Math. Annalen, Bd. 123, S. 187—200 (1951).

Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortiger Theorien mittels der üblichen einsortigen Prädikatenlogik.

Von
Arnold Schmidt in Marburg/Lahn.

Inhalt:

§ 1. Einleitende Erläuterung des Problems.

In diesem Paragraphen soll die Fragestellung umrissen werden, ohne daß vorerst die zugrundeliegenden Definitionen und Schlußweisen präzisiert werden. Die genauen Definitionen werden in § 2 und § 3 folgen. Der elementaren Unausweichlichkeit des Problems entsprechend mögen jeweils bloß einige ganz einfache beispielhafte Andeutungen zur ersten Verdeutlichung herangezogen werden.

Bei der Kodifikation des Begriffs-, Urteils- und Beweisbestandes eines exakten Wissensgebietes in der mathematischen Logik läßt sich sowohl im Begriffsnetz wie im Vorrat der Axiome ein allgemein logischer Teil herausschälen, der allen Wissensgebieten (der betreffenden logischen Stufe) gemein ist, und ein hinzukommender Teil, der dem betrachteten Wissensgebiet eigen ist und seine Besonderheit charakterisiert. Der erste Teil — der die Prinzipien des Schließens mitumfaßt — wird gewöhnlich als der Prädikatenkalkul (der betreffenden Stufe) bezeichnet; das ganze sich ergebende Kodifikat der Theorie mit Einschluß des spezifischen Teiles sei demgegenüber eine „Prädikaten*theorie*" genannt. (Ich bediene mich hier des Terminus „Prädikat" in dem einmal in der mathematischen Logik eingebürgerten Sinne; er soll nach dem Vorgange Hilberts auch die mehrstelligen „Relationen" mitumgreifen.) Die „Dinge", von denen das Wissensgebiet handelt, indem es ihnen Eigenschaften und Beziehungen zuerkennt, werden in der zugehörigen Prädikatentheorie durch „Term"-ausdrücke wiedergegeben; diese bestehen entweder in einzelnen Zeichen (für Grunddinge), oder sie bauen sich aus solchen mittels „Funktoren" auf (in der Geometrie etwa: die Punkte und Geraden durch sie bezeichnende Antiqualettern $p, q, \ldots$ bzw. $g, h, \ldots$, das Lot p auf h durch „$Lot\,(p, h)$" usw.). In einer Prädikatentheorie — es soll hier nur von Prädikatentheorien erster Stufe die Rede sein, so daß sich ein Eingehen auf den Begriff der logischen Stufe erübrigt — hat jeder echte Funktor und ebenso jedes Prädikat (bzw. jede Relation) Argumentstellen, die durch Termausdrücke auszufüllen sind. [Ist z. B. etwa die geometrische Relation „p liegt auf h" in der Kodifikation durch „$Inz\,(p, h)$" abgekürzt, so ist $Inz\,(.\,,.)$ ein „zweistelliges Prädikat"; eine mögliche Ausfüllung ist z. B. $Inz\,(p, Lot\,(q, h))$: p liegt auf dem von q auf h gefällten

Lot.] Der übliche Prädikatenkalkul erster Stufe verwendet einheitliche Zeichen, meist kleine Antiqualettern, für alle Termvariablen und gestattet dementsprechend, Formeln zu bilden, indem die Argumentstellen der Prädikate oder Funktoren durch *beliebige* Terme ausgefüllt werden. Demgegenüber handeln die meisten exakten Wissensgebiete von Dingen, die sich in *mehrere* verschiedene Sorten einteilen, die Geometrie von Punkten, Geraden und Ebenen, die Topologie von Zahlen, Punkten, Strecken u. a., usw. Bei der Kodifikation eines solchen Wissensgebietes mit mehreren Grunddingsorten hat man dann dem Begriffsnetz der Prädikatentheorie „Sortenprädikate" beizugeben, die in bestimmter Weise in die Formeln einzuflechten sind. Um möglichst kurz in die Fragestellung einzuführen, will ich mich in der Veranschaulichung weiterhin auf elementarste Beispiele aus der euklidischen Geometrie beschränken. In der Kodifikation der Geometrie sei etwa die zweistellige Relation „h und k treffen sich" (die offenbar aus „*Inz*" logisch definierbar ist[1]) durch „*Trifft* (h, k)" abgekürzt. Da der Prädikatenkalkul nur von *einem* Dingbereich ausgeht, sind weder die Argumentstellen der Prädikate noch die Termvariablen selbst in Sorten unterteilt, und es ist daher in jeder Formel — in Einklang mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauch — überall anzugeben, von welcher Dingsorte jeweils die Rede ist. Das Parallelenaxiom z. B. würde *nicht* mit einer dem üblichen Sprachgebrauch ebenbürtigen Prägnanz wiedergegeben sein in der Formulierung: „Falls nicht *Inz* (p, q), so gibt es genau ein r, für das *Inz* (p, r), nicht aber *Trifft* (q, r) gilt". Hier wären aus der Aussage: „Falls der *Punkt* p nicht auf der *Geraden* q liegt, so gibt es genau eine *Gerade* r, die ..." gerade die Sortenangaben entfallen. Man wird sich vielmehr naturgemäß in der Kodifikation zur Unterscheidung der verschiedenen Dingsorten der „Sortenprädikate" — wie $\mathfrak{P}(p)$ (oder auch $p \in \mathfrak{P}$) für „p ist Punkt" und $\mathfrak{G}(q)$ (oder auch $q \in \mathfrak{G}$) für „q ist Gerade" bedienen und das betreffende Axiom in „sortenbeschränkter" Weise formulieren: „Falls $\mathfrak{P}(p)$ und $\mathfrak{G}(q)$ und nicht *Inz* (p, q) ist, so gibt es genau ein r, für das $\mathfrak{G}(r)$ und *Inz* (p, r), nicht aber *Trifft* (q, r) gilt". Auf die Einzelheiten dieser „Sortenbeschränkung" soll erst in § 2 eingegangen werden; es möge hier nur kurz ihr Kern skizziert werden: in jedem Teile einer Aussage wird die Wendung „für alle x gilt $\mathfrak{A}(x)$" ersetzt durch „für alle x der richtigen Sorte $\mathfrak{S}$ gilt $\mathfrak{A}(x)$ und die Wendung „es gibt x mit $\mathfrak{A}(x)$" ersetzt durch „es gibt x der richtigen Sorte $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{A}(x)$".

Diese „Sortenbeschränkung" entspricht offenbar einer Theorie, der *ein* Dingbereich zugrundeliegt, welcher sich eben in die verschiedenen Sorten unterteilt; in der Geometrie z. B. bestände dieser Dingbereich aus allen Punkten, Geraden und Ebenen; und es ist jedesmal fixiert, von welcher dieser Dingsorten die Rede ist. Für die *Interpretation* ist dabei, wie wir sehen werden, im allgemeinen wichtig, daß die Dingsorten zueinander fremd sind (wie weit diese Voraussetzung auch formal nötig erscheint, wird noch zu diskutieren sein).

Würde man den Formeln diese Beschränkung nicht auferlegen, so würde man ganz gewiß zur Deduktion unsinniger, m. a. W.: nicht interpretierbarer Aussagen gelangen. So würde man z. B. von der in der euklidischen Geometrie richtigen Aussage „Wenn nicht *Trifft* (q, r), so ist *Lot* $(p, q) =$ *Lot* (p, r) durch die (wegen der Einsortigkeit des Prädikatenkalkuls formal erlaubte) Einsetzung von q für die Variable p zu der sinnlosen Behauptung kommen: „Wenn nicht *Trifft* (q, r), so ist *Lot* $(q, q) =$ *Lot* (q, r). In ihr ist vom Lot eines

[1]) Nämlich durch: Es gibt ein l mit *Inz* (l, h) und *Inz* (l, k).

