Math. Annalen, Bd. 123, S. 288—301 (1951).

Über Seiteneinteilungen in affinen und euklidischen Ebenen.

Von

Friedrich Bachmann und Wilhelm Klingenberg in Kiel.

Durch seine Theorie der Ordnungsfunktionen[1]) hat E. Sperner die Aufmerksamkeit auf die Anordnungseigenschaften einer affinen Ebene gelenkt, die sich aus der Annahme ergeben, daß jede Gerade die nicht auf ihr liegenden Punkte in zwei Klassen, die „Seiten" der Geraden, einteilt und daß die Einteilung zwei einfachen geometrischen Bedingungen, der Parallelenbedingung und der Geradenrelation, genügt. Eine äquivalente Annahme ist, daß auf jeder Geraden jeder Punkt die übrigen Punkte in zwei Klassen, die „Seiten" des Punktes, einteilt und daß die Einteilung gegen Parallelprojektion invariant ist. Diese *Seiteneinteilungen* lassen sich durch Ordnungsfunktionen beschreiben, und es ergibt sich so ein Kalkül, der einen bemerkenswerten Teil geometrischer Anordnungsbeziehungen liefert[2]).

Durch die Spernerschen Untersuchungen wird die Frage nahegelegt, welche affinen Ebenen eine (echte) Seiteneinteilung zulassen, und man kann allgemeiner versuchen, über die möglichen Seiteneinteilungen einer gegebenen affinen Ebene einen Überblick zu erhalten. Da die Seiteneinteilungen einer affinen Ebene den „Halbordnungen" der multiplikativen Gruppe der Streckenverhältnisse eineindeutig entsprechen, kann die Frage auf eine gruppentheoretische zurückgeführt werden, welche sich allgemein beantworten läßt. Wir zeigen sodann, daß die euklidischen Ebenen, die wir als affine Ebenen mit einer Orthogonalität ohne selbst-orthogonale Geraden erklären[3]), stets echte, durch die Orthogonalität ausgezeichnete, Seiteneinteilungen besitzen.

Auf den Begriff der euklidischen Ebene in der hier vorausgesetzten Allgemeinheit wird man durch die Begründung der metrischen Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff geführt, wie sie, Untersuchungen von Hessenberg und Hjelmslev weiterführend, K. Reidemeister, Arnold Schmidt und F. Bachmann unternommen haben. Bei dieser Begründung wird ein Axiomensystem der ebenen absoluten Geometrie zugrunde gelegt, welches den Spiegelungsbegriff als Grundbegriff benutzt und keine Anordnungsaxiome und

---

[1]) E. Sperner: [1] Die Ordnungsfunktionen einer Geometrie. Math. Ann. **121**, 107 (1949). [2] Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung. Sitzgsber. Heidelberger Akad. Wiss., Math.-naturw. Kl., **1949**, 413. [3] Konvexität bei Ordnungsfunktionen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **16**, 140 (1950). — Über die ersten beiden Arbeiten erschienen Berichte in Arch. Math. Oberwolfach **1**, 9, 148 (1948).

Die vorliegende Arbeit ist so abgefaßt, daß sie unabhängig von den Spernerschen Arbeiten lesbar ist. § 1 ist eine Darstellung der im weiteren Verlauf der Arbeit verwendeten Definitionen und Ergebnisse von Sperner, allerdings in etwas abweichender Form.

[2]) Beispiele solcher Anordnungssätze s. Sperner [1] § 4.

[3]) Zu dieser Definition vgl. O. Veblen and J. W. Young, Projective geometry, vol. II. Boston 1918. Ch. IV, und R. Baer, The fundamental theorems of elementary geometry. An axiomatic analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **56**, 94 (1944).

-begriffe enthält[4]); und da das Axiomensystem auch über endlichen Körpern realisiert werden kann, gestatten die ihm genügenden Geometrien gewiß nicht stets eine volle Anordnung. Wir gelangen nun aber zu dem Ergebnis, daß die euklidischen Spiegelungsgeometrien stets durch die Orthogonalität ausgezeichnete Seiteneinteilungen zulassen.

Es ergibt sich so ein Zusammenhang zwischen der SPERNERschen Theorie der Ordnungsfunktionen und den Untersuchungen über die Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Man erkennt, daß die Seiteneinteilungen, deren affine Eigenschaften SPERNER zunächst untersucht hat, auch zur Metrik in Beziehung gesetzt werden können, und gewinnt einen neuen Zugang zu der Frage, in welchem Umfang metrische Tatsachen die Anordenbarkeit der Geometrie zur Folge haben.

§ 1. Seiteneinteilungen und Halbordnungen.

Wir sagen, daß in einer affinen Ebene[5]) eine *Halbgeraden-Einteilung* gegeben ist, wenn für die Punkttripel P_0, P_1, P_2 (hiermit ist stets gemeint, daß P_0, P_1, P_2 in einer Geraden liegen und $P_0 \neq P_1, P_2$ ist) zwei Relationen

(1)
P_1 und P_2 liegen auf derselben Seite von P_0,
P_1 und P_2 liegen auf verschiedenen Seiten von P_0

gegeben sind, die den folgenden Bedingungen genügen[6]):

1. Für jedes feste Punkttripel gilt genau eine der Relationen (1);

2. *Transitivitätsregel:* Sind P_0, P_1, P_2, P_3 Punkte einer Geraden und ist $P_0 \neq P_1, P_2, P_3$, so gilt: Liegen P_1 und P_2 auf der gleichen Seite von P_0, P_2 und P_3 auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von P_0, so liegen P_1 und P_3 auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von P_0; liegen P_1 und P_2 auf verschiedenen Seiten von P_0, P_2 und P_3 auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von P_0, so liegen P_1 und P_3 auf verschiedenen bzw. auf der gleichen Seite von P_0;

3. *Invarianz gegen Parallelprojektion:* Sind P_0, P_1, P_2 und P_0', P_1', P_2' Punkttripel auf zwei verschiedenen Geraden und liegen P_0, P_0'; P_1, P_1'; P_2, P_2' auf zueinander parallelen Geraden (der Fall, daß etwa $P_0 = P_0'$ ist, soll zugelassen sein), so gilt: Liegen P_1 und P_2 auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von P_0, so liegen P_1' und P_2' auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von P_0'.

Liegen P_1 und P_2 auf verschiedenen Seiten von P_0, so sagen wir auch, daß P_0 *zwischen* P_1 *und* P_2 liegt. Es ist klar, daß man die Definition der Halbgeraden-Einteilung auch mit Hilfe der Zwischenbeziehung aussprechen kann.

Halbgeraden-Einteilungen beschreiben wir durch *Ordnungsfunktionen:* Ist eine Halbgeraden-Einteilung gegeben, so führen wir eine Funktion der Punkttripel P_0, P_1, P_2, geschrieben $P_0(P_1, P_2)$, ein und setzen $P_0(P_1, P_2) = 1$ oder $P_0(P_1, P_2) = -1$, je nachdem P_1 und P_2 auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von P_0 liegen. Die Definitionseigenschaften der Halbgeraden-Einteilung drücken sich dann dadurch aus, daß für jedes feste Punkttripel

[4]) ARNOLD SCHMIDT: Die Dualität von Inzidenz und Senkrechtstehen in der absoluten Geometrie. Math. Ann. **118**, 609 (1943), und eine anschließende Note von F. BACHMANN: Math. Ann. **123**, (1951).

[5]) Eine affine Ebene sei durch die Gültigkeit der affinen Inzidenzaxiome und des Satzes von DESARGUES definiert.

