Sur le théorème de Zorn

par Nicolas Bourbaki à Nancago

On sait que le théorème de Zorn remplace avantageusement le théorème de Zermelo dans la plupart des raisonnements faisant intervenir l'«induction transfinie»; les deux théorèmes sont d'ailleurs équivalents (et équivalents tous deux à l'axiome de choix). A la demande de plusieurs lecteurs de mes *Eléments de Mathématique*[1]), je vais montrer rapidement comment ces deux théorèmes peuvent se déduire de l'axiome de choix et d'un théorème général sur les ensembles ordonnés qui, lui, ne fait pas intervenir cet axiome et dont la démonstration reproduit l'essentiel de la démonstration donnée par Zermelo de son théorème.

Théorème 1. *Soient E un ensemble ordonné, a un élément de E, f une application de E dans E telle que, pour tout $x \in E$, on ait $f(x) \geqslant x$. Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des parties X de E ayant les propriétés suivantes:*

1° *$a \in X$;*

2° *la relation $x \in X$ entraîne $f(x) \in X$;*

3° *si une partie non vide Y de X admet une borne supérieure dans E, cette borne supérieure appartient à X.*

L'ensemble $\mathfrak{F}$ n'est pas vide, l'intersection A des ensembles $X \in \mathfrak{F}$ appartient à $\mathfrak{F}$, et pour tout couple d'éléments x, y de A, on a $y \leqslant x$ ou $y \geqslant f(x)$ (ce qui entraîne que A est *totalement ordonné*).

Il est immédiat que $\mathfrak{F}$ n'est pas vide, car l'ensemble des éléments de E qui sont $\geqslant a$ appartient à $\mathfrak{F}$; on vérifie aussitôt d'autre part que $A \in \mathfrak{F}$. Désignons par B la partie de A formée des éléments $x \in A$ qui possèdent la propriété suivante:

(P): *Les relations $y \in A$ et $y \leqslant x$ entraînent $y = x$ ou $f(y) \leqslant x$.*

L'ensemble B n'est pas vide, car on a évidemment $a \in B$. Nous allons d'abord démontrer que si $x \in B$ et $y \in A$, on a la propriété suivante:

(Q) $y \leqslant x$ *ou* $y \geqslant f(x)$.

En effet, soit x un élément quelconque de B, et soit C la partie de A formée des éléments y pour lesquels la propriété (Q) est vraie; nous allons montrer que l'on a $C \in \mathfrak{F}$; comme $C \subset A$, il résultera de la définition de A que $C = A$. Or:

[1]) Paris (Hermann et Cie), 1939—1950 (dans la collection „*Actualités scientifiques et industrielles*").

1° Comme $a \leqslant x$, on a $a \in C$.

2° Si $y \in C$ et $y \geqslant f(x)$, on a $f(y) \geqslant y \geqslant f(x)$, donc $f(y) \in C$ par définition; dans le cas contraire, on a $y \leqslant x$; d'après (P), on en déduit que $y = x$ (et alors $f(y) = f(x)$), ou que $f(y) \leqslant x$; on voit donc que dans tous les cas $f(y) \in C$.

3° Soit Y une partie de C ayant une borne supérieure b dans E; on a $b \in A$ puisque $A \in \mathfrak{F}$. Si, pour tout $y \in Y$, on a $y \leqslant x$, on en déduit $b \leqslant x$; si au contraire, il existe au moins un $y \in Y$ tel que $y \geqslant f(x)$, on a $b \geqslant f(x)$; dans tous les cas, on a donc $b \in C$.

Nous avons ainsi vérifié que $C \in \mathfrak{F}$, donc que $C = A$, et par suite la propriété (Q) est vérifiée pour $x \in B$ et $y \in A$. Nous allons maintenant prouver que $B = A$, d'où résultera le théorème; comme $B \subset A$, il nous suffira encore de montrer que $B \in \mathfrak{F}$. Or:

1° Nous avons déjà vu que $a \in B$.

2° Si $x \in B$, et si $y \in A$ est tel que $y < f(x)$, on a $y \leqslant x$, d'après la propriété (Q); d'après (P), on a donc $y = x$ ou $f(y) \leqslant x$; dans les deux cas, on en déduit $f(y) \leqslant f(x)$, car on a $x \leqslant f(x)$. On voit donc que dans tous les cas $f(x) \in B$.

