Periodica Mathematica Hungarica Vol. 1 (2), (1971), pp. 113—119.

ÜBER DIE NEWTONSCHE ZAHL REGULÄRER VIELECKE

von

K. BÖRÖCZKY (Budapest)

§ 1. Einleitung

Wir betrachten auf der Sphäre, in der euklidischen Ebene oder in der hyperbolischen Ebene eine Anordnung von kongruenten disjunkten konvexen beschränkten offenen Punktmengen, kurz eine *Packung* von *Scheiben*. Zwei Scheiben, die einen gemeinsamen Randpunkt haben, werden *Nachbarn* genannt. Die *Newtonsche Zahl* [1] einer Scheibe wird als die Maximalzahl ihrer Nachbarn definiert, die in verschiedenen Packungen auftreten können. Besitzt in einer Scheibenpackung jede Scheibe genau soviel Nachbarn wie ihre Newtonsche Zahl, so sprechen wir von einer *Maximalpackung*. In demselben Sinne sprechen wir von einem *Maximalmosaik* oder auch von einer Maximalpflasterung.

L. Fejes Tóth sprach die Vermutung aus, daß jedes regelmäßige sphärische oder euklidische Mosaik

$$\{p, q\}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\geq\frac{1}{2}, \qquad p, q\geq 2$$

ein Maximalmosaik ist. Er bemerkte ferner, daß unter den hyperbolischen Mosaiken

$$\{p, q\}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}<\frac{1}{2}, \qquad p, q>2$$

nicht alle Maximalmosaike sind, und stellte die Frage ob die Zahl der regulären hyperbolischen Maximalmosaike endlich oder unendlich ist.

In §2 beweisen wir die Richtigkeit der obigen Vermutung für die euklidischen und in §3 für die sphärischen Mosaike. In §4 beschäftigen wir uns mit den hyperbolischen Mosaiken ohne die obige Frage endgültig beantworten zu können.

Die Tatsache, daß die Newtonsche Zahl eines euklidischen Quadrats 8 und folglich $\{4, 4\}$ ein Maximalmosaik ist, war schon früher bekannt [2]. Weitere Resultate, die sich auf die Newtonsche Zahlen gewisser Scheiben beziehen, finden sich in [3] und [4].

Im folgenden bezeichnen wir eine Punktmenge und ihr Maß mit demselben Symbol.

§ 2. Euklidische Vielecke

In der euklidischen Ebene hat FEJES TÓTH die obige Vermutung auf folgende Weise ergänzt: Die Newtonsche Zahl eines regulären n-Ecks beträgt für $n = 3$ 12, für $n = 4$ 8 und für $n \geqq 5$ 6. Wir bestätigen hier diese Vermutung für $n \neq 5$. Die Bestimmung der Newtonschen Zahl eines regulären Fünfecks scheint ein recht schwieriges Problem zu sein, daß bisher noch nicht gelöst wurde.

n = 3

Wir betrachten das Mosaik $\{3, 6\}$ mit der Seitenlänge 2. Eine Fläche F, zusammen mit den 12 Nachbarn von F bilden ein Sechseck. Der innere Parallelbereich dieses Sechsecks im Abstand $\sqrt{3}/2$ ist ein gleichwinkliges Sechseck S, dessen Rand R aus je drei Strecken der Länge 1 und 3 besteht. Es sei F' ein mit F kongruentes Dreieck, das mit F einen gemeinsamen Randpunkt aber keinen gemeinsamen inneren Punkt hat. Wir ordnen zu F' einen zusammenhängenden Teilbogen t von R zu. Ist $F' \cap R$ zusammenhängend, so sei $t = F' \cap R$. Ist $F' \cap R$ nicht zusammenhängend, so besteht $R - F' \cap R$ aus zwei zusammenhängenden Bogen. Ist b der kürzere Bogen, so sei $t = F' \cap R + b$. Est ist klar, daß kein Punkt von b im Inneren eines zu F kongruenten Dreiecks liegt, das weder mit F noch mit F' einen gemeinsamen inneren Punkt, aber mit F einen gemeinsamen Randpunkt besitzt. Deshalb genügt es zu zeigen, daß $t \geqq 1$ ist. Wir unterscheiden verschiedene Fälle.