[6]) Vgl. SPERNER [1] S. 115ff.

(2) entweder $P_0(P_1, P_2) = 1$ oder $P_0(P_1, P_2) = -1$

ist, daß die Gleichung

(3) $$P_0(P_1, P_2)\, P_0(P_2, P_3) = P_0(P_1, P_3)$$

für Punkte einer Geraden ($P_0 \neq P_1, P_2, P_3$) allgemein gilt, und daß unter den angegebenen geometrischen Voraussetzungen der Parallelprojektion $P_0(P_1, P_2) = P_0'(P_1', P_2')$ ist. Umgekehrt beschreibt jede Funktion $P_0(P_1, P_2)$ der Punkttripel, die diesen drei Bedingungen genügt, eine Halbgeraden-Einteilung.

Als einfache Folgerungen von (2) und (3) bemerken wir zunächst:

(4) $$P_0(P_1, P_1) = 1,\ P_0(P_1, P_2) = P_0(P_2, P_1).$$

(5) Aus $P_0(P_1, P_1') = P_0(P_2, P_2')$ folgt $P_0(P_1, P_2) = P_0(P_1', P_2')$,

für Punkttripel einer Geraden. Man erhält die erste Gleichung (4), die die *Reflexivität* des Liegens auf der gleichen Seite ausdrückt, indem man in (3) $P_2 = P_3 = P_1$ setzt, und dann die zweite Gleichung (4), die die *Symmetrie* der beiden Relationen (1) ausdrückt, indem man in (3) $P_3 = P_1$ setzt. Um (5) als gültig zu erkennen, multipliziere man die gegebene Gleichung mit $P_0(P_1', P_2)$; man erhält $P_0(P_1, P_1')\, P_0(P_1', P_2) = P_0(P_1', P_2)\, P_0(P_2, P_2')$ und durch Anwendung von (3) die behauptete Gleichung.

In der affinen Ebene denken wir uns durch die üblichen geometrischen Definitionen *Streckenverhältnisse* und das Rechnen mit ihnen eingeführt[7]). Wir wollen zeigen, daß eine Halbgeraden-Einteilung eine Halbordnung der multiplikativen Gruppe der Streckenverhältnisse induziert. Dabei ist eine *Halbordnung* einer Gruppe erklärt als eine Einteilung ihrer Elemente in zwei fremde Klassen, die der „positiven" und die der „negativen" Elemente, mit der Eigenschaft, daß das Produkt von zwei Elementen gleicher Klasse stets positiv, das Produkt von zwei Elementen verschiedener Klasse stets negativ ist[8]).

Als funktionale Darstellung der Halbordnungen einer Gruppe verwenden wir die *quadratischen Charaktere*[9]) der Gruppe , indem wir bei gegebener Halbordnung $\chi(a) = 1$ oder $\chi(a) = -1$ setzen, je nachdem a positiv oder negativ ist. Die Funktion $\chi(a)$ hat dann die Eigenschaften, daß für jedes feste Gruppenelement a

(6) entweder $\chi(a) = 1$ oder $\chi(a) = -1$

ist und daß für beliebige Gruppenelemente die Charakter-Regel

(7) $$\chi(a)\,\chi(b) = \chi(ab)$$

gilt, die die multiplikative Regel der Halbordnung ausdrückt; und jede Funktion mit diesen beiden Eigenschaften beschreibt eine Halbordnung.

---

[7]) K. REIDEMEISTER: Grundlagen der Geometrie. Berlin 1930. Kap. 6, 7. Vgl. auch die dort zitierte Arbeit von O. HÖLDER, Streckenrechnung und projektive Geometrie. Verh. Kgl. Sächs. Ges. Wiss., Math.-phys. Kl. 63, 65 (1911).

[8]) Wir verwenden den Begriff „Halbordnung" im Anschluß an SPERNER [1] § 5, [2] §§ 1 bis 3, [3] S. 142ff. (P. LORENZEN: Über halbgeordnete Gruppen. Math. Z. 52, 483 (1950) verwendet den Begriff anders.)

Eine nichttriviale (s. S. 294) Halbordnung einer Gruppe ist offenbar nichts anderes als eine Zerlegung der Gruppe in eine Untergruppe vom Index 2 und die zugehörige Nebenklasse, bei der die Elemente der Untergruppe positiv, die der Nebenklasse negativ genannt werden. (Vgl. SPERNER [1] S. 124, [2] S. 417.)

[9]) Zur Theorie der Gruppen-Charaktere vgl. etwa H. HASSE, Zahlentheorie. Berlin 1949. § 5.

Ist nun eine Halbgeraden-Einteilung gegeben, so gilt für Punkttripel, da solche mit gleichem Streckenverhältnis durch eine Kette von Parallelprojektionen auseinander hervorgehen:

(8) Ist $P_0 P_2 / P_0 P_1 = P'_0 P'_2 / P'_0 P'_1$, so ist $P_0 (P_1, P_2) = P'_0 (P'_1, P'_2)$.

Definieren wir daher

$$\chi (P_0 P_2 / P_0 P_1) = P_0 (P_1, P_2), \tag{9}$$

so ist damit jedem Streckenverhältnis $a \neq 0$ unabhängig vom repräsentierenden Punkttripel ein Funktionswert $\chi(a)$ zugeordnet, und aus (2) folgt (6). Sind ferner a, b zwei von Null verschiedene Streckenverhältnisse und werden auf einer Geraden Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 so gewählt, daß $P_0 P_2 / P_0 P_1 = a$, $P_0 P_3 / P_0 P_2 = b$ ist, so ergibt die Transitivitätsregel (3), auf Grund unserer Definition (9):

$$\chi (P_0 P_2 / P_0 P_1)\, \chi (P_0 P_3 / P_0 P_2) = \chi (P_0 P_3 / P_0 P_1), \tag{10}$$

und da nach der Definition des Produkts zweier Streckenverhältnisse $P_0 P_3 / P_0 P_1 = ab$ ist, gilt (7).

Umgekehrt kann man aus jeder Halbordnung der multiplikativen Gruppe der Streckenverhältnisse eine Halbgeraden-Einteilung gewinnen, indem man bei gegebener Halbordnung für ein Punkttripel P_0, P_1, P_2

$$P_0 (P_1, P_2) = \chi (P_0 P_2 / P_0 P_1) \tag{11}$$

setzt. Da der so definierte Wert $P_0 (P_1, P_2)$ nur von dem Streckenverhältnis des Punkttripels abhängt, gilt die Invarianz gegen Parallelprojektion. Ferner folgt (2) aus (6). Und sind P_0, P_1, P_2, P_3 Punkte einer Geraden, so folgt aus der multiplikativen Regel (7) die Gleichung (10), welche zeigt, daß bei der Festsetzung (11) die Transitivitätsregel (3) erfüllt ist.

Da der Übergang von einer Halbgeraden-Einteilung zu der Halbordnung gemäß (9) und der Übergang von einer Halbordnung zu der Halbgeraden-Einteilung gemäß (11) zueinander inverse Prozesse sind, gilt:

Satz 1. Die Halbgeraden-Einteilungen einer affinen Ebene und die Halbordnungen der multiplikativen Gruppe der Streckenverhältnisse entsprechen sich umkehrbar eindeutig; liegen bei einer Halbgeraden-Einteilung P_1 und P_2 auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von P_0, so ist das Streckenverhältnis $P_0 P_2 / P_0 P_1$ bei der zugehörigen Halbordnung positiv bzw. negativ, und umgekehrt.