Elements auf sich selbst die Rede; das ist in der euklidischen Geometrie kein sinnvoller Begriff. Die Sortenbeschränkung der gegebenen Aussage „Wenn $\mathfrak{G}$ (q) und $\mathfrak{G}$ (r) und nicht *Trifft* (q, r) und $\mathfrak{P}$ (p), so ist *Lot* $(p, q) =$ *Lot* (p, r)“ verhindert zwar nicht die durch formale Einsetzung entstehende unsinnige Bildung *Lot* (q, q), aber sie hebt die Nichtinterpretierbarkeit explizite im Bau der entstehenden Formel dadurch hervor, daß die verbotene Bedingung „Wenn $\mathfrak{G}$ (q) ... und $\mathfrak{P}$ (q)“ in ihr erscheint.

Während offenbar eine sinnvolle Aussage einer mehrsortigen Theorie in eindeutiger Weise „sortenbeschränkt“ formuliert werden kann, braucht im allgemeinen eine Aussage, in der neben den rein logischen Zeichen lediglich Prädikate (Relationen) und Funktoren einer gegebenen mehrsortigen Theorie auftreten, keineswegs eine vernünftige Sortenbeschränkung zu gestatten. Außer dem oben dafür angegebenen Beispiel sei etwa noch die Aussagen „*Inz* (a, b) und *Inz* (b, c)“ angeführt, bei deren Sortenbeschränkung (im Sinne der geometrischen Interpretation) das b einmal als Punkt, das andere Mal als Gerade einsortiert werden müßte.

Es läßt sich nun eine strukturelle Bedingung für die eindeutige Sortenbeschränkbarkeit angeben; wir wollen eine Formel oder Formelnreihe, die dieser Bedingung genügt, „*sortenrecht*“ nennen. Alle Termzeichen einer gegebenen Formel oder einer gegebenen Formelnreihe mögen genau einer von n Sorten zugeteilt sein. Die Formel bzw. Formelnreihe heißt nun „sortenrecht“, wenn in ihr zwei Termzeichen der *gleichen* Sorte zugeteilt sind, sobald sie

1. *gleich* sind oder

2. entsprechende Argumentstellen gleicher Prädikate (Relationen) oder Funktoren besetzen.

Man könnte natürlich die *Argumentstellen* der Prädikate und Funktoren sortieren und die sortenrechte Ausfüllung verlangen. Ein solcher expliziter Rückgang auf die Sortierung der Argumentstellen ist jedoch für die allgemeine Fragestellung, die dieser Arbeit zu Grunde liegt, unnötig. Wir dürfen allgemein etwa sagen, daß die n-sortige Sortenrechtheit der strukturelle Ausdruck einer n-sortigen Interpretierbarkeit ist. Von vorneherein ist plausibel: eine gegebene Formel (ohne freie Variablen; solche lassen sich ja stets durch Allzeichen binden) kann dann und nur dann einer vernünftigen n-sortigen Sortenbeschränkung unterworfen werden, wenn sie sortenrecht ist. In § 4 wird dies noch genauer zu präzisieren sein.

Ein Wissensgebiet mit mehreren Grunddingen pflegt man nun in solcher Weise zu kodifizieren, daß alle „Eigenaxiome“ der betreffenden Prädikatentheorie *sortenbeschränkt* sind. Man richtet sein Augenmerk weiterhin auf den Beweis sortenbeschränkter Formeln und würdigt umgekehrt nur sortenbeschränkte Formeln einer Rolle als *End*formeln von Beweisen und einer Interpretation. Dabei erlaubt man sich jedoch im übrigen, sich des gesamten einsortigen Apparates der üblichen Prädikatentheorie zu bedienen; dieser aber läßt nicht nur die Bildung beliebiger nicht sortenbeschränkter, ja nicht einmal sortenrechter, d. h. nicht interpretierbarer Formeln zu und vermag sogar solche Formeln zu beweisen, sondern er gestattet darüber hinaus *zum Beweise einer sortenbeschränkten, interpretierbaren Formel durch beliebig lange Reihen nicht-sortenrechter und somit nicht interpretierbarer, d. h. inhaltlich unsinniger Formeln hindurchzugehen.*

Bei den großen methodischen Vorzügen der Einfachheit, Handlichkeit und Allgemeinheit des üblichen einsortigen Prädikatenkalkuls wird man auch zur

Kodifikation der mehrsortigen Theorien an ihm festzuhalten streben, und man wird sich daher vergewissern müssen, ob bzw. unter welchen Nebenbedingungen er dazu geeignet und zulässig sei. D. h. man wird sich die unabweisbare Frage vorzulegen haben, ob eine sortenbeschränkte, formal beweisbare Formel auch stets durch einen interpretierbaren Beweis, d. h. durch einen Beweis aus lauter sortenbeschränkbaren Formeln herleitbar sei.

Diese Frage zerfällt in zwei Teile. Nehme ich zunächst einmal an, es liege mir ein in allen Teilen interpretierbarer, d. h. sortenrechter Beweis bereits vor. Dann ist es nur von mehr oder weniger symboltechnischem Interesse, ob ich die Sortenbeschränkung aller Formeln wirklich durchführe oder nicht. Von der Grundposition der Interpretierbarkeit aller benutzten Formeln aus hat sich bereits HERBRAND[2]) (in einem spezielleren Zusammenhange) mit der Frage der Sortenbeschränkung befaßt und die Äquivalenz eines Kalkuls mit Sortenbeschränkung zu einem solchen ohne sie skizziert. Diese Äquivalenz ist nicht allzu schwer zu erkennen; in § 3 werde ich hierauf noch zurückkommen. Der eigentliche Kern des Problems steckt aber, wie aus dem Vorangegangenen hervorgegangen sein dürfte, nicht hier, sondern in dem Umstand, daß ja durchaus nicht jede im Beweis benutzte Formel im Sinne der verschiedenen Dingsorten sinnvoll interpretierbar zu sein braucht, formal gewendet: daß sie nicht im Sinne der gegebenen Dingsorten sortenrecht zu sein braucht.

Die gestellte Frage geht also auf die folgende Frage zurück, in der nicht mehr von der Sortenbeschränkung selbst, von der wir ausgingen, die Rede ist: *Ist jede in einer einsortigen Prädikatentheorie formal beweisbare, sortenrechte Formel auch sortenrecht, d. h. durch einen Beweis, der in einer sortenrechten Formelnreihe besteht, beweisbar?*

Mit der Bejahung dieser Frage steht und fällt offenbar die Zulässigkeit des üblichen Prädikatenkalkuls zur Kodifikation der Wissensgebiete mit mehreren Grunddingsorten. Denn wenn es sortenrechte, also interpretierbare Formeln gäbe, die im einsortigen Kodifikat beweisbar sind, obwohl sie nicht sortenrecht und mithin nicht durch inhaltliches Schließen hergeleitet werden können, so würde das Kodifikat offenbar unangemessen weit sein. Diese Frage wird nun in ihrer Allgemeinheit durch das übliche Vorgehen der Sortenbeschränkung der Axiome und der Endformeln von Beweisen gar nicht angeschnitten. Die formale Sortenbeschränkung allein leistet eben, da sie ja die Sortenrechtheit zur stillschweigenden Voraussetzung hat, zwar z. B. den (durch ein oben gegebenes Beispiel angedeuteten) Schutz vor einer unerkannten unsinnigen formalen Einsetzung in eine sortenrechte Formel, sie schützt aber keineswegs allgemein vor der deduktiven Heranziehung beliebiger nicht sortenrechter Formeln.