1. $F \cap F'$ besteht aus einer Strecke.

F' enthält eine Teilstrecke von R der Länge 1 (Fig. 1).

2. $F \cap F'$ ist eine Ecke von F'.

2a. $F' \cap R$ besteht aus einer Strecke oder aus zwei disjunkten Strecken. Offensichtlich ist die Länge einer Strecke $\geqq 1$ (Fig. 2).

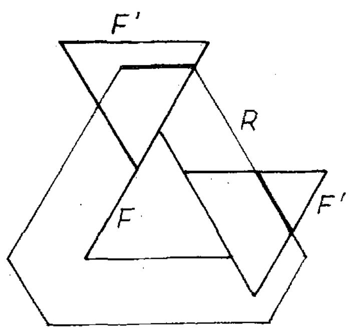

Fig. 1

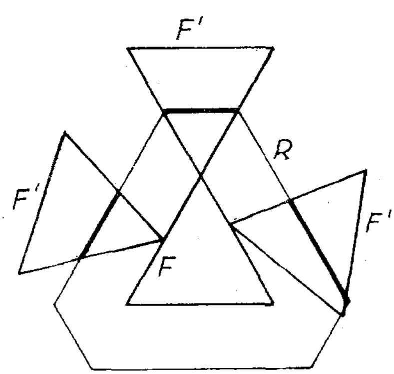

Fig. 2

2b. $F' \cap R$ ist ein (aus zwei Strecken bestehendes) Streckenzug.

2b1. $F \cap F'$ ist eine Ecke von F.

Die Länge von $F' \cap R$ ist offenbar 1.

2b2. $F \cap F'$ ist keine Ecke von F.

Verschieben wir F' so, daß je eine Ecke von F' und F zusammenfällt und die in F' liegende Ecke von R in F' bleibt, dann nimmt die Länge von $F' \cap R$ ab. Dadurch haben wir den Fall 2b2 auf den Fall 2b1 zurückgeführt (Fig. 3).

3. $F \cap F'$ ist eine Ecke von F.

Diese Ecke E sei ein innerer Punkt der Seite AB des Dreiecks $F' = ABC$. M sei der Mittelpunkt der Seite AB.

3a. Die Seite AB hat einen Punkt P mit R gemeinsam.

Wir können voraussetzen, daß P auf der Strecke EB liegt. Verschieben wir F' um den Vektor $\overrightarrow{AE}$, so nimmt t offensichtlich ab und wir gelangen zu dem Fall 2b1 oder 2a (Fig. 4).

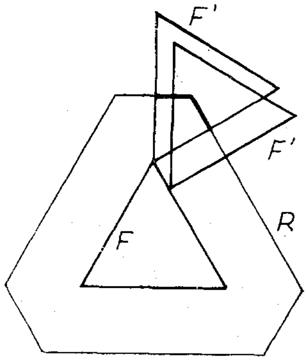

Fig. 3

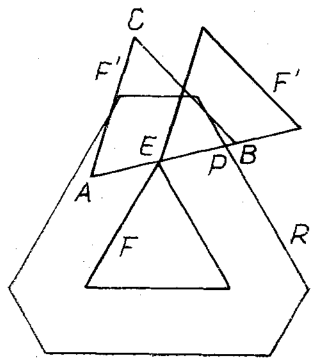

Fig. 4

3b. Die Seite AB hat keinen Punkt mit R gemeinsam.

3b1. $F' \cap R$ ist eine Strecke.