Eine Halbgeraden-Einteilung ist, wie nun gezeigt werden soll, einer Halbebenen-Einteilung äquivalent[6]).

Wir sagen, daß in einer affinen Ebene eine *Halbebenen-Einteilung* gegeben ist, wenn für die Tripel g, P_1, P_2 (hiermit ist stets gemeint, daß g eine Gerade ist und P_1, P_2 nicht auf ihr gelegene Punkte sind) zwei Relationen

(12)
P_1 und P_2 liegen auf derselben Seite von g,
P_1 und P_2 liegen auf verschiedenen Seiten von g

gegeben sind, die den folgenden Bedingungen genügen[10]):

1. Für jedes feste Tripel g, P_1, P_2 gilt genau eine der Relationen (12);

[10]) Die Transitivitätsregel ist zugleich das (existenzfrei formulierte) Axiom von Pasch; s. Sperner [1] S. 109f. Die Parallelenbedingung ist der Arbeit Sperner [3] entnommen; vgl. dort Satz 4. Die Geradenrelation ist von Sperner in [1] S. 113, [2] S. 419, [3] S. 141 eingeführt.

2. *Transitivitätsregel* für jede Gerade g und beliebige, nicht auf g gelegene Punkte P_1, P_2, P_3, analog wie oben;

3. *Parallelenbedingung:* Sind P_1 und P_2 zwei verschiedene Punkte und ist ihre Verbindungsgerade zu der Geraden g parallel, aber von ihr verschieden, so liegen P_1 und P_2 auf der gleichen Seite von g;

4. *Geradenrelation:* Ist P_0, P_1, P_2 ein Punkttripel einer Geraden l und sind g, g' Geraden durch P_0, die von l verschieden sind, so gilt: Liegen P_1 und P_2 auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von g, so liegen P_1 und P_2 auf der gleichen bzw. auf verschiedenen Seiten von g'.

Halbebenen-Einteilungen beschreiben wir durch *Ordnungsfunktionen* $g(P_1, P_2)$, indem wir bei gegebener Halbebenen-Einteilung wieder $g(P_1, P_2) = 1$ oder $g(P_1, P_2) = -1$ setzen, je nachdem P_1 und P_2 auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von g liegen[11]). Die Definitionseigenschaften der Halbebenen-Einteilung drücken sich dann dadurch aus, daß für jedes feste Tripel g, P_1, P_2

$$\text{entweder } g(P_1, P_2) = 1 \text{ oder } g(P_1, P_2) = -1 \tag{13}$$

ist, daß allgemein für nichtinzidierende Punkte und Geraden

$$g(P_1, P_2)\, g(P_2, P_3) = g(P_1, P_3) \tag{14}$$

gilt, und daß unter den angegebenen geometrischen Voraussetzungen der Parallelenbedingung bzw. der Geradenrelation stets $g(P_1, P_2) = 1$ bzw. stets $g(P_1, P_2) = g'(P_1, P_2)$ gilt. Umgekehrt beschreibt jede Funktion $g(P_1, P_2)$ der Tripel g, P_1, P_2, welche diesen Bedingungen genügt, eine Halbebenen-Einteilung.

Als einfache Folgerungen gelten die zu (4) und (5) analogen Regeln:

$$g(P_1, P_1) = 1, \quad g(P_1, P_2) = g(P_2, P_1). \tag{15}$$

$$\text{Aus } g(P_1, P_1') = g(P_2, P_2') \text{ folgt } g(P_1, P_2) = g(P_1', P_2'). \tag{16}$$

Um nun eine Halbgeraden-Einteilung zu einer Halbebenen-Einteilung zu erweitern, setzen wir für die Tripel g, P_1, P_2 fest: Ist l' eine Gerade, welche g schneidet, und sind P_0', P_1', P_2' die Schnittpunkte von l' mit g und den durch P_1, P_2 gehenden Parallelen zu g, so sei

$$g(P_1, P_2) = P_0'(P_1', P_2'); \tag{17}$$

wegen der Invarianz der Halbgeraden-Einteilung gegen Parallelprojektion ist diese Definition von der Wahl der Hilfsgeraden l' unabhängig. Es gelten (13), (14) und die Parallelenbedingung, da auf l' (2), (3) und nach (4) $P_0'(P_1', P_1') = 1$ gilt. Die Gültigkeit der Geradenrelation erkennt man, indem man $l' = l$ wählt.

Umgekehrt induziert jede Halbebenen-Einteilung eine Halbgeraden-Einteilung. Denn bei gegebener Halbebenen-Einteilung kann man für ein Punkttripel P_0, P_1, P_2, wenn g eine von der Geraden $(P_0 P_1)$ verschiedene Gerade durch P_0 ist, definieren:

$$P_0(P_1, P_2) = g(P_1, P_2); \tag{18}$$

wegen der Geradenrelation ist diese Definition von der speziellen Wahl der Geraden g unabhängig. Die Bedingungen (2), (3) folgen aus den entsprechenden

[11]) In der SPERNERschen Terminologie ist dies eine „abgeleitete Ordnungsfunktion erster Stufe"; vgl. SPERNER [1] S. 110, [2] S. 418.

Bedingungen (13), (14). Es bleibt die Invarianz gegen Parallelprojektion zu bestätigen. Hierzu seien P_0, P_1, P_2 und P'_0, P'_1, P'_2 Punkttripel auf zwei verschiedenen Geraden und es mögen P_0, P'_0; P_1, P'_1; P_2, P'_2 auf zueinander parallelen Geraden liegen. Ist dann h_0 die Gerade des gegebenen Parallelenbüschels, die P_0 und P'_0 enthält, so ist nach der Parallelenbedingung oder der ersten Gleichung (15) $h_0(P_1, P'_1) = 1$, $h_0(P_2, P'_2) = 1$; hieraus folgt nach (16) $h_0(P_1, P_2) = h_0(P'_1, P'_2)$ und nach der Definition (18) $P_0(P_1, P_2) = P'_0(P'_1, P'_2)$.

Die geschilderten Prozesse zur Gewinnung einer Halbebenen-Einteilung aus einer Halbgeraden-Einteilung und einer Halbgeraden-Einteilung aus einer Halbebenen-Einteilung sind wieder zueinander invers. Es gilt also:

Satz 2. In einer affinen Ebene induziert jede Halbgeraden-Einteilung eine Halbebenen-Einteilung, und umgekehrt; die Halbgeraden- und Halbebenen-Einteilungen entsprechen sich umkehrbar eindeutig.

Man kann daher allgemeiner von einer *Seiteneinteilung* einer affinen Ebene sprechen und diese entweder als Halbgeraden-Einteilung oder als Halbebenen-Einteilung definiert denken. In dieser Arbeit soll jedoch die erste Auffassung bevorzugt werden.