§ 2. Das zugrundeliegende Kodifikat und der Hauptsatz.

Die Frage der Sortenbeschränkung wurde von mir im Anschluß an die HERBRANDschen Untersuchungen bereits in einer Arbeit „Über deduktive Theorien mit mehreren Sorten von Grunddingen“[3]) behandelt; in § 3 wird hierauf noch ausführlicher eingegangen werden. Ich lege hier dasselbe Kodifikat der Prädikatenlogik zu Grunde wie dort, ebenso ist die Definition des Sortenbeschränkungsoperators übernommen. Zur Erleichterung der Lektüre

[2]) Recherches sur la théorie de la démonstration (Thèse Paris). Warschau 1930, Kap. 3, Abschnitt 3.4—3.42, erster Absatz.

[3]) Math. Ann. 115, S. 485—506, im folgenden zitiert als „Th. m. m. S.“.

mögen die wesentlichen Züge der Kodifikation in diesem Paragraphen skizziert werden, so daß die vorliegende Arbeit unabhängig von jener gelesen werden kann.

Skizze der Definition der n-sortigen Prädikatentheorie.

I. Das Begriffsnetz.

Die Zeichen einer n-sortigen Prädikatentheorie teilen sich wie folgt ein:

Termzeichen: Termvariablen ($a, b, c, \ldots$), Funktorzeichen ($\varphi, \psi, \ldots$), Quantablen (auch wohl „gebundene Variablen" genannt, $x, y, \ldots$).

Formelzeichen: Aussagevariablen; Prädikatszeichen.

Verknüpfungszeichen: $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\rightarrow$ (folgt), $\neg$ (nicht), Quantoren, d. s. die Zeichen A (alle) und E (es gibt); runde Klammern und Kommata. Einem Quantor sind ein oder mehrere Indizes beigegeben (die mit Quantablen gestaltlich übereinstimmen).

Die Bildung von Termen und Formeln aus diesen Zeichen geschieht, wie es in der Prädikatenlogik (einschließlich Funktorzeichen) üblich ist, jedoch mit Einschränkung durch eine „Sortenbedingung". Der Formulierung dieser Bedingung sind noch einige Verabredungen voranzustellen.

Verabredungen zur Mitteilung. Zeichen, deren Gestalt freibleibt, werden durch gotische Lettern mitgeteilt (so Termzeichen durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$, Termvariablen auch durch $\mathfrak{v}, \mathfrak{w}$, Quantablen auch durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$). Terme werden wie ihre Anfangszeichen, aber in Fettdruck mitgeteilt. Ebenso werden ganze Formeln und Teilformeln fettgedruckt.

Alle Zeichen, denen irgendwelche Argumentstellen beigegeben sind, und die übrigen Funktorzeichen (falls man argumentstellenlose Funktorzeichen für spezielle Individuen heranziehen will) seien unter dem Namen „Charakterzeichen" zusammengefaßt; Charakterzeichen werden durch $\mathfrak{H}, \mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \ldots$ mitgeteilt.

Jedes Termzeichen wird nun genau einer von n Sorten zugeteilt (wobei Termvariablen und Quantablen aller Sorten vorkommen sollen).

Bei der Bildung von Formeln und Formelmengen ist nun die folgende Sortenbedingung zu beachten:

1. Gleiche Zeichen sind gleichsortiert.

2. Zwei Zeichen, die gleiche Argumentstellen gleicher Charakterzeichen ausfüllen, sind gleichsortiert (man könnte hier offenbar auch von einer Sortierung der Argumentstellen sprechen).

Verabredungen zur Mitteilung. Ein Ausdruck, der aus einer solchen Formel, die die aussagenlogischen Verknüpfungszeichen $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ nicht enthält, nach Wegstreichung eventuell auftretender Quantoren entsteht, heißt Primausdruck, anders ausgedrückt: ein Ausdruck, der aus einem Prädikatszeichen mit durch Termen ausgefüllten Argumentstellen entsteht, indem eventuell einige Termvariablen durch Quantablen ersetzt werden, heißt Primausdruck

Eine Formel ohne freie Termvariablen heißt geschlossen.

II. Das Beweisgerüst.

A. Als „Wahrform" wollen wir jede aus $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ und Aussagevariablen gebildete Form bezeichnen, die bei jeder Bewertung mit „wahr" und „falsch" nach den Regeln der Aussagenlogik stets den Wert „wahr" erhält.

Es sei dann als *Axiom* jede Formel zugelassen, die aus einer Wahrform durch eine Formeleinsetzung hervorgeht. Eine solche läßt sich schematisch kurz so andeuten:

$$\frac{\mathfrak{A}[\mathfrak{V}]}{\mathfrak{A}[\mathfrak{B}]};$$

hier bezeichnet $\mathfrak{V}$ eine Aussagevariable, $\mathfrak{B}$ irgend eine Formel.

Es ist zu beachten, daß die Formeleinsetzung nicht als Schlußschema benutzt wird, sondern lediglich zur Aufstellung der Axiome herangezogen wird. (Innerhalb eines Beweises — s. unten — spielen daher die Aussagevariablen keine andere Rolle als die Prädikatszeichen.)

B. Schlußschematen.

1. Das Schema der *Termeinsetzung*:

$$\frac{\mathfrak{A}[\mathfrak{v}]}{\mathfrak{A}[\mathfrak{a}]}$$

Hier bezeichnet $\mathfrak{v}$ eine Termvariable, $\mathfrak{a}$ einen so wie $\mathfrak{v}$ sortierten Term.

2. Allzeichenlösung und Existenzzeichenlösung:

$$\frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathrm{A}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}[\mathfrak{x}]}{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}[\mathfrak{v}]} \qquad \frac{\mathrm{E}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}[\mathfrak{x}] \rightarrow \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}[\mathfrak{v}] \rightarrow \mathfrak{A}}$$

Hier bezeichnet $\mathfrak{v}$ eine Termvariable, die so sortiert ist wie die Quantable $\mathfrak{x}$.

3. Allzeichenbindung und Existenzzeichenbindung:

$$\frac{\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}[\mathfrak{v}]}{\mathfrak{A} \rightarrow \mathrm{A}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}[\mathfrak{x}]} \qquad \frac{\mathfrak{B}[\mathfrak{v}] \rightarrow \mathfrak{A}}{\mathrm{E}_{\mathfrak{x}}\mathfrak{B}[\mathfrak{x}] \rightarrow \mathfrak{A}}$$

Hier bezeichnet $\mathfrak{x}$ eine Quantable, die so sortiert ist wie die Termvariable $\mathfrak{v}$. Die Teilformel $\mathfrak{A}$ soll die Termvariable $\mathfrak{v}$ nicht enthalten.

4. Grundschlußschema:

$$\frac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$$

Verabredungen zur Mitteilung. Die in den Schlußschematen 1 und 3 mitgeteilten $\mathfrak{v}$ heißen die *Haupt*variablen, die in 2 mitgeteilten $\mathfrak{x}$ heißen Hauptquantablen, und die in der Termeinsetzung 1 mitgeteilten $\mathfrak{a}$ heißen die Einsatzterme.