Wir können voraussetzen, daß M auf der Strecke BE liegt. Wir verschieben F' in der Richtung $\overrightarrow{BA}$ bis AC eine Ecke D von R enthält. Dadurch nimmt $F' \cap R$ ab. Es sei GED ein zu F homothetisches Dreieck. Wir betrachten ein dem Dreieck GED umbeschriebenes zu F' homothetisches Dreieck. Da dieses Dreieck kleiner ist als F', enthält F' in der verschobenen Lage die Strecke DG (Fig. 5).

3b2. $F' \cap R$ ist ein Streckenzug.

Wir verschieben F' zu AB parallel so, daß die Länge des genannten Streckenzuges nicht zunimmt, bis entweder der Fall 3b1 eintritt oder M mit

E zusammenfällt. In dem letzten Fall enthält F' eine Ecke D von R, sowie je zwei Strecken der Länge 1/2 von den von D ausgehenden Seiten von R (Fig. 6).

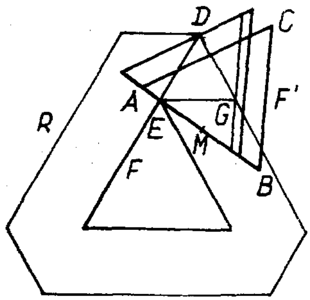

Fig. 5

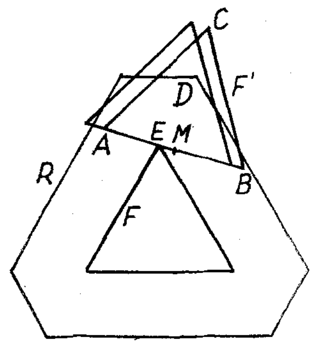

Fig. 6

n = 4

Es sei q ein Quadrat der Seitenlänge 1, Q ein mit q konzentrisches homothetisches Quadrat der Seitenlänge 2, R der Rand von Q und q' ein mit q kongruentes Quadrat, das mit q einen gemeinsamen Randpunkt aber keinen gemeinsamen inneren Punkt hat. Wir behaupten, daß $q' \cap R$ stets eine Strecke oder einen Streckenzug der Länge 1 enthält.

Der Beweis geschiet durch ähnliche Fallunterscheidungen wie beim Dreieck. Die Einzelheiten, die im allgemeinen einfacher sind als bei dem Dreieck, lassen wir dem Leser über.

n = 6

Wir setzen voraus, daß ein reguläres Sechseck S der Seitenlänge 1 7 kongruente Nachbarn $S_1, \ldots, S_7$ hat. Wir zeigen, daß dies unmöglich ist.

Die Mittelpunkte $O_1, \ldots, O_7$ von $S_1, \ldots, S_7$ liegen in einem Ring, der durch die Ränder der äußeren Parallelbereiche von S im Abstand $\sqrt{3}/2$ und 1 begrenzt ist. Wir fallen vom Mittelpunkt O von S Lote auf die Seiten von S. Diese Geraden zerlegen den Ring in 6 kongruente Teile. Dann enthält einer dieser Teile T von $O_1, \ldots, O_7$ mindestens zwei Punkte, etwa O_1 und O_2.

Wir betrachten eine solche Lage von O_1 und O_2 daß sowohl O_1 wie O_2 auf dem »äußeren« Rand von T liegt und außerdem $OO_1 = 1 + \sqrt{3}/2$ und $O_1O_2 = \sqrt{3}$ ausfällt. Setzen wir in dieser Lage $OO_2 = u = 1{,}8726\ldots$, so haben wir in jeder Lage von O_1 und O_2 $OO_1 \leq u$, $OO_2 \leq u$. Hieraus folgt, daß

$$\sphericalangle\, O_1OO_2 \geqq 2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2u} > 55°\, 5'.$$