Ist eine Seiteneinteilung gegeben, so läßt sich auch eine Trennbeziehung definieren: *Das Geradenpaar g'_1, g'_2 trennt das Punktepaar* P_1, P_2, wenn P_1 und P_2 auf verschiedenen Seiten einer der beiden Geraden und auf derselben Seite der anderen Geraden liegen[12]). Sind ferner g'_1, g'_2, g_1, g_2 Geraden eines Büschels ($g'_i \neq g_j$), so sagen wir *das Geradenpaar g'_1, g'_2 trennt das Geradenpaar* g_1, g_2, wenn für zwei Punkte P_1, P_2 von g_1, g_2 gilt, daß das Geradenpaar g'_1, g'_2 das Punktepaar P_1, P_2 trennt. Gilt dies für ein Punktepaar P_1, P_2 von g_1, g_2, so gilt für je zwei vom Büschelzentrum verschiedene Punkte Q_1, Q_2 von g_1, g_2, daß g'_1, g'_2 das Punktepaar Q_1, Q_2 trennt. Denn es gelten die Gleichungen $g'_1(P_1, Q_1) = g'_2(P_1, Q_1)$, $g'_1(P_2, Q_2) = g'_2(P_2, Q_2)$; sie folgen aus der Geradenrelation, wenn das Büschelzentrum eigentlich ist, und aus der Parallelenbedingung, wenn das Büschelzentrum uneigentlich ist. Multipliziert man die vorausgesetzte Gleichung $g'_1(P_1, P_2) = -g'_2(P_1, P_2)$ mit diesen beiden Gleichungen, so ergibt sich auf Grund der Regeln (14), (15) die behauptete Gleichung $g'_1(Q_1, Q_2) = -g'_2(Q_1, Q_2)$.

Faßt man die affine Ebene als ebene Koordinatengeometrie über dem Schiefkörper der Streckenverhältnisse auf und ordnet jedem Punkt $P \equiv (x, y)$ den Koordinatenvektor $\mathfrak{x} = \{x, y\}$ und jeder Geraden $g \equiv [u, v, w]$ eine bestimmte Linearform

$$(19) \qquad L(\mathfrak{x}) = ux + vy + w$$

zu, so kann man jedem Tripel g, P_1, P_2 das Produkt der Linearformen-Werte $L(\mathfrak{x}_1)\, L(\mathfrak{x}_2)$ zuordnen. Andererseits können wir dem Tripel, falls $P_1 \neq P_2$ ist und die Gerade $(P_1 P_2)$ die Gerade g in einem Punkt P_0 schneidet, wenn also für die Koordinatenvektoren eine Beziehung

$$(20) \qquad \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0 = (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)\, a$$

besteht, das Element a zuordnen, und diese Vorschrift noch dadurch ergänzen, daß wir $a = 1$ setzen, falls P_1, P_2 auf einer Parallelen zu g liegen. Aus (20) folgt, wegen $L(\mathfrak{x}_0) = 0$: $L(\mathfrak{x}_2) = L(\mathfrak{x}_1)\, a$, also

$$(21) \qquad L(\mathfrak{x}_1)\, L(\mathfrak{x}_2) = L^2(\mathfrak{x}_1)\, a,$$

[12]) SPERNER [1] S. 110, [2] S. 413.

und diese Gleichung gilt auch, wenn P_1, P_2 auf einer Parallelen zu g liegen. Denken wir uns nun eine Seiteneinteilung und die zugehörige Halbordnung gegeben. Nach Satz 1 und (17) liegen P_1 und P_2 auf der gleichen oder auf verschiedenen Seiten von g, je nachdem a bei der Halbordnung positiv oder negativ ist. Da nun, wie (21) zeigt, $L(\mathfrak{x}_1)\,L(\mathfrak{x}_2)$ und a bei der Halbordnung gleichzeitig positiv bzw. negativ sind, gilt: *Bei einer Seiteneinteilung liegen P_1 und P_2 auf der gleichen oder auf verschiedenen Seiten von g, je nachdem $L(\mathfrak{x}_1)\,L(\mathfrak{x}_2)$ bei der zugehörigen Halbordnung positiv oder negativ ist*[13]. Diese Bedingung ist von der Normierung der Linearform unabhängig.

§ 2. Die Möglichkeit von Halbordnungen und Seiteneinteilungen.

Man kann nun versuchen, über die möglichen Seiteneinteilungen einer affinen Ebene oder über die möglichen Halbordnungen einer Gruppe einen Überblick zu gewinnen. Unter den Seiteneinteilungen einer affinen Ebene gibt es stets die *triviale Seiteneinteilung*, bei der für jedes Punkttripel P_0, P_1, P_2 gilt, daß P_1 und P_2 auf derselben Seite von P_0 liegen, bei der also niemals ein Punkt zwischen zwei anderen liegt. Ihr entspricht die *triviale Halbordnung*, bei der alle Gruppenelemente positiv sind. Es entsteht aber die Frage, welche affinen Ebenen eine echte Seiteneinteilung zulassen bzw. welche Gruppen nichttrivial halbordenbar sind.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe. In $\mathfrak{G}$ bilden die Elemente, die als Produkte von (endlich vielen) Quadraten darstellbar sind, wegen der Identität

$$c\,\Big(\prod_{\nu} a_\nu^2\Big)\,c^{-1} = \prod_{\nu}\,(c\,a_\nu\,c^{-1})^2 \tag{22}$$

eine invariante Untergruppe $\mathfrak{Q}$[14]; ist $\mathfrak{G}$ abelsch, so ist $\mathfrak{Q}$ die Untergruppe der Quadrate. Bei jeder Halbordnung von $\mathfrak{G}$ sind die Elemente von $\mathfrak{Q}$ positiv, und zwei Elemente von $\mathfrak{G}$, die mod $\mathfrak{Q}$ gleich sind, gleichzeitig positiv bzw. negativ. Wir werden daher, um die Halbordnungen von $\mathfrak{G}$ zu untersuchen, zu der *Faktorgruppe*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{G}/\mathfrak{Q} \tag{23}$$

übergehen. $\mathfrak{H}$ ist eine Gruppe von involutorischen Elementen, also abelsch. *Jede Halbordnung von $\mathfrak{G}$ bestimmt eindeutig eine Halbordnung von $\mathfrak{H}$ und umgekehrt.*

Ein Überblick über die möglichen Halbordnungen von $\mathfrak{G}$ ergibt sich nun mit Hilfe der Tatsache, daß $\mathfrak{H}$ als Gruppe von involutorischen Elementen auch für unendliche Ordnung eine Basis besitzt.

Ist $\mathfrak{H}$ eine Gruppe von involutorischen Elementen, so nennen wir eine Menge $\mathfrak{B}$ von Elementen aus $\mathfrak{H}$, die vom Einselement E verschieden sind, eine *Basis*, wenn 1. jedes Element $A \neq E$ aus $\mathfrak{H}$ als Produkt von endlich vielen verschiedenen Elementen aus $\mathfrak{B}$ darstellbar ist, und 2. kein Produkt von

[13]) Vgl. SPERNER [1] S. 125f., [2] S. 417f., [3] S. 143.

[14]) $\mathfrak{Q}$ enthält alle Produkte, in denen jeder Faktor als c oder c^{-1} insgesamt eine gerade Anzahl von Malen auftritt Von dieser Art sind die Kommutatoren $(a, b) = a\,b\,a^{-1}b^{-1}$; sie sind in der Form $(a, b) = a^2\,(a^{-1}\,b)^2\,b^{-2}$ als Produkte von Quadraten darstellbar. Ein beliebiges Produkt der genannten Art kann schrittweise in ein Produkt von Quadraten umgeformt werden: Greift man aus dem gegebenen Produkt das Stück $c\,r\,c'$ heraus, welches mit dem ersten nicht quadratisch auftretenden Faktor c beginnt und mit dem nächsten nicht quadratischen Auftreten von c oder c^{-1} endet (c' bezeichne c oder c^{-1}), so kann durch die Umformung $c\,r\,c' = (c, r)\,r\,c\,c'$ die Anzahl der nicht quadratisch auftretenden Faktoren um 2 vermindert werden.

endlich vielen verschiedenen Elementen aus $\mathfrak{B}$ gleich E, also die nach 1. mögliche Darstellung eines Elementes $A \neq E$ als Produkt von verschiedenen Elementen aus $\mathfrak{B}$ eindeutig ist. Es gilt nun[15]):

Jede Gruppe $\mathfrak{H}$ von involutorischen Elementen, die nicht nur aus dem Einselement besteht, besitzt eine Basis.