3° Soit Y une partie de B ayant une borne supérieure b dans E, qui appartient nécessairement à A. Soit $y \in A$ tel que $y < b$; on ne peut avoir $y \geqslant x$, ni a fortiori $y \geqslant f(x) \geqslant x$ pour *tout* $x \in Y$, car on en déduirait $y \geqslant b$ contrairement à l'hypothèse; d'après (Q), il existe donc au moins un $x \in Y$ tel que $y < x$, et il résulte alors de (P) que $f(y) \leqslant x \leqslant b$; on a donc bien $b \in B$, ce qui achève de prouver que $B \in \mathfrak{F}$; le théorème est ainsi démontré. On notera que la démonstration prouve que a est le *plus petit élément* de A.

Corollaire 1. *Si A admet une borne supérieure b dans E, on a $b \in A$ et $f(b) = b$; réciproquement, s'il existe un élément $b \in A$ tel que $f(b) = b$, b est le plus grand élément de A.*

En effet, si b est borne supérieure de A dans E, on a $b \in A$ d'après la définition de $\mathfrak{F}$; b est donc le plus grand élément de A; comme $f(b) \in A$ et $f(b) \geqslant b$, on a nécessairement $f(b) = b$.

Inversement, si $b \in A$ est tel que $f(b) = b$, soit X la partie de A formée des éléments $x \leqslant b$; nous allons voir que $X \in \mathfrak{F}$, d'où résultera que $X = A$, et par suite que b est le plus grand élément de A. Or:

1° On a évidemment $a \in X$.

2° Si $x \in X$, on a $x \leqslant b$; si $x = b$, $f(x) = f(b) = b$ appartient à X; si au contraire $x < b$, on a $f(x) \leqslant b$ (th. 1), donc dans tous les cas $f(x) \in X$.

3° Si Y est une partie de X admettant une borne supérieure c dans E, on a $c \in A$, et $c \leqslant b$ par définition de X, ce qui achève la démonstration.

On voit donc que si $x \in A$ n'est pas le plus grand élément de A, on a $x < f(x)$; en outre, il n'existe aucun élément $y \in A$ tel que $x < y < f(x)$.

Corollaire 2. *L'ensemble A est bien ordonné.*

Soit B une partie non vide quelconque de A, et C l'ensemble des minorants de B dans A; pour voir que B admet un plus petit élément, il suffit de prouver que C admet une borne supérieure c dans E. En effet, c appartient alors à A, donc à C par définition; tout revient à montrer que $c \in B$. Dans le cas contraire, comme B n'est pas vide, c ne serait pas le plus grand élément de A, donc on aurait $c < f(c)$, et $x \geqslant f(c)$ pour tout $x \in B$, ce qui contredit la définition de c.

Montrons donc que C admet une borne supérieure; nous allons voir que dans le cas contraire, on aurait $C = A$, ce qui contredit l'hypothèse que B n'est pas vide. Il suffit, comme toujours, de montrer que, dans les hypothèses faites, on a $C \in \mathfrak{F}$. Or:

1° On a $a \in C$ par définition.

2° Si $x \in C$, on ne peut avoir $x \in B$ par hypothèse; pour tout $y \in B$ on a donc $x < y$, ce qui entraîne (th. 1) $f(x) \leqslant y$, et par suite on a $f(x) \in C$.

3° Si Y est une partie de C admettant une borne supérieure dans E, cette borne appartient à A, donc, comme elle est majorée par tous les éléments de B, c'est un élément de C.

L'hypothèse entrainerait donc $C = A$, conclusion absurde; par suite le corollaire est démontré.

Il est facile maintenant de démontrer le théorème de Zorn:

Théorème 2. *Soit E un ensemble ordonné inductif* (c'est-à-dire tel que toute partie *totalement ordonnée* de E admette dans E une borne supérieure); *il existe alors dans E un élément maximal.*

En vertu de l'axiome de choix, il existe une application f de E dans E telle que $f(x) = x$ si x est maximal, $f(x) > x$ si x n'est pas maximal. Soit A l'ensemble défini à partir d'un élément $a \in E$ et de f suivant le procédé du th. 1; comme A est totalement ordonné (th. 1), A admet dans E une borne supérieure b par hypothèse; il résulte alors du cor. 1 du th. 1 que $b \in A$ et $f(b) = b$, c'est-à-dire que b est maximal.