Ferner gilt wegen $\sqrt{3} \leqq OO_i \leqq 2$ und $O_iO_{i+1} \geqq \sqrt{3}$ $(i = 2, \ldots, 7;\ O_8 = O_1)$

$$\sphericalangle\, O_iOO_{i+1} \geqq 2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{4} > 51^\circ\, 19',$$

was wegen $6 . (51^\circ\, 19') + 55^\circ\, 5' = 362^\circ\, 59' > 360^\circ$ unmöglich ist.

n > 6

Es sei P ein regelmäßiges n-Eck mit dem Mittelpunkt O, Umkreisradius 1 und Inkreisradius $r_n = \cos \pi/n$. Sind O_1 und O_2 die Mittelpunkte von zwei Nachbarn von P, so gilt offensichtlich

$$2r_n \leqq OO_1,\, OO_2 \leqq 2,\quad O_1O_2 \geqq 2r_n.$$

Deshalb erreicht $\sphericalangle\, O_1OO_2$ sein Minimum im Falle $OO_1 = OO_2 = 2$, $O_1O_2 \geqq \geqq 2r_n \geqq 2r_7$. Folglich haben wir

$$\sphericalangle\, O_1OO_2 \geqq 2 \arcsin \frac{r_7}{2} > 53^\circ.$$

Wegen $7 . 53^\circ > 360^\circ$ kann also P höchstens 6 Nachbarn haben.

Nun ist aber die Newtonsche Zahl einer beliebigen Scheibe mindestens 6, wie es am Beispiel der dichtesten Gitterpackung klar ist. Deshalb ist die Newtonsche Zahl eines regulären n-Ecks mit $n > 6$ gleich 6.

§ 3. Sphärische Mosaike

Wir zeigen hier, daß eine Fläche f eines regulären sphärischen Mosaiks is keiner Packung von zu f kongruenten Polygonen mehr Nachbarn haben kann als im regulären Fall.

$\{2, q\}$, $\{p, 2\}$, $\{3, 3\}$

Jetzt ist die Behauptung trivial, weil die Nachbarn einer Fläche zusammen mit der Fläche selbst die Sphäre lückenlos überdecken.

$\{3, 4\}$

Der Durchmesser einer Fläche von $\{3, 4\}$ beträgt $\pi/2$. Der Parallelbereich einer Fläche im Abstand $\pi/2$ wird durch die Fläche und die 6 benachbarten Flächen vollständig ausgefüllt.

$\{3, 5\}$

Der Durchmesser einer Fläche von $\{3, 5\}$ ist

$$a = 2 \arccos \frac{1}{2 \sin 36^\circ} \approx 63^\circ\, 26'.$$

Andererseits beträgt der Inhalt des Parallelbereiches P einer Fläche im Abstand a

$$2\pi + 3a \sin a - \frac{9\pi}{5} \cos a \approx 2\pi + 0{,}4418 < 11 \cdot \frac{\pi}{5},$$

so daß in P nicht 11 kongruente Exemplare einer Fläche Platz haben.

$\{4, 3\}$

Wir setzen voraus, daß eine Fläche von $\{4, 3\}$ mit dem Mittelpunkt O_1, 5 kongruente Nachbarn mit den Mittelpunkten $O_2, \ldots, O_6$ hat. Offensichtlich gilt $O_iO_j \geqq \pi/2$, $i, j = 1, \ldots, 6$, $i \neq j$. Bekanntlich liegen dann $O_1, \ldots, O_6$ in den Ecken von einem Mosaik $\{3, 4\}$, so daß einer der Punkte $O_2, \ldots, O_6$ dem Punkt O_1 diametral gegenüber liegt. Deshalb kann das entsprechende Quadrat die Fläche mit dem Mittelpunkt O_1 nicht berühren.