Zum Beweis denken wir uns für die Elemente $A \neq E$ von $\mathfrak{H}$ eine Wohlordnung $<$ eingeführt. Für jedes dieser Elemente definieren wir eine Menge $\mathfrak{B}_A$ von Gruppenelementen $\neq E$ durch folgende rekursive Vorschrift: Je nachdem A als Produkt von endlich vielen verschiedenen Elementen aus der Vereinigung aller Mengen $\mathfrak{B}_B$ mit $B < A$ darstellbar ist oder nicht, sei $\mathfrak{B}_A$ gleich der Vereinigung aller Mengen $\mathfrak{B}_B$ mit $B < A$ oder gleich der Vereinigung der Mengen $\mathfrak{B}_B$ mit $B < A$ und der Menge $\{A\}$. Definieren wir dann $\mathfrak{B}$ als die Vereinigung aller Mengen $\mathfrak{B}_A$, so ist $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathfrak{H}$.

Die Halbordnungen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ werden durch die Charaktere von $\mathfrak{H}$ bestimmt[16]). Die Werte eines Charakters von $\mathfrak{H}$ sind festgelegt, wenn die Werte für die Elemente einer Basis $\mathfrak{B}$ gegeben sind. Und jede Zuordnung von Werten $1, -1$ zu den Elementen von $\mathfrak{B}$ definiert einen Charakter von $\mathfrak{H}$ und damit auch eine Halbordnung von $\mathfrak{G}$. Ist U ein beliebiges Element von $\mathfrak{B}$, so gibt es insbesondere einen Charakter, der für U den Wert -1 und für alle anderen Elemente von $\mathfrak{B}$ den Wert 1 hat. Und ist $A \neq E$ ein beliebiges Element von $\mathfrak{H}$, so ordnet jeder Charakter, der für genau eines der A darstellenden Basiselemente den Wert -1 und für alle anderen Elemente von $\mathfrak{B}$ den Wert 1 hat, dem Element A den Wert -1 zu. Daher gibt es, wenn a ein Element aus $\mathfrak{G}$ ist, welches nicht in $\mathfrak{Q}$ liegt, eine Halbordnung von $\mathfrak{G}$, bei der a negativ ist. Wir erhalten also den

Satz 3. In einer Gruppe sind die Produkte von Quadraten und nur sie bei jeder Halbordnung positiv. Eine Gruppe ist also dann und nur dann (nichttrivial) halbordenbar, wenn in ihr nicht jedes Element Produkt von Quadraten ist.

Für abelsche Gruppen kann in diesem Satz „Produkt von Quadraten" durch „Quadrat" ersetzt werden.

Die Mächtigkeit einer Basis ist eindeutig bestimmt, da für jede Basis $\mathfrak{B}$ die Mächtigkeit der endlichen Teilmengen gleich der Ordnung von $\mathfrak{H}$ sein muß.

Ist $\mathfrak{H}$ von endlicher Ordnung, etwa 2^n, so ist auch die Anzahl der Halbordnungen von $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{G}$ gleich 2^n. Ist insbesondere $n = 1$, enthält also $\mathfrak{H}$ nur ein Element $\neq E$, so besitzt $\mathfrak{G}$ genau eine nichttriviale Halbordnung; dies ist z. B. der Fall, wenn $\mathfrak{G}$ die multiplikative Gruppe der reellen Zahlen oder die eines endlichen Körpers von einer Charakteristik $\neq 2$ ist.

Ist $\mathfrak{H}$ von einer transfiniten Ordnung ν, so ist auch die Mächtigkeit der Basis gleich ν, aber die Mächtigkeit der Halbordnungen von $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{G}$ gleich 2^ν. Ist z. B. $\mathfrak{G}$ die multiplikative Gruppe der rationalen Zahlen, so ist die Menge der Quadratklassen (Elemente von $\mathfrak{H}$) abzählbar unendlich und die Menge der Halbordnungen von der Mächtigkeit des Kontinuums[17]).

[15]) Eine Gruppe von involutorischen Elementen kann als ein Modul mit dem Primkörper der Charakteristik 2 als Operatorenbereich aufgefaßt werden. Die Behauptung ist ein Spezialfall des Satzes über die Existenz einer Basis bei Moduln, die einen Körper als Operatorenbereich besitzen; vgl. H. ZASSENHAUS, Lehrbuch der Gruppentheorie I. Leipzig-Berlin 1937, S. 64ff.

[16]) Da $\mathfrak{H}$ eine Gruppe von involutorischen Elementen ist, ist ein Charakter von $\mathfrak{H}$ notwendig ein quadratischer Charakter.

[17]) Die Halbordnungen des rationalen Zahlkörpers sind bereits von SPERNER [1] S. 127, [2] S. 423f. angegeben worden.

Da die quadratischen Charaktere einer Gruppe $\mathfrak{G}$ bei der Verknüpfungsvorschrift der Charaktere

$$\chi_3(a) = \chi_1(a)\,\chi_2(a) \qquad \text{für jedes } a \text{ aus } \mathfrak{G} \tag{24}$$

eine Gruppe bilden, lassen sich entsprechend die Halbordnungen von $\mathfrak{G}$ zu einer Gruppe verknüpfen. Das Produkt zweier Halbordnungen O_1 und O_2 ist diejenige Halbordnung O_3, bei der ein Element a dann und nur dann positiv ist, wenn a entweder bei O_1 und O_2 positiv oder bei O_1 und O_2 negativ ist[18]). In der *Gruppe der Halbordnungen von* $\mathfrak{G}$ ist die triviale Halbordnung von $\mathfrak{G}$ das Einselement und jedes Gruppenelement involutorisch.

Das eineindeutige Entsprechen zwischen den Halbordnungen von $\mathfrak{G}$ und den Halbordnungen von $\mathfrak{H}$ ist ein Isomorphismus der beiden Gruppen von Halbordnungen. Ist $\mathfrak{H}$ von endlicher Ordnung, so ist überdies die Gruppe der Halbordnungen von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{H}$ selbst isomorph, da dann diese beiden Gruppen Gruppen von involutorischen Elementen mit gleicher Ordnung sind. Ist $\mathfrak{H}$ von transfiniter Ordnung, so ist die Gruppe der Halbordnungen von $\mathfrak{G}$ von höherer Mächtigkeit als $\mathfrak{H}$.

Diese Tatsachen über Halbordnungen von Gruppen geben, auf die multiplikative Gruppe der Streckenverhältnisse einer affinen Ebene angewendet (das Streckenverhältnis 0 wird ausgeschlossen), wegen Satz 1 eine Einsicht in die möglichen Seiteneinteilungen. Wir beschränken uns jetzt der Einfachheit halber auf die Betrachtung von affinen Ebenen, in denen der Satz von PASCAL gilt; für diese ergibt sich:

Für ein Punkttripel P_0, P_1, P_2 gilt dann und nur dann, daß P_1 und P_2 bei jeder Seiteneinteilung auf der gleichen Seite von P_0 liegen, wenn das Streckenverhältnis P_0P_2/P_0P_1 ein Quadrat ist. Hat eine affine Ebene die Eigenschaft, daß jedes Streckenverhältnis ein Quadrat ist, so besitzt sie keine echte Seiteneinteilung.