Eine endliche Formelnfigur, deren Formeln aus Axiomen durch Anwendung der Schlußschematen hervorgehen, heißt ein *Beweis*.

Anmerkung. Eigentlich sind einer speziellen Prädikatentheorie noch gewisse sog. „Eigenaxiome" (ohne freie Variablen) beizugeben. Doch läßt sich von ihnen bei den meisten metamathematischen Problemen — so auch bei der Sortierung — in der üblichen Weise absehen. Ist nämlich $\mathfrak{K}$ die Konjunktion der (als geschlossen vorausgesetzten) Eigenaxiome, $\mathfrak{E}$ eine aus ihnen beweisbare Formel, so ist $\mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{E}$ ohne die Eigenaxiome beweisbar.

Sortenbeschränkung. Zunächst möge das Begriffsnetz einer gegebenen n-sortigen Theorie vorübergehend erweitert werden durch die Aufnahme von „Sortenprädikaten", d. h. von speziellen einstelligen Prädikatszeichen $\mathfrak{S}_i(\cdot)$ [für $i = 1, \ldots, n$]; in die Argumentstelle von $\mathfrak{S}_i(\cdot)$ soll nur ein Term der i-ten Sorte eingesetzt werden dürfen.

Danach läßt sich einer beliebigen Formel $\mathfrak{F}$ aus dem Begriffsnetz, die keine Sortenprädikate enthält, eine „sortenbeschränkte" Formel $\mathrm{P}\,\mathfrak{F}$ zuordnen, und zwar durch den folgenden, induktiv definierten Operator:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,\mathfrak{Q} &=: \mathfrak{Q} \text{ für einen Primausdruck } \mathfrak{Q} \\ \mathrm{P}\,(\neg\,\mathfrak{A}) &=: \neg\,\mathrm{P}\,\mathfrak{A} \\ \mathrm{P}\,(\mathfrak{A} \stackrel{\wedge}{\underset{\rightarrow}{\vee}} \mathfrak{B}) &=: \mathrm{P}\,\mathfrak{A} \stackrel{\wedge}{\underset{\rightarrow}{\vee}} \mathrm{P}\,\mathfrak{B} \\ \mathrm{P}\,\mathrm{A}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{A}\,[\mathfrak{x}] &=: \mathrm{A}_{\mathfrak{x}}\,(\mathfrak{S}_i\,(\mathfrak{x}) \rightarrow \mathrm{P}\,\mathfrak{A}\,[\mathfrak{x}]) \\ \mathrm{P}\,\mathrm{E}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{A}\,[\mathfrak{x}] &=: \mathrm{E}_{\mathfrak{x}}\,(\mathfrak{S}_i\,(\mathfrak{x}) \wedge \mathrm{P}\,\mathfrak{A}\,[\mathfrak{x}]). \end{aligned}$$

Hier soll $\mathfrak{S}_i$ das Zeichen für diejenige Sorte mitteilen, der das $\mathfrak{x}$ im Ausdruck $\mathfrak{A}\,[\mathfrak{x}]$ zugeteilt ist.

Beispiel: Das (schwache) Parallelenaxiom sei in der Gestalt

$$\mathfrak{F} =: \mathrm{A}_{x\underline{u}} \left\{\neg\, J\,(x, \underline{u}) \rightarrow \mathrm{E}_y \left[J\,(y, \underline{u}) \wedge \neg\, \mathrm{E}_{\underline{v}}\, (J\,(x, \underline{v}) \wedge J\,(y, \underline{v}))\right]\right\}$$

gegeben, wobei die Quantablen der 1. Sorte (Geraden) nicht unterstrichen, diejenigen der 2. Sorte (Punkte) unterstrichen sind. Nach Einführung der beiden Sortenzeichen $\mathfrak{G}\,(\cdot)$ [als $\mathfrak{S}_1\,(\cdot)$] und $\mathfrak{P}\,(\cdot)$ [als $\mathfrak{S}_2\,(\cdot)$] hat man die sortenbeschränkte Gestalt

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\,\mathfrak{F} =: \mathrm{A}_{xu} \Big\{\mathfrak{G}\,(x) \rightarrow \mathfrak{P}\,(u) \rightarrow \neg\, J\,(x, u) \rightarrow \mathrm{E}_y \Big[\mathfrak{G}\,(y) \wedge J\,(y, u) \wedge \\ \wedge \neg\, \mathrm{E}_v\,(\mathfrak{P}\,(v) \wedge J\,(x, v) \wedge J\,(y, v))\Big]\Big\}. \end{aligned}$$

Es sei nun eine — noch nicht durch Sortenprädikate erweiterte — n-sortige Prädikatentheorie T_n vorgelegt. Ihr läßt sich eine „*zugehörige*" einsortige *Prädikatentheorie* $\mathrm{T}_1^{(n)}$ wie folgt zuordnen:

1. Man erweitert das Begriffsnetz der gegebenen Theorie T_n durch die Sortenprädikate,

2. man erweitert das Beweisgerüst durch die beiden folgenden Sortenaxiome:

S 1. Für jede Sorte i heißt eine Formel der Gestalt $\mathrm{E}_{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{S}_i\,(\mathfrak{x})$ beweisbar.
S 2. Für jedes Funktorzeichen $\mathfrak{h}$ mit m Argumentstellen heißt eine Formel der Gestalt $\mathrm{A}_{\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_m}\,(\mathfrak{S}\,(\mathfrak{x}_1) \wedge \cdots \wedge \mathfrak{S}\,(\mathfrak{x}_m) \rightarrow \mathfrak{S}\,(\mathfrak{h}\,(\mathfrak{x}_1, \ldots \mathfrak{x}_m)))$ (mit richtigem Sortenindex für jedes $\mathfrak{S}$) beweisbar. [Für ein argumentstellenloses $\mathfrak{h}$ reduziert sich dies auf $\mathfrak{S}\,(\mathfrak{h})$.]

3. man läßt die Sortenbedingung für die Besetzung aller Argumentstellen fallen. Es gilt dann der

Hauptsatz: *Für die Beweisbarkeit einer geschlossenen Formel* $\mathfrak{C}$ *aus dem Begriffsnetz einer gegebenen mehrsortigen Prädikatentheorie* T_n *ist notwendig und hinreichend, daß in der zu* T_n *gehörigen einsortigen Prädikatentheorie* $\mathrm{T}_1^{(n)}$ *die Formel* $\mathrm{P}\,\mathfrak{C}$ *beweisbar ist.*

§ 3. Historische Anmerkungen.

Die *Notwendigkeit* („wenn $\mathfrak{C}$ in T_n beweisbar ist, so ist $\mathrm{P}\,\mathfrak{C}$ in $\mathrm{T}_1^{(n)}$ beweisbar") zeigt man, indem man in der einsortigen Theorie $\mathrm{T}_1^{(n)}$ von einer bewiesenen Formel $\mathfrak{C}$ durch Netzinduktion zu $\mathrm{P}\,\mathfrak{C}$ übergeht. Dieser bereits bei HERBRAND (a. in § 1 ang. O.) skizzierte Übergang wurde in meiner Arbeit Th. m. m. S.[3]) § 4 für das hier betrachtete Kodifikat ausführlich bewiesen. Für das *Hinreichen* („wenn $\mathrm{P}\,\mathfrak{C}$ in $\mathrm{T}_1^{(n)}$ beweisbar ist, so $\mathfrak{C}$ in T_n") findet sich bei

HERBRAND a. a. O. der umgekehrte Beweisansatz, wobei aber, wie bereits in § 1 bemerkt wurde, die Sortierung nicht beachtet ist; es handelt sich dort lediglich um eine Elimination der Sortenzeichen innerhalb der gewöhnlichen einsortigen Theorie $T_1^{(n)}$. Diese Lücke in der HERBRANDschen Überlegung wurde mehrfach festgestellt. — Der jener Überlegung entsprechende Beweisteil ist für das von mir zugrunde gelegte Kodifikat in § 10 von Th. m. m. S. durchgeführt. Durch ihn reduziert sich dann das zum Beweis des Hauptsatzes noch verbleibende Problem auf den Satz von der Sortenrechtheit:

Eine in der mehrsortigen Theorie T_n sortenrechte Formel, die in der zugehörigen einsortigen Theorie $T_1^{(n)}$ herleitbar ist, läßt sich stets auch durch einen in T_n sortenrechten Beweis herleiten.