$\{5, 3\}$

Es sei O der Mittelpunkt, r der Inkreisradius und R der Umkreisradius einer Fläche von $\{5, 3\}$. Ferner seien O_1 und O_2 die Mittelpunkte von zwei kongruenten Nachbarn dieser Fläche. Aus $2r \leqq OO_1, OO_2 \leqq 2R$ und $O_1O_2 \geqq 2r$ folgt leicht, daß das Dreieck OO_1O_2 spitzwinklig ist. Deshalb erreicht $\sphericalangle\, O_1OO_2$ sein Minimum im Falle

$$OO_1 = OO_2 = 2R = 2 \operatorname{arc} \cos \frac{\operatorname{ctg} 36^\circ}{\sqrt{3}} \approx 74^\circ\, 45',$$

$$O_1O_2 = 2r = 2 \operatorname{arc} \cos \frac{1}{2 \sin 36^\circ} \approx 63^\circ\, 26'.$$

Es gilt also

$$\sphericalangle\, O_1OO_2 \geqq 2 \operatorname{arc} \sin \frac{\sin r}{\sin 2R} \approx 66^\circ\, 2' > 60^\circ,$$

so daß eine Fläche höchstens 5 Nachbarn haben kann.

§ 4. Hyperbolische Mosaike

Wir beweisen hier folgenden

SATZ. *Ist $q > 26$ so ist $\{p, q\}$ kein Maximalmosaik.*

BEWEIS. Es sei F eine Fläche von $\{p, q\}$. Wir bezeichnen die Mittelpunkte von drei konsekutiven Seiten von F mit M_1, M_2, M_3. Die Spiegelbilder von F bezüglich M_1, M_2, M_3 seien F_1, F_2, F_3. Wir lassen von den $p(q-2)$ Nachbarn von F_2 die Flächen F_1, F und F_3 weg und zeigen, daß im Winkelbereich $P_1P_2P_3$ vier mit F kongruente p-Ecke Platz haben, die F_2 im Punkt

P_2 berühren. Die Tatsache, daß diese vier neuen p-Ecke mit den gebliebenen $p(q-2)-3$ Nachbarn von F_2 keine gemeinsame Punkte haben, leuchtet ein.

Setzen wir $\sphericalangle P_1P_2P_3 = 2\alpha$, so müssen wir zeigen, daß $\alpha \geqq 4\pi/q$ ist. Wir haben

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\cos\frac{\pi}{p}}{\cos\frac{\pi}{q}} \geqq \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{q}}.$$

Da die Funktion

$$z(x) = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2\cos x} - 4x, \qquad 0 \leqq x < \pi/2$$

wegen

$$z' = \frac{2\sin x}{4\cos x + 1} - 4 < -2 < 0$$

nur eine Nullstelle $x_0 \approx 6° 40'$ hat, und $z(0) > 0$ ist, gilt für $x < x_0$ $z(x) > 0$ Da ferner für $q > 26$ $4\pi/q < x_0$ ist, haben wir

$$\alpha - \frac{4\pi}{q} \geqq z\left(\frac{4\pi}{q}\right) > 0,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Es sei bemerkt, daß der obige Satz im Falle $p > 3$ schon für kleinere Werte von q richtig ist. Ist z. B. $p \geqq 16$, so gilt der Satz für alle Werte von $q \geqq 16$.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] L. Fejes Tóth, Remarks on a theorem of R. M. Robinson, *Studia Sci. Math. Hung.* **4** (1969), 441–445.

[2] D. O. Schklarsky, N. N. Tschenzoff und I. M. Jaglom, *Ausgewählte Aufgaben und Sätze von Elementarmathematik, 2. Teil, Geometrie*, Moskwa, 1952. (Russisch).

[3] L. Fejes Tóth, On the number of equal discs that can touch another of the same kind, *Studia Sci. Math. Hung.* **2** (1967), 363–367.

[4] J. Schopp, Über die Newtonsche Zahl von Scheiben konstanter Breite, *Studia Sci. Math. Hung.* (Im Druck).

(Eingegangen am 26. Februar 1970.)

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM,
GEOMETRIAI TANSZÉK,
BUDAPEST, VIII., MÚZEUM KRT. 6–8.
HUNGARY