Gilt bei einer Seiteneinteilung für ein bestimmtes Punkttripel P_0, P_1, P_2, daß P_0 zwischen P_1 und P_2 liegt, so gilt das gleiche für alle Punkttripel P'_0, P'_1, P'_2, deren Streckenverhältnis $P'_0P'_2/P'_0P'_1$ zur gleichen Quadratklasse wie das Streckenverhältnis P_0P_2/P_0P_1 gehört. Gibt es in einer affinen Ebene eine Quadratklasse A von Streckenverhältnissen, welche nicht die Einheitsklasse E der Quadrate ist, so gibt es wenigstens eine Halbordnung der multiplikativen Gruppe der Streckenverhältnisse, bei der die Elemente der Klasse A negativ sind; es gibt dann also wenigstens eine Seiteneinteilung der affinen Ebene, bei der für alle Punkttripel P_0, P_1, P_2, deren Streckenverhältnis P_0P_2/P_0P_1 der Quadratklasse A angehört, gilt, daß P_0 zwischen P_1 und P_2 liegt. Die Gesamtheit der Halbordnungen, bei denen die Elemente der Klasse A negativ sind, ist in der Gruppe der Halbordnungen der Streckenverhältnisse die Nebenklasse einer Untergruppe vom Index 2; die Untergruppe wird von den Halbordnungen gebildet, bei denen die Elemente der Klasse A positiv sind.

Die Bedingung, daß P_0P_2/P_0P_1 ein Quadrat ist, läßt sich auch so aussprechen: Es gibt auf der Geraden (P_0P_1) einen Punkt Q und auf einer anderen Geraden durch P_0 Punkte R_1, R_2, so daß $P_1R_1 \parallel QR_2$ und $R_1Q \parallel R_2P_2$ ist (Fig. 1). Wir sagen hierfür: *P_1 und P_2 sind durch einen Parallelenzug (in bezug auf P_0) verbindbar.* In einem solchen Parallelenzug kann einer der beiden Punkte R_1, R_2 außerhalb der Geraden (P_0P_1) beliebig vorgeschrieben

[18]) SPERNER [2] S. 436f.

werden. Die Relation „P_1 und P_2 sind durch einen Parallelenzug (in bezug auf P_0) verbindbar“ ist reflexiv, symmetrisch und, wie man mit Hilfe des PASCALschen Satzes erkennt, auch transitiv. Daß zwei Streckenverhältnisse a und a' zur gleichen Quadratklasse gehören, ist mit folgender Bedingung äquivalent: Wählt man auf einer Geraden Punkte P_0, P_1, P_2, P_2' so, daß $P_0 P_2/P_0 P_1 = a$, $P_0 P_2'/P_0 P_1 = a'$ ist, so sind P_2 und P_2' durch einen Parallelenzug (in bezug auf P_0) verbindbar.

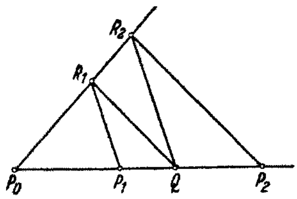

Fig. 1.

§ 3. Seiteneinteilungen in einer euklidischen Ebene.

Wir betrachten nun eine *euklidische Ebene* und verstehen darunter eine affine Ebene, in der die Diagonalen eines Parallelogramms nicht parallel sind (FANO-Axiom) und in der eine *Orthogonalitätsrelation* für die Geraden gegeben ist, die den folgenden Bedingungen genügt:

1. Zu jeder Geraden gibt es wenigstens eine orthogonale;
2. Ist $g \perp h$, so ist $h \perp g$;
3. Ist $g \perp h$, so ist $g \perp h'$ dann und nur dann, wenn $h \parallel h'$ ist;
4. Ist $g \perp h$, so ist $g \neq h$;
5. Die Höhen eines Dreiecks gehen durch einen Punkt.

In einer so erklärten euklidischen Ebene gilt der Satz von PASCAL[19]), und es sei erwähnt, daß in den Forderungen an die Orthogonalität der Höhenschnittpunktsatz durch verschiedene andere „Schnittpunktsätze in Orthogonalität“ ersetzt werden kann[20]).

Wir wollen nun zeigen, daß eine euklidische Ebene stets wenigstens eine echte, durch die Orthogonalität ausgezeichnete Seiteneinteilung besitzt. Hierzu betrachten wir die rechtwinkligen Dreiecke. Ist $P_1 P_2$ die Hypotenuse, P_0 der Höhenfußpunkt, so bezeichnen wir $P_0 P_2/P_0 P_1$ als Streckenverhältnis der Hypotenusenabschnitte und zeigen zunächst:

Die Streckenverhältnisse der Hypotenusenabschnitte aller rechtwinkligen Dreiecke einer euklidischen Ebene gehören zur gleichen Quadratklasse.

Wir betrachten zunächst zwei rechtwinklige Dreiecke $P_1 S P_2$, $P_1' S' P_2'$ mit gleicher Höhe g (Höhen werden als Geraden aufgefaßt) und gemeinsamem Höhenfußpunkt P_0, deren Hypotenusen $P_1 P_2$, $P_1' P_2'$ also auch derselben Geraden l angehören (Fig. 2). Es werde dann S^* auf g und P_2^* auf l so gewählt, daß $P_1 S^* \parallel P_1' S'$, $S^* P_2^* \parallel S' P_2'$ ist. Dann gilt $P_0 P_1'/P_0 P_1 = P_0 P_2'/P_0 P_2^*$, und hieraus folgt auf Grund des PASCALschen Satzes $P_0 P_2'/P_0 P_1' = P_0 P_2^*/P_0 P_1$. Nun

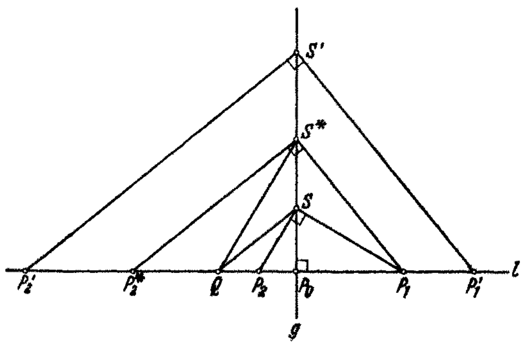

Fig. 2.

---

[19]) F. SCHUR: Grundlagen der Geometrie. Leipzig-Berlin 1909, Nr. 44.
[20]) Vgl. BAER a. a. O., S. 107 ff.

gehören aber $P_0 P_2^*/P_0 P_1$ und $P_0 P_2/P_0 P_1$ zur gleichen Quadratklasse. Wählt man nämlich Q auf l so, daß $P_2 S \parallel QS^*$ ist, so ist $P_2 S Q S^* P_2^*$ ein Parallelenzug, der P_2 und P_2^* verbindet. Denn ist zunächst $Q \neq P_1$, so ist $P_1 S^* Q$ ein Dreieck, von dem zwei Höhen durch S gehen; und nach dem Höhenschnittpunktsatz ist daher auch $SQ \perp S^* P_1$, also $SQ \parallel S^* P_2^*$. Und ist $Q = P_1$, also $P_2 S \parallel P_1 S^*$, so ist bereits $P_2 S P_1 S^* P_2^*$ ein Parallelenzug.