En réalité, on peut affaiblir l'hypothèse du th. 2, et démontrer que:

Théorème 3. *Si E est un ensemble ordonné tel que toute partie bien ordonnée de E soit majorée dans E, alors il existe dans E un élément maximal.*

Désignons par $\mathfrak{B}$ l'ensemble des parties B de E qui sont *bien ordonnées*, et considérons dans l'ensemble $\mathfrak{B}$ la relation «X est un segment[2]) de Y»; il est immédiat que c'est une relation d'ordre, que nous noterons $X \leqslant Y$. En outre, muni de cette

[2]) Rappelons que si E est un ensemble bien ordonné, un *segment* S de E est une partie de E telle que les relations $x \in S$, $y \leqslant x$ entraînent $y \in S$. On montre aisément que les segments de E sont E lui-même, et, pour tout $a \in E$, l'ensemble des $x \in E$ tels que $x < a$.

relation, $\mathfrak{B}$ est *inductif*: tout revient à prouver que, si (B_α) est un ensemble totalement ordonné d'éléments de $\mathfrak{B}$, la réunion B des B_α appartient à $\mathfrak{B}$, autrement dit est bien ordonnée: or, si Z est une partie non vide de B, $Z \cap B_\alpha$ n'est pas vide pour un α au moins, donc a un plus petit élément dans B_α, et on voit aussitôt que c'est aussi le plus petit élément de Z dans B.

L'ensemble $\mathfrak{B}$ étant inductif, admet un élément *maximal* X_0; en vertu de l'hypothèse, X_0 admet dans E un majorant b. On a $b \in X_0$; sans quoi, l'ensemble $X_1 = X_0 \cup \{b\}$ serait bien ordonné et X_0 serait un segment de X_1 distinct de X_1, contrairement à la définition de X_0. L'élément b est donc le plus grand élément de X_0; un raisonnement analogue montre que b est *maximal* dans E.

Nous n'insisterons pas sur la façon de déduire directement le théorème de Zermelo du th. 1, puisque c'est en fait le raisonnement même de Zermelo que nous répéterions; rappelons simplement qu'on applique le th. 1 à l'ensemble des parties $\mathfrak{P}(E)$ d'un ensemble quelconque E, muni de la relation d'inclusion; par l'axiome du choix, pour toute partie $X \subset E$ telle que $X \neq E$, on définit un élément $g(X)$ de E tel que $g(X) \notin X$; puis, pour tout $X \subset E$, on pose $f(X) = X \cup \{g(X)\}$ si $X \neq E$ et $f(E) = E$. Il suffit alors d'appliquer à la fonction f et à l'élément a égal à la partie vide de E le th. 1; l'ensemble A qu'on obtient ainsi admet, comme il est facile de le voir, E pour plus grand élément, et l'ensemble des éléments de A distincts de E est en correspondance biunivoque avec E, d'où le théorème de Zermelo.

Il me semble plus instructif de déduire directement le théorème de Zermelo du théorème de Zorn. Considérons l'ensemble $\mathfrak{S}$ des structures d'ordre sur les parties de E (ensemble qui est en correspondance biunivoque avec une certaine partie de $\mathfrak{P}(E \times E)$), et soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble de ces structures d'ordre qui sont des structures d'ensemble *bien ordonné*. Pour toute structure $s \in \mathfrak{B}$, soit A_s la partie de E où est définie s; définissons dans $\mathfrak{B}$ une relation d'ordre $s \leqslant s'$, équivalente à «$A_s \subset A_{s'}$, la structure induite par s' sur A_s est identique à s, et A_s est un segment $A_{s'}$ pour la structure s'». On voit aisément, par le même raisonnement que dans le th. 3, que $\mathfrak{B}$, ainsi ordonné, est *inductif*; soit s_0 un élément maximal de $\mathfrak{B}$. Tout revient à prouver que l'ensemble A_{s_0} est égal à E; or, dans le cas contraire, on définit aussitôt sur l'ensemble composé de A_{s_0} et d'un élément n'appartenant pas à A_{s_0}, une structure d'ensemble bien ordonné s_1 telle que $s_1 > s_0$, ce qui achève la démonstration.

(Eingegangen am 15. 11. 1949)