserem Hilfssatz folgt, daß der Inhalt des Dreiecks  $\mathbf{o}, 2\mathbf{a}, \mathbf{b} \cong \frac{\sqrt{3}}{2}$  ist, mit Gleichheit für und nur für ein rechtwinkliges Dreieck von den Katheten 1 und  $\sqrt{3}$ . Dieses Dreieck bestimmt drei verschiedene Gitter, je nachdem welche Seite die Länge  $|2\mathbf{a}|$  besitzt (Fig. 8). Alle drei Gitter liefern tatsächlich vierfache Lagerungen. Da ferner der Inhalt des Grundparallelogrammes eines solchen Gitters mit dem Inhalt des Dreiecks  $\mathbf{o}, 2\mathbf{a}, \mathbf{b}$  übereinstimmt, haben wir  $d_4 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} = 4d_1$ .

Damit haben wir den ersten Teil unseres Satzes bewiesen.

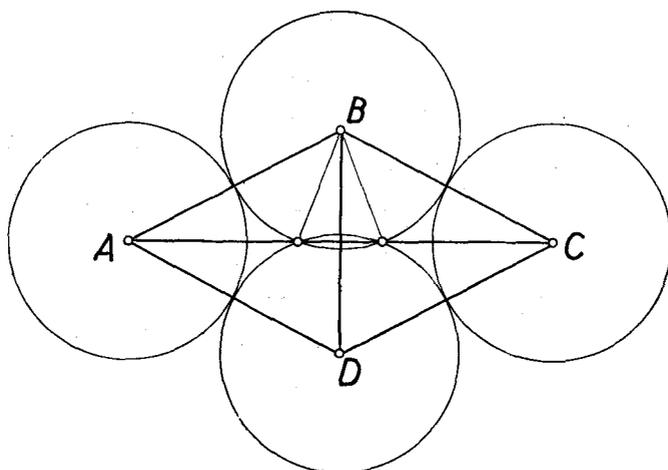


Fig. 9

BEWEIS von (II). Um die Ungleichung  $d_k > kd_1$  für  $k > 5$  zu beweisen, werden wir im folgenden für jeden Wert  $k > 5$  eine  $k$ -fache gitterförmige Kreislagerung angeben, deren Dichte größer als  $kd_1$  ist.

Es sei  $ABCD$  ein Rhombus von der Seitenlänge 2, dessen kürzere Diagonale  $BD < 2$  ausfällt. Die Länge dieser Diagonale sei so gewählt, daß der Durchmesser des Durchschnittes der um  $B$  und  $D$  geschlagenen Einheitskreise  $2x = \frac{AC}{k}$  sei (Fig. 9). Dann ist  $AC = 2k\sqrt{\frac{3}{k^2-1}}$  und die Kreise vom Mittelpunkt  $A, B, C, D$  zerlegen die Diagonale  $AC$  in fünf Teile von der Länge 1,  $y = k\sqrt{\frac{3}{k^2-1}} - 1 - x$ ,  $2x$ ,  $y$ , 1. Wir haben  $y - x = (k-2)\sqrt{\frac{3}{k^2-1}} - 1$ , was für  $k \geq 5$  positiv ausfällt. Folglich ist  $y > x$ .

Wir betrachten das durch das Grundparallelogramm  $ABCD$  erzeugte Kreisgitter  $G$  und die Gitter  $G_i = G + \frac{i}{k}\vec{AC}$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Die Vereinigung

$\{G_i\}$  dieser Gitter liefert eine gitterförmige Kreislagerung. Wird ein Punkt der Ebene etwa durch  $G_i$  zweifach überdeckt (Fig. 10), so wird dieser Punkt mit Rücksicht auf  $y > x$  entweder durch  $G_{i-1}$  oder durch  $G_{i+1}$  nicht überdeckt ( $G_{i+k} = G_i$ ). Deshalb ist  $\{G_i\}$  eine höchstens  $k$ -fache Kreislagerung. In Hinblick auf  $BD < 2$  ist der Inhalt von  $ABCD < 2\sqrt{3}$ , und demzufolge die Dichte von  $\{G_i\} > kd_1$ .

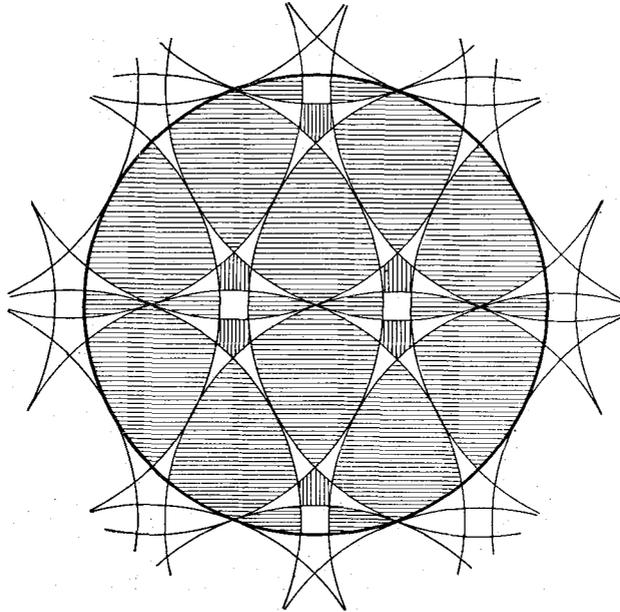


Fig. 10

Zum Schluß spreche ich meinen Dank Herrn Prof. FEJES TÓTH aus, der meine Aufmerksamkeit auf diese Probleme gerichtet hat.

(Eingegangen am 5. Februar 1959.)

### Literaturverzeichnis

- [1] L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953).
- [2] W. J. BLUNDON, Multiple covering of the plane by circles, *Mathematika*, **4** (1957), S. 7—16.
- [3] A. HEPPES, Über mehrfache Kreislagerungen, *Elemente der Math.*, **10** (1955), S. 125—127.