Da zwei rechtwinklige Dreiecke mit parallelen Höhen stets durch eine Parallelverschiebung in die bisher vorausgesetzte spezielle Lage gebracht werden können, gilt die Behauptung für alle rechtwinkligen Dreiecke mit parallelen Höhen, und es genügt nun zu zeigen: Sind g, g' nicht parallele Geraden, so gibt es wenigstens ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe g und wenigstens ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe g', für die die Streckenverhältnisse der Hypotenusenabschnitte gleich sind. Ist $g \perp g'$, P_0 der Schnittpunkt von g, g' und $P_1 S P_2$ ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe g und dem Höhenfußpunkt P_0, so wähle man $P_1' = S$, $S' = P_2$, $P_2' = T$, wobei T der Schnittpunkt von g mit der durch P_2 parallel zu $P_1 S$ gezogenen Geraden ist. Sind g, g' weder parallel noch senkrecht und P_0 ihr Schnittpunkt, so betrachte man ein rechtwinkliges Dreieck $P_1 S P_2$ mit der Höhe g, für welches P_0 der Höhenschnittpunkt und $P_1 S \parallel g'$ ist, und wähle $P_1' = S$, $S' = P_0$, $P_2' = P_2$.

Die Streckenverhältnisse der Hypotenusenabschnitte aller rechtwinkligen Dreiecke gehören also einer *festen Quadratklasse A* an, und es gilt auch umgekehrt: *Gehört das Streckenverhältnis $P_0 P_2/P_0 P_1$ eines Punkttripels zur Quadratklasse A, so gibt es ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $P_1 P_2$ und dem Höhenfußpunkt P_0.* Man errichte hierzu in P_0 das Lot g auf der Geraden l, auf der P_0, P_1, P_2 liegen, und betrachte zunächst irgendein rechtwinkliges Dreieck $P_1 S^* P_2^*$ mit S^* auf g und P_2^* auf l. Das Streckenverhältnis $P_0 P_2^*/P_0 P_1$ gehört dann zur Klasse A, und daher gibt es einen Parallelenzug $P_2^* S^* Q S P_2$ mit Q auf l und S auf g, welcher P_2^* und P_2 verbindet. Man schließt nun umgekehrt wie oben, daß $P_1 S \perp S P_2$ ist, und daher ist $P_1 S P_2$ ein rechtwinkliges Dreieck der gesuchten Art.

Ferner ist die Quadratklasse A von der Einheitsklasse E der Quadrate verschieden. Denn in einem rechtwinkligen Dreieck $P_1 S P_2$ mit dem Höhenfußpunkt P_0 sind P_1 und P_2 nicht durch einen Parallelenzug (in bezug auf P_0) verbindbar. Sonst gäbe es auf $(P_1 P_2)$ einen Punkt Q und auf der Höhe einen Punkt R, so daß $P_1 S \parallel Q R$ und $S Q \parallel R P_2$ wäre. Durch Q würden dann zwei Höhen des Dreiecks $S R P_2$ gehen, und daher müßte nach dem Höhenschnittpunktsatz auch $S Q \perp R P_2$ sein. Es wären also $SQ, R P_2$ sowohl parallel als senkrecht, was ausgeschlossen ist.

Es gibt daher wenigstens eine Seiteneinteilung der euklidischen Ebene, bei der jeweils P_0 zwischen P_1 und P_2 liegt, wenn das Streckenverhältnis $P_0 P_2/P_0 P_1$ der Quadratklasse A angehört. Wir definieren nun: Unter einer *durch die Orthogonalität ausgezeichneten*, kurz *ausgezeichneten Seiteneinteilung* einer euklidischen Ebene verstehen wir eine Seiteneinteilung, bei der stets der Punkt P_0 zwischen den Punkten P_1 und P_2 liegt, wenn P_0 Höhenfußpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $P_1 P_2$ ist. Es gilt dann

Satz 4. Jede euklidische Ebene besitzt wenigstens eine durch die Orthogonalität ausgezeichnete Seiteneinteilung.

Eine ausgezeichnete Seiteneinteilung ist jedenfalls eine echte Seiteneinteilung. Die Halbordnungen, die zu den ausgezeichneten Seiteneinteilungen gehören, sind diejenigen, bei denen die Elemente der Quadratklasse A negativ sind. Hat eine euklidische Ebene die Eigenschaft, daß jedes Streckenverhältnis entweder der Einheitsklasse E oder der Klasse A angehört, so gibt es nur eine solche Halbordnung, also nur eine ausgezeichnete Seiteneinteilung, und bei dieser liegt ein Punkt P_0 auch *nur* dann zwischen zwei Punkten P_1 und P_2, wenn P_0 Höhenfußpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $P_1 P_2$ ist; ein Beispiel ist die gewöhnliche stetige euklidische Ebene. Liegt dieser Fall nicht vor, so gibt es mehr als eine Halbordnung, bei der die Elemente der Klasse A negativ sind (s. S. 296), und bei einer solchen Halbordnung sind dann stets die Elemente mindestens einer weiteren Quadratklasse negativ; es gibt dann mehr als eine ausgezeichnete Seiteneinteilung und bei einer solchen außer den genannten stets weitere Punkttripel, für die die Zwischenbeziehung gilt. Da es jedoch keine von A verschiedene Quadratklasse gibt, deren Elemente bei *jeder* Halbordnung negativ sind, bei der die Elemente von A negativ sind, gilt in jeder euklidischen Ebene: *Nur wenn P_0 Höhenfußpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $P_1 P_2$ ist, liegt P_0 bei jeder ausgezeichneten Seiteneinteilung zwischen P_1 und P_2.*

Als einen metrischen Anordnungssatz, der bei den ausgezeichneten Seiteneinteilungen einer euklidischen Ebene gilt, erwähnen wir:

Bei den ausgezeichneten Seiteneinteilungen, und nur bei diesen, trennen sich die verschiedenen Paare orthogonaler Geraden eines Büschels.

Es seien g_1, g_2; g_1', g_2' zwei verschiedene Paare orthogonaler Geraden eines Büschels mit dem Zentrum S. Wählt man Punkte P_1, P_2 auf g_1, g_2 so, daß ihre Verbindungsgerade zu g_2' parallel ist, so ist $P_1 S P_2$ ein rechtwinkliges Dreieck mit der Höhe g_1', und daher liegen P_1 und P_2 bei den ausgezeichneten Seiteneinteilungen und nur bei diesen auf verschiedenen Seiten von g_1'. Andererseits liegen P_1 und P_2 nach der Parallelenbedingung bei jeder Seiteneinteilung auf derselben Seite von g_2', und daher trennen g_1', g_2' das Punktepaar P_1, P_2 bei den ausgezeichneten Seiteneinteilungen und nur bei diesen. Hieraus folgt die Behauptung.

Von besonderem Interesse sind diejenigen euklidischen Ebenen, in denen ein Quadrat, d. h. ein Rechteck mit orthogonalen Diagonalen, existiert. Gibt es ein Quadrat, so gibt es auch ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der Höhenfußpunkt Mittelpunkt der Hypotenuse und also das Streckenverhältnis der Hypotenusenabschnitte gleich -1 ist. Die Quadratklasse A ist dann also die Quadratklasse der Elemente $-c^2$ $(c \neq 0)$. *Für die euklidischen Ebenen, in denen ein Quadrat existiert, gilt daher: Bei den durch die Orthogonalität ausgezeichneten Seiteneinteilungen, und nur bei diesen, liegt der Mittelpunkt einer Strecke zwischen den Endpunkten.* Die ausgezeichneten Seiteneinteilungen sind dann die „harmonischen"[21]).