Der von mir in Th. m. m. S. hierfür gegebene Beweis, der das Hinreichen des im Hauptsatz gegebenen Kriteriums erweist, stellt noch nicht den Begriff der Sortenrechtheit explizite heraus. Der dort gegebene Beweis für das Hinreichen (§§ 7—9) unterliegt außerdem einer Einschränkung, auf die mich seinerzeit Herr P. BERNAYS freundlicherweise hinwies; es muß daselbst für die *Endformel* vorausgesetzt werden, daß in ungleichen Charakterzeichen mit gleichgroßem Argumentbereich keine entsprechenden Argumentstellen durch gleiche Termzeichen besetzt seien. — Im folgenden zeige ich[4]), daß sich diese Einschränkung beseitigen läßt, wobei der Beweis sich außerdem anstelle der beiden ursprünglich in Th. m. m. S. benutzten metamathematischen Relationen ω_1, ω_2 nur noch *einer* derartigen Relation ($\times$) bedient. — Es sei hier bereits bemerkt, daß sich als die angemessenste Kodifikation für derartige metamathematische Probleme heute gewöhnlich eine *aufschichtende* Kodifikation erweist, wie sie, seit GENTZEN in diese Richtung wies, von verschiedenen Autoren angegeben wurde. Ein sehr kurzer Beweis des in Rede stehenden Satzes in einem aufschichtenden Kodifikat soll folgen; in der vorliegenden Arbeit liegt mir zunächst daran zu zeigen, daß auch in dem gewöhnlichen prädikatenlogischen Kodifikat der vollständige Beweis geradlinig geführt werden kann.

§ 4. Der Satz von der Sortenrechtheit.

Der am Schluß des § 2 angegebene Hauptsatz reduziert sich, wie im ersten Absatz des § 3 angedeutet wurde, durch einigermaßen zwangsläufige prädikatenlogische Umformungen auf den „Satz von der Sortenrechtheit"; dieser möge hier zunächst rein strukturell — ohne Bezugnahme auf die Begriffsbildung der „zu T_n gehörigen Theorie $T_1^{(n)}$" — formuliert werden. Hierzu seien einige Definitionen vorangeschickt.

„Gleichgelegen" und „$\equiv$". Zunächst ist klar, wann zwei in gestaltlich übereinstimmenden Formeln bzw. Teilformeln auftretende Zeichen in diesen als „gleichgelegen" zu bezeichnen sind. Diese Relation läßt sich wie folgt verallgemeinern. Ober- und Unterformel eines Termeinsetzungs- oder Quantorschlusses heißen benachbart, ebenso heißen in einem Implikationsschluß $\dfrac{\mathfrak{A} \quad \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{B}}$ die beiden $\mathfrak{A}$ benachbart und die beiden $\mathfrak{B}$ benachbart. Wenn man zunächst von den Termeinsetzungen absieht, so ist klar, wann zwei

[4]) Der in der vorliegenden Arbeit veröffentlichte Beweis stammt aus dem Jahre 1939. Ich trug ihn im Dezember 1946 im Kolloquium der Mathematischen Gesellschaft der Universität Göttingen vor.

in benachbarten Formeln auftretende Zeichen in diesem Formelnpaar „gleichgelegen" heißen sollen. Auch für einen Termeinsetzungsschluß ist diese Bezeichnung evident, sofern das in der Unterformel herausgegriffene Zeichen entweder nicht einem Einsatzterm angehört oder aber das *Anfangs*zeichen eines Einsatztermes ist; nur für diese Fälle soll die Bezeichnung „gleichgelegen" verwendet werden. Daß bei zwei Charakterzeichen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ mit gleichvielen Argumentstellen die ν-ten Stellen durch Terme ausgefüllt sind, die mit den Zeichen $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ beginnen, sei durch „$\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ hinter $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$" mitgeteilt.

Die in einer gegebenen Formel bzw. Formelnreihe $\mathfrak{R}$ auftretenden Termzeichen[5]) seien nun in n Sorten eingeteilt. Diese Einteilung (und somit auch die Formel bzw. Formelnreihe $\mathfrak{R}$) heißt nun „sortenrecht", wenn die folgenden *Bedingungen der Sortenrechtheit* erfüllt sind (wobei die Zuteilung zur gleichen Sorte durch $\approx$ mitgeteilt ist):

Σ 1. Jedes in der Formelnreihe $\mathfrak{R}$ vorkommende Termzeichen[5]) ist in eindeutiger Weise sortiert.

Σ 2. Gleiche Zeichen[5]) sind gleichsortiert, d. h. mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ($\in \mathfrak{R}$) ist $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}$.

Σ 3. Zeichen[5]), die entsprechende Argumentstellen gleicher Charakterzeichen[5]) ausfüllen, sind gleichsortiert, d. h. mit

$$\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b} \text{ hinter } \mathfrak{H}, \mathfrak{K} \ (\in \mathfrak{R}) \text{ und } \mathfrak{H} = \mathfrak{K} \text{ ist } \mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}.$$

Der *Satz von der Sortenrechtheit*, auf den sich der (am Schlusse des § 2) angegebene Hauptsatz reduziert, läßt sich nun (unter Benutzung der Bemerkung betreffs der Eigenaxiome, S. 192, vorletzter Abs.) so aussprechen:

Eine in der einsortigen Prädikatenlogik beweisbare Formel, die — im Sinne irgendeiner Sortierung — sortenrecht ist, läßt sich stets durch einen Beweis herleiten, der eine in diesem Sinne sortenrechte Formelnreihe darstellt.

Mit dem Beweis dieses Satzes ist nach dem Vorangegangenen der Hauptsatz bewiesen.

Die übliche Behandlung mehrsortiger Theorien mittels der einsortigen Prädikatenlogik unter Sortenbeschränkung der Axiome und der Ergebnisse ist dadurch als zulässig und berechtigt erwiesen.

§ 5. Beweis des Satzes von der Sortenrechtheit.

„Verbunden" ($\times$) *und „elementarverbunden".* Für einen Beweis mit der Endformel $\mathfrak{E}$ gelten die folgenden induktiven Festsetzungen über seine Term- und Formelzeichen.

R 1. $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{F}$ gleichgelegen zu $\mathfrak{G}$ in zwei gestaltlich gleichen Primbestandteilen eines Axioms ist[5]).

R 2. $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{F}$ gleichgelegen zu $\mathfrak{G}$ in einem benachbarten Formelnpaar ist und die Zeichen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ beide Charakterzeichen oder beide nicht Charakterzeichen sind. (Durch die letzte Bedingung wird ein Funktorzeichen, das einen Einsatzterm in einer Termeinsetzung beherrscht, von der elementaren Verbundenheit mit der gleichgelegenen Hauptvariablen ausgeschlossen.)

[5]) Mit „Zeichen" ist hier ein *an bestimmtem Platz* der gegebenen Formelnreihe $\mathfrak{R}$ stehendes Zeichen gemeint. Wo man sonst wohl von „einem zweimal auftretenden" Zeichen sprechen würde, empfiehlt es sich hier, von „zwei gestaltlich gleichen" Zeichen zu reden; diese werden *in der Mitteilung* durch *verschiedene* gotische Mitteilungszeichen zu unterscheiden sein, obwohl es sich rein gestaltlich gesehen um *dasselbe* Zeichen handelt. Eine metamathematische Mitteilung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ist in dieser Weise zu verstehen.

R 3. $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{F}$ gleichgelegen zu $\mathfrak{G}$ in zwei Einsatztermen einer Termeinsetzung ist, die unter solche Hauptvariablen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ der Oberformel [mit $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$[5])] eingesetzt sind, für die $\mathfrak{p} \times \mathfrak{q}$ gilt.

R 4. $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ in der Endformel $\mathfrak{E}$.

R 5. $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$, wenn es im Beweise ein Zeichen $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{F} \times \mathfrak{H}$, $\mathfrak{H} \times \mathfrak{G}$ gibt.

R 6. $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$, d. h. „$\mathfrak{F}$ verbunden mit $\mathfrak{G}$" nur gemäß R 1—5.

Zwei Zeichen, die gemäß *einer* der Rechenregeln R 1 bis R 4 allein verbunden sind, heißen „*elementarverbunden*". Wenn zur Feststellung der Verbundenheit zweier Zeichen die Festsetzung R 4 nicht herangezogen zu werden braucht, so heißen die beiden Zeichen auch „engverbunden".

Rang. Die Mindestanzahl *elementarer* Verbundenheiten, die herangezogen werden müssen, um eine Verbundenheit zu erschließen, heiße der *Rang* dieser Beziehung.

Bei Durchgehen der Elementarverbundenheiten erkennt man unmittelbar die Gültigkeit der folgenden Sätze:

Satz 1. Mit $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{G} \times \mathfrak{F}$.

Satz 2. Mit $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$ gilt, wenn $\mathfrak{F}$ Charakterzeichen ist, $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$.

Weiter gilt der

Satz 3. Es sei $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ engverbunden. $\mathfrak{a}$ sei Anfangszeichen eines Terms, der eine Argumentstelle des Charakterzeichens $\mathfrak{H}$ ausfüllt. Dann gibt es ein mit $\mathfrak{H}$ engverbundenes Charakterzeichen $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ hinter $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$.

Nachweis durch Induktion nach dem Range der Verbundenheit.

Für eine elementare Verbundenheit gemäß R 1 oder R 2 ist die Behauptung evident. Der Induktionsschluß ist daher trivial, sobald die „letzte" benötigte elementare Verbundenheit gemäß R 1 oder R 2 besteht. — Die letzte elementare Verbundenheit sei nun eine solche gemäß R 3, d. h. es gebe ein Zeichen $\mathfrak{c}$ derart, daß 1. $\mathfrak{c}$ gleichgelegen zu $\mathfrak{b}$ in Einsatztermen, die für zwei gleiche Variablen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ eingesetzt sind, welche engverbunden von kleinerem Range sind, wobei 2. entweder $\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{a}$ übereinstimmt oder $\mathfrak{a} \times \mathfrak{c}$ engverbunden von kleinerem Range ist. Es genügt, im folgenden den letzteren Fall anzunehmen; der Fall der Übereinstimmung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{c}$ erledigt sich dann offenbar an Hand derselben Überlegung, nur teilweise einfacher. — Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein Charakterzeichen $\mathfrak{L}$, so daß $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{c}$ hinter $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{H} \times \mathfrak{L}$ engverbunden. Falls $\mathfrak{L}$ zum Einsatzterm gehört, so gibt es in dem anderen Einsatzterm ein gleichgelegenes und gleiches Zeichen $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{b}$ hinter $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L} \times \mathfrak{K}$ wegen $\mathfrak{p} \times \mathfrak{q}$. Falls $\mathfrak{L}$ nicht zum Einsatzterm gehört, so gibt es in der Oberformel des betreffenden Termeinsetzungsschlusses ein mit $\mathfrak{L}$ elementar verbundenes Charakterzeichen $\mathfrak{M}$, zu dessen Argumentbereich $\mathfrak{p}$ gehört. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann ein Charakterzeichen $\mathfrak{N}$, so daß $\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{q}$ hinter $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ engverbunden. Zu $\mathfrak{N}$ gibt es in der Unterformel ein elementarverbundenes Charakterzeichen $\mathfrak{K}$. Man hat nun nicht nur $\mathfrak{L} \times \mathfrak{K}$ engverbunden, sondern auch $\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{b}$ hinter $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{K}$. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{c}$ hinter $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{L}$ ergibt sich in jedem Falle: $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ hinter $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H} \times \mathfrak{K}$ engverbunden.

Zerspaltung. Als Zerspaltung eines Beweises B mit der Endformel $\mathfrak{E}$ sei die folgende Ersetzung bezeichnet:

In B seien alle Termvariablen $\mathfrak{v}$ durch Termvariablen $\mathfrak{v}^*$ und alle Quantablen $\mathfrak{x}$ durch Quantablen $\mathfrak{x}^*$ in der Weise ersetzt, daß

1. $\mathfrak{s}^* = \mathfrak{t}^*$ dann und nur dann, wenn $\mathfrak{s} = \mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s} \times \mathfrak{t}$,

2. $\mathfrak{s}^* = \mathfrak{s}$ für alle $\mathfrak{s} \in \mathfrak{E}$

3. $\mathfrak{s}^*$ ein nicht in B vorgekommenes Zeichen ist, wenn kein zu $\mathfrak{s}$ gleiches Zeichen in $\mathfrak{C}$ auftritt.

Diese Forderungen sind gemäß R 4 offenbar miteinander verträglich. Ein Quantor $A_{\mathfrak{x}}$ bzw. $E_{\mathfrak{x}}$, in dessen Bereich die Quantablen durch $\mathfrak{x}_1^*, \ldots, \mathfrak{x}_n^*$ ersetzt sind, werde sodann durch $A_{\mathfrak{x}_1^* \ldots \mathfrak{x}_n^*}$ bzw. $E_{\mathfrak{x}_1^* \ldots \mathfrak{x}_n^*}$ ersetzt. Hierdurch geht jede Formel wieder in eine Formel über.

Satz 4. Ein Beweis geht durch Zerspaltung — nebst geeigneter Ergänzung — in einen Beweis für die nämliche Endformel über.

Nachweis. 1. Ein Axiom geht gemäß R 1 in ein Axiom über.

2. Es sei irgendein Schluß betrachtet. Da gestaltlich verschiedene Zeichen durch gestaltlich verschiedene Zeichen ersetzt werden, läßt sich die Betrachtung der Änderung der Hauptvariablen und -quantablen von der der übrigen Zeichen abtrennen.

Die Ersetzung eines Zeichens, das weder Hauptvariable oder -quantable ist noch dem Einsatzterm einer Termeinsetzung angehört, stört gemäß R 2 den Charakter des betrachteten Schlusses nicht. (Insbesondere geht also ein Implikationsschluß in einen Implikationsschluß über.)