Es sei noch kurz darauf eingegangen, wie sich die Überlegungen über die euklidischen Ebenen bei Einführung von Koordinaten darstellen. In einer euklidischen Ebene seien l und g zwei orthogonale Geraden, P_0 ihr Schnittpunkt, $S \neq P_0$ ein Punkt auf g und g_1, g_2; g_1', g_2' zwei Paare orthogonaler Geraden durch S, die l in Punkten P_1, P_2; P_1', P_2' schneiden. Dann ist $P_0 P_1 / P_0 P_1' = P_0 P_2' / P_0 P_2$; denn wird T auf g so gewählt, daß $P_1 S \parallel P_1' T$ ist, so erkennt man wieder mit Hilfe des Höhenschnittpunktsatzes, angewandt

[21]) Sperner [1] S. 128f., [2] S. 441ff.

auf das Dreieck $P_1' T P_2$, daß beide Streckenverhältnisse dem Streckenverhältnis $P_0 S/P_0 T$ gleich sind (Fig. 3). Führt man daher l und g als x- und y-Achse eines Koordinatensystems ein und wählt einen Einheitspunkt auf der x-Achse, so gilt für die Abszissen der Punkte P_1, P_2; P_1', P_2':

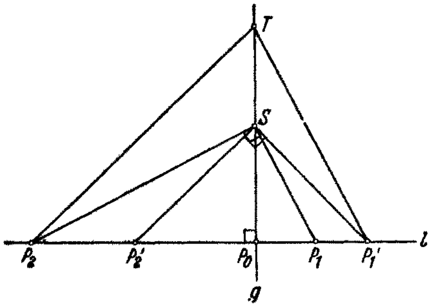

Fig. 3.

(25) $\quad P_0 P_1 \cdot P_0 P_2 = P_0 P_1' \cdot P_0 P_2'$.

Das Produkt der Abszissen, die zwei orthogonale (nicht achsenparallele) Geraden durch S auf der x-Achse ausschneiden, ist also eine Konstante; wir bezeichnen sie mit $-k$. Daher ist auch das Produkt der Richtungskoeffizienten zweier orthogonaler Geraden durch S eine Konstante; sie ist gleich $-\frac{1}{k}$, wenn wir S als Einheitspunkt der y-Achse wählen. Es gilt dann allgemein, daß zwei Geraden $[u_1, v_1, w_1]$, $[u_2, v_2, w_2]$ dann und nur dann orthogonal sind, wenn

$$k\,u_1\,u_2 + v_1\,v_2 = 0 \tag{26}$$

ist. k bezeichnen wir als *Orthogonalitätskonstante*[22]); es ist $-k$ nicht Quadrat, da keine Gerade zu sich selbst orthogonal ist. Existiert in der euklidischen Ebene ein Quadrat (vgl. den vorangehenden Absatz), so kann man, indem man drei Eckpunkte eines Quadrates als Null- und Einheitspunkte des Koordinatensystems wählt, erreichen, daß $k = 1$ wird.

Ist umgekehrt K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$, k ein Körperelement, für welches $-k$ in K nicht ein Quadrat ist, so ist die ebene affine Koordinatengeometrie über K mit der durch (26) definierten Orthogonalität eine euklidische Ebene.

Wird jetzt wieder mit P_0, P_1, P_2 ein beliebiges Punkttripel bezeichnet, so ist P_0 dann und nur dann Höhenfußpunkt eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse $P_1 P_2$, wenn für die Koordinatenvektoren eine Gleichung

$$\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{x}_1 + (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)\,\frac{1}{1 + k c^2} \qquad \text{mit } c \neq 0 \tag{27}$$

besteht, die auch analog zu (20) in der Form

$$\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_0 = (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_0)\,(-k c^2) \qquad \text{mit } c \neq 0 \tag{28}$$

geschrieben werden kann. Die Quadratklasse A der Streckenverhältnisse der Hypotenusenabschnitte der rechtwinkligen Dreiecke ist also die Quadratklasse der Elemente $-kc^2$ $(c \neq 0)$. *Die ausgezeichneten Seiteneinteilungen sind also dadurch gekennzeichnet, daß bei den zugehörigen Halbordnungen $-k$ negativ ist, wo k die Orthogonalitätskonstante ist.*

Um zu zeigen, wie das Rechnen mit Linearformen bei den ausgezeichneten Seiteneinteilungen verwendet werden kann, behandeln wir nochmals den Satz, daß die Paare orthogonaler Geraden sich trennen. Es seien g_1, g_2; g_1', g_2' verschiedene Paare orthogonaler Geraden eines Büschels mit dem Zentrum

[22]) Vgl. Baer a. a. O., S. 109, wo allerdings $-1/k$ als Orthogonalitätskonstante bezeichnet ist.

$S \equiv (x_s, y_s)$, und es sei jetzt $P_1 \equiv (x_1, y_1)$ ein beliebiger Punkt $\neq S$ auf g_1, $P_2 \equiv (x_2, y_2)$ ein beliebiger Punkt $\neq S$ auf g_2. Die Linearformen von g_1', g_2' können wegen der Orthogonalität dieser Geraden in der Form

$$(29)\qquad L_1'(\mathfrak{x}) = u'(x - x_s) + v'(y - y_s),\quad L_2'(\mathfrak{x}) = v'(x - x_s) - ku'(y - y_s)$$

angenommen werden. Da P_1 und P_2 auf orthogonalen Geraden durch S liegen, gilt

$$(30)\qquad (x_1 - x_s)(x_2 - x_s) + k(y_1 - y_s)(y_2 - y_s) = 0.$$

Auf Grund hiervon ergibt sich

$$(31)\qquad L_2'(\mathfrak{x}_1)\, L_2'(\mathfrak{x}_2) = -k\, L_1'(\mathfrak{x}_1)\, L_1'(\mathfrak{x}_2).$$

Von den beiden Ausdrücken $L_1'(\mathfrak{x}_1)\, L_1'(\mathfrak{x}_2)$ und $L_2'(\mathfrak{x}_1)\, L_2'(\mathfrak{x}_2)$ ist daher der eine positiv, der andere negativ genau bei den Halbordnungen, bei denen $-k$ negativ ist. g_1', g_2' trennen also P_1, P_2 genau bei den ausgezeichneten Seiteneinteilungen.

Das Interesse für die hier betrachteten euklidischen Geometrien rührt, wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, aus Untersuchungen über die Begründung der ebenen metrischen Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff her. Man gelangt zu den gleichen Geometrien, wenn man zu dem Axiomensystem der ebenen absoluten Geometrie, welches bei der Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff vorausgesetzt wird, das Euklidische Parallelenaxiom (Zu jeder Geraden gibt es durch jeden nicht auf ihr liegenden Punkt genau eine Nichtschneidende) hinzunimmt[23]). Aus unseren Überlegungen folgt daher, daß jede euklidische Spiegelungsgeometrie wenigstens eine durch die Orthogonalität ausgezeichnete Seiteneinteilung besitzt. Existiert in der Geometrie ein Quadrat, so haben die ausgezeichneten Seiteneinteilungen die Eigenschaft, daß in bezug auf jede Gerade ein Punkt und sein Spiegelpunkt auf verschiedenen Seiten liegen; die Spiegelung an einer Geraden vertauscht dann also die Seiten der Geraden.

---

[23]) Vgl. F. Bachmann: Geometrien mit euklidischer Metrik. Math. Z. **51**, 752 (1949); Math. Nachr. Berlin **1**, 258 (1948).

(Eingegangen am 13. Oktober 1950.)