3. Gemäß R 2 sind in einem Quantorschluß zwei Zeichen der Ober- bzw. Unterformel dann und nur dann verbunden, wenn auch die gleichgelegenen Zeichen der Unter- bzw. Oberformel verbunden sind. Daher geht ein solcher Schluß stets entweder direkt in einen gleichartigen oder aber in ein Formelnpaar über, das sich auf triviale Weise zu einer Kette gleichartiger Schlüsse ergänzen läßt; es wird genügen, dies am Beispiel der All-Lösung vorzuführen:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A} \to A_{\mathfrak{x}} \mathfrak{B}[\mathfrak{x}, \mathfrak{x}, \cdot] \\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}[\mathfrak{v}, \mathfrak{v}, \cdot] \end{array} \quad \text{werde in} \quad \begin{array}{l} \mathfrak{A} \to A_{\mathfrak{x}^* \mathfrak{y}^*} \cdot \mathfrak{B}[\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*, \cdot] \\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}[\mathfrak{v}^*, \mathfrak{w}^*, \cdot] \end{array} \quad \text{geändert.}$$

Hier ist mit $\mathfrak{x}^* \neq \mathfrak{y}^*$ auch $\mathfrak{v}^* \neq \mathfrak{w}^*$ (entsprechend in den durch „·" mitgeteilten Stellen).

Man ergänzt zu

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A} \to A_{\mathfrak{x}^* \mathfrak{y}^*} \mathfrak{B}[\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*, \cdot] \\ \mathfrak{A} \to A_{\mathfrak{y}^*} \mathfrak{B}[\mathfrak{v}^*, \mathfrak{y}^*, \cdot] \\ \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}[\mathfrak{v}^*, \mathfrak{w}^*, \cdot]. \end{array}$$

4. Es bleiben also nur die Termeinsetzungen hinsichtlich ihrer Hauptvariablen und Einsatzterme zu betrachten. Bei Änderung von $\begin{array}{l} \mathfrak{A}[\mathfrak{s}, \mathfrak{s}, \cdot] \\ \mathfrak{A}[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \cdot] \end{array}$ in $\begin{array}{l} \mathfrak{A}[\mathfrak{s}^*, \mathfrak{t}^*, \cdot] \\ \mathfrak{A}[\mathfrak{a}^*, \mathfrak{b}^*, \cdot] \end{array}$ hat man wieder eine Termeinsetzung, oder man kann in trivialer Weise zu einer Kette mehrerer Termeinsetzungen ergänzen, *sofern* nicht $\mathfrak{s}^* = \mathfrak{t}^*, \mathfrak{a}^* \neq \mathfrak{b}^*$ (bzw. entsprechend in den durch „·" mitgeteilten Stellen) ist. Aber $\mathfrak{s}^* = \mathfrak{t}^*$ gilt nur bei Verbundenheit der beiden angeführten $\mathfrak{s}$. Dann sind nach R 3 je zwei in den beiden angeführten Einsatztermen gleichgelegene Zeichen miteinander verbunden, also $\mathfrak{a}^* = \mathfrak{b}^*$.

5. Die Endformel bleibt offenbar erhalten.

Verjüngung. In einem Beweise B mögen die Formelnzeichen als Zeichen erster Stufe und die Anfangszeichen solcher Terme, die eine Argumentstelle eines Zeichens m-ter Stufe ausfüllen, als Zeichen $m + 1$-ter Stufe bezeichnet werden. Die höchste in B auftretende Stufe sei M. Als Verjüngung des

Beweises B sei die folgende, aus höchstens M Schritten bestehende Ersetzung bezeichnet.

m-ter Schritt der Verjüngung ($m \leq M$). Alle Charakterzeichen m-ter Stufe, die mit keinem Zeichen der Endformel verbunden sind, seien unter Fortfall ihrer Argumentenbereiche durch ein und dieselbe (genauer: für den m-ten Schritt ein- und dieselbe) nicht in der vorliegenden Beweisfigur aufgetretene Variable ersetzt, und zwar beim ersten Schritt durch eine Formelnvariable, bei allen anderen Schritten durch Termvariablen. Quantoren, in deren Bereich keine zugehörige Quantable mehr auftritt, mögen jeweils samt ihrem Index gestrichen werden. Im Anschluß an diesen Schritt werde der Beweis zerspalten.

Satz 5. Ein Beweis geht durch Verjüngung in einen zerspaltenen Beweis für die nämliche Endformel über.

Nachweis. 1. Wenn ein Zeichen geändert wird, so auch jedes mit ihm verbundene Zeichen, und zwar in ein gleichgestaltetes Zeichen. Wenn weiter bei einem Schritt der Verjüngung ein Zeichen $\mathfrak{F}$ in Fortfall gerät, so stand es im Argumentenbereich eines zu ändernden oder fortfallenden Zeichens $\mathfrak{H}$. Jedes mit $\mathfrak{F}$ engverbundene Zeichen $\mathfrak{G}$ steht nach Satz 3 im Bereiche eines mit $\mathfrak{H}$ engverbundenen Zeichens. $\mathfrak{G}$ gerät also ebenfalls in Fortfall.

2. Daraus ersieht man zunächst unmittelbar: Ein Axiom und ebenso ein Quantorschluß oder ein Implikationsschluß geht durch Verjüngung in ein Axiom bzw. in einen gleichartigen Schluß oder — im Falle eines Quantorschlusses, dessen sämtliche Hauptvariablen von der Verjüngung betroffen werden — in ein Paar gleicher Formeln über; im letzteren Falle darf eine der beiden Formeln aus der Beweisfigur gestrichen werden.

3. Ebenso ersieht man, daß man sich bezüglich der Änderung einer Termeinsetzung auf die Betrachtung der verbleibenden Hauptvariablen und Einsatzterme beschränken kann. Der Übergang

$$\mathfrak{A}\,[\mathfrak{z}, \mathfrak{z}, \cdot\,]$$
$$\mathfrak{A}\,[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \cdot\,]$$

sei von der Verjüngung nicht so betroffen, daß eine der beiden angeführten Hauptvariablen $\mathfrak{z}$ in Fortfall geriete; dann gerät auch von den beiden $\mathfrak{a}$ keines ganz in Fortfall (und umgekehrt). Ein Verjüngungsschritt, der eines der beiden $\mathfrak{z}$ abändert, ist nicht der erste. Da also vor Ausführung eines solchen Verjüngungsschritts der Beweis gemäß der Verjüngungsvorschrift zerspalten wurde, sind die beiden $\mathfrak{z}$ miteinander verbunden — mithin nach R 3 ebenso je zwei gleichgelegene Zeichen der beiden angeführten Einsatzterme $\mathfrak{a}$. Daher kann der Übergang nur in eine Termeinsetzung der Art

$$\mathfrak{A}\,[\mathfrak{z}^*, \mathfrak{z}^*, \cdot\,]$$
$$\mathfrak{A}\,[\mathfrak{a}^*, \mathfrak{a}^*, \cdot\,]$$

geändert sein.

4. Die jedesmalige Zerspaltung ändert an der Verjüngtheit erster bis M-ter Stufe offenbar nichts, da sie keine Charakterzeichen berührt.

Satz 6. Zu jedem Charakterzeichen eines verjüngten Beweises gibt es ein mit ihm verbundenes und ihm gleiches Zeichen in der Endformel.

Dies folgt unmittelbar aus der Verjüngungsvorschrift und Satz 5.

Satz 7. In einem verjüngten Beweis gilt mit $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ auch $\mathfrak{F} \times \mathfrak{G}$.

Für Termvariablen und Quantablen ist dies eine Folge der begleitenden Zerspaltung. Zwei Charakterzeichen $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$ sind nach Satz 6 mit gleichgestalteten Zeichen der Endformel verbunden, die ihrerseits nach R 4 miteinander verbunden sind.

Sortierung.

In einer einsortigen Prädikatentheorie sei die (bei Zugrundelegung von n gegebenen Sorten) sortenrechte Formel $\mathfrak{E}$ durch einen verjüngten Beweis Γ ohne Benutzung von Sortenaxiomen hergeleitet.

$\mathfrak{E}$ soll also die „Sortierungsbedingungen" Σ 1—3 (von S. 195) erfüllen, d. h.

E 1. Jedes Termzeichen von $\mathfrak{E}$ ist in eindeutiger Weise sortiert.

E 2. Mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ ($\in \mathfrak{E}$) ist $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}$.

E 3. Mit $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ hinter gleichen Charakterzeichen ($\in \mathfrak{E}$) ist $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}$.

Die Zeichen der Beweisfigur Γ mögen nun so sortiert (d. h. auf die n gegebenen Sorten verteilt) werden:

E 4. $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}$, wenn $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ zu $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$, wo $\mathfrak{H} \times \mathfrak{K}$.

Satz 8. Die Bedingung Σ 1 ist für die gesamte Beweisfigur Γ erfüllt, d. h. die Sortierung der Termzeichen von Γ ist vollständig und eindeutig.

Nachweis der Vollständigkeit. Zu jedem Termzeichen $\mathfrak{a}$ ($\in \Gamma$) gibt es ein Charakterzeichen $\mathfrak{H}$, hinter dem $\mathfrak{a}$ eine Argumentstelle ausfüllt. Nach Satz 6 gibt es ein Charakterzeichen $\mathfrak{K} \in \mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{H} \times \mathfrak{K}$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}$. Es gibt dann auch ein Zeichen $\mathfrak{b} \in \mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ zu $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$. Nach E 1 und E 4 ist nun $\mathfrak{a}$ sortiert.

Nachweis der Eindeutigkeit. $\mathfrak{a}$ sei auf solche Weise zweifach sortierbar. Es gibt dann $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \in \mathfrak{E}$, so daß $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}_2$ gemäß E 4 unter anderem auf Grund von $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}_2$ hinter verbundenen Zeichen. Wegen der Transitivität der Beziehungen „$\equiv$" und „$\times$" ist $\mathfrak{b}_1 \equiv \mathfrak{b}_2$ hinter verbundenen Zeichen, also nach E 3: $\mathfrak{b}_1 \approx \mathfrak{b}_2$.

Satz 9. Mit $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ ($\in \Gamma$) ist $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}$.

Nachweis durch Induktion nach dem Rang von $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$.

Es gibt das Zeichen $\mathfrak{c}$ derart, daß $\mathfrak{c} \times \mathfrak{b}$ elementarverbunden gemäß einer der Vorschriften R 1 bis R 4 und entweder $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{c}$ übereinstimmend (beim Range 1) oder $\mathfrak{a} \times \mathfrak{c}$ von kleinerem Range (bei einem Range > 1), also $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{c}$ nach Induktionsvoraussetzung. Es bleibt zu zeigen: $\mathfrak{c} \approx \mathfrak{b}$.

1. Sei $\mathfrak{c} \times \mathfrak{b}$ elementar gemäß R 1 oder R 2. Wenn $\mathfrak{c}$ eine Argumentstelle von $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{b}$ eine solche von $\mathfrak{K}$ ausfüllt, so ist dann $\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{b}$ hinter $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{H} \times \mathfrak{K}$, also nach E 4: $\mathfrak{c} \approx \mathfrak{b}$.

2. Sei $\mathfrak{c} \times \mathfrak{b}$ elementar gemäß R 3, d. h. $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$ sind in solchen Einsatztermen der Unterformel einer Termeinsetzung gleichgelegen, welche unter zwei Hauptvariablen $\mathfrak{p} \times \mathfrak{q}$ der Oberformel eingesetzt sind. Dabei ist $\mathfrak{p} \times \mathfrak{q}$ von kleinerem Rang, also nach Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{p} \approx \mathfrak{q}$.

Falls $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ nicht die Anfangszeichen der betreffenden Einsatzterme sind, so gibt es in diesen Einsatztermen die Zeichen $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$ mit $\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{b}$ hinter $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{s}$. Da mit $\mathfrak{p} \times \mathfrak{q}$ nach R 3 auch $\mathfrak{r} \times \mathfrak{s}$ ist, gilt $\mathfrak{c} \approx \mathfrak{b}$ nach E 4.

Wenn aber $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ die Anfangszeichen der Einsatzterme sind, so gibt es in der Oberformel die Charakterzeichen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{L}$ und in der Unterformel die Charakterzeichen $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ derart, daß erstens $\mathfrak{K} \times \mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L} \times \mathfrak{N}$ elementar gemäß R 2 und zweitens $\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{c}$ hinter $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{q} \equiv \mathfrak{b}$ hinter $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{N}$. Nach E 4 ist also $\mathfrak{c} \approx \mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q} \approx \mathfrak{b}$. Dies führt mit $\mathfrak{p} \approx \mathfrak{q}$ auf $\mathfrak{c} \approx \mathfrak{b}$.

3. Sei $\mathfrak{c} \times \mathfrak{b}$ gemäß R 4, d. h. $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$ in $\mathfrak{C}$. Dann ist $\mathfrak{c} \approx \mathfrak{b}$ gemäß E 2.

Satz 10. Die Bedingung Σ 2 ist für die gesamte Beweisfigur Γ erfüllt, d. h. mit $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ $(\in \Gamma)$ ist $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}$.

Dies ist eine Folge der Sätze 7 und 9.

Satz 11. Die Bedingung Σ 3 ist für die gesamte Beweisfigur Γ erfüllt, d. h. mit $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ $(\in \Gamma)$ hinter gleichen Charakterzeichen $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ ist $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{b}$.

Nachweis. Es gibt, wie im Nachweis der Vollständigkeit gezeigt wurde, die Zeichen $\bar{\mathfrak{a}}$, $\bar{\mathfrak{b}}$, $\bar{\mathfrak{H}}$, $\bar{\mathfrak{K}} \in \bar{\mathfrak{C}}$ derart, daß $\mathfrak{H} \times \bar{\mathfrak{H}}$ und $\mathfrak{H} = \bar{\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{K} \times \bar{\mathfrak{K}}$ und $\mathfrak{K} = \bar{\mathfrak{K}}$, weiter $\mathfrak{a} \equiv \bar{\mathfrak{a}}$ hinter $\mathfrak{H}$, $\bar{\mathfrak{H}}$ und $\mathfrak{b} \equiv \bar{\mathfrak{b}}$ hinter $\mathfrak{K}$, $\bar{\mathfrak{K}}$; also auch $\bar{\mathfrak{a}} \equiv \bar{\mathfrak{b}}$ hinter $\bar{\mathfrak{H}}$, $\bar{\mathfrak{K}} \in \mathfrak{C}$. Mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}$ ist $\bar{\mathfrak{H}} = \bar{\mathfrak{K}}$. Gemäß E 3 ist $\bar{\mathfrak{a}} \approx \bar{\mathfrak{b}}$; gemäß E 4 ist $\mathfrak{a} \approx \bar{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{b} \approx \bar{\mathfrak{b}}$.

(Eingegangen am 5. August 1950.)