Periodica Mathematica Hungarica Vol. 1, (3), (1971), pp. 221–227.

BEMERKUNGEN ÜBER DIE f-SEMIPRIMELEMENTE DER NEGATIV GEORDNETEN vf-VERBÄNDE

von

O. STEINFELD (Budapest)

§ 1.

Es sei L eine algebraische Struktur mit den folgenden Eigenschaften:

(α) eine Operation f mit n ($\geqq 2$) Variablen ist in L definiert;

(β) L ist ein vollständiger Verband bezüglich einer teilweisen Ordnung $\leqq$, und die Verbandsoperationen sind durch $\wedge$ und $\vee$ bezeichnet;

(γ) f ist isoton in jeder Variablen und ganz L ist sein Monotoniebereich.

In der Arbeit [3] haben wir eine algebraische Struktur L mit den Eigenschaften (α), (β), (γ) einen *vf-Verband* genannt. L wird hier immer einen vf-Verband bezeichnen.

Der vf-Verband L heißt *f-negativ geordnet*, wenn für alle $a_1, \ldots, a_n \in L$ die Bedingung

$$f(a_1, \ldots, a_n) \leqq \bigwedge_{i=1}^{n} a_i \qquad (a_i \in L;\ i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

gilt.

Ein Element p eines f-negativ geordneten vf-Verbandes L nennen wir *f-prim*, wenn aus der Bedingung

$$f'(a_1, \ldots, a_k) \leqq p \qquad\qquad (a_1, \ldots, a_k \in L)$$

jeweils $a_i \leqq p$ für mindestens ein i folgt, wo f' eine aus f durch Iteration gebildete Operation von L ist.

Das Element s des f-negativ geordneten vf-Verbandes L heißt *f-semiprim*, wenn aus $f'(a, \ldots, a) \leqq s$ ($a \in L$) stets $a \leqq s$ folgt, wo f' eine aus f durch Iteration gebildete Operation von L bezeichnet.

In der Arbeit [3] haben wir einige Resultate über die f-Primelemente und f-Semiprimelemente bewiesen. Das Ziel dieser Note ist, einen falschen Satz[1] meiner Arbeit [3] zu berichtigen und andere Bemerkungen über die f-Semiprimelemente bekanntzumachen.

[1] Noch im Jahre 1969 machte mich Herr Professor L. FUCHS in einem Brief auf ein einfaches Beispiel aufmerksam, welches zeigte, daß Satz 2.5 meiner Arbeit [3] ungültig ist. Später im Jahre 1970 bekam ich von Herrn Dr. Klaus KEIMEL das Manuskript seiner Arbeit [2], in dem er u.a. ein Gegenbeispiel bezüglich der Behauptung des Satzes 2.5 gab.

§ 2.

Wir sagen, daß der vf-Verband L *f-verbandsgeordnet* (*vf-verbandsgeordnet*) ist, wenn in L die *endliche* Distributivitätsregel

$$(2.1)\quad f(x_1, \ldots, x_i^{(1)} \vee x_i^{(2)}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_i^{(1)}, \ldots, x_n) \vee f(x_1, \ldots, x_i^{(2)}, \ldots, x_n)$$

(die *unendliche* Distributivitätsregel

$$(2.1')\qquad f(x_1, \ldots, \bigvee_\lambda x_i^{(\lambda)}, \ldots, x_n) = \bigvee_\lambda f(x_1, \ldots, x_i^{(\lambda)}, \ldots, x_n))$$

gültig ist.

Ist f eine binäre Operation, so bildet der vf-Verband L ein *Gruppoid* bezüglich der Operation f. Statt »f-negativ geordnet«, »f-Primelement«, »f-Semiprimelement« sagt man in diesem Falle »negativ geordnet«, »Primelement«, »Semiprimelement«.

Ein *Verbandsgruppoid* (ein *vollständiges Verbandsgruppoid*) ist als ein Gruppoid C definiert, das gleichzeitig ein Verband (ein vollständiger Verband) ist, und in dem die endlichen Distributivitätsregeln

$$(a \vee b)\, c = ac \vee bc, \quad c(a \vee b) = ca \vee cb \quad (a, b, c \in C)$$

(die unendlichen Distributivitätsregeln

$$a(\bigvee_\gamma b_\gamma) = \bigvee_\gamma (ab_\gamma), \quad (\bigvee_\gamma b_\gamma)\, a = \bigvee_\gamma (b_\gamma a) \quad (a, b_\gamma \in C))$$

erfüllt sind.

Die f-verbandsgeordneten (vf-verbandsgeordneten) vf-Verbände sind also Verallgemeinerungen der bekannten Begriffe der Verbandsgruppoide (der vollständigen Verbandsgruppoide).

§ 3.

Ein Element k eines vollständigen Verbandes V nennt man *kompakt*, wenn jede Ungleichung $k \leqq \bigvee_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda$ $(a_\lambda \in V)$ die Existenz einer *endlichen* Teilmenge $\Lambda' \subseteqq \Lambda$ mit $k \leqq \bigvee_{\lambda' \in \Lambda'} a_{\lambda'}$, impliziert. Der vollständige Verband V heißt *algebraisch*, wenn jedes Element von V als eine Vereinigung von kompakten Elementen von V darstellbar ist.

Wir nennen einen vf-Verband L *algebraisch*, wenn L als vollständiger Verband algebraisch ist. Die Menge K aller kompakten Elementen von L ist ein vf-Halbverband mit Nullelement O.

Das folgende Ergebnis ist eine Verallgemeinerung des Satzes A^2 der Arbeit [2] und eine Berichtigung unseres Satzes 2.5 aus [3].

SATZ 3.1. *Es sei L ein f-negativ, f-verbandsgeordneter und algebraischer vf-Verband. Ein Element s von L ist dann und nur dann f-semiprim, wenn $s = \bigwedge_\alpha p_\alpha$ gilt, wo die p_α alle f-Primelemente von L mit $s \leqq p_\alpha$ durchlaufen.*

BEWEIS. Gilt $s = \bigwedge_\alpha p_\alpha$, so ist s offenbar ein f-Semiprimelement von L.

Es sei das Element $s (\in L)$ f-semiprim. Für den Durchschnitt $u = \bigwedge_\alpha p_\alpha$ der f-Primelemente p_α mit $s \leqq p_\alpha$ besteht offenbar $s \leqq u$. Da L algebraisch ist, läßt sich das Element u in der Form $u = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} k_\lambda$ darstellen, wo die $k_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ kompakte Elemente von L sind.

Im Widerspruch zu unserer Behauptung setzen wir voraus, daß $s < u$ gilt. Dann existiert ein kompaktes Element k_1 $(1 \in \Lambda)$ mit den Eigenschaften $k_1 \leqq u$ und $k_1 \nleqq s$. (Wenn für alle k_λ $(\lambda \in \Lambda)$ die Ungleichungen $k_\lambda \leqq s$ gültig wären, so wäre die Voraussetzung $s < u$ unmöglich.) Aus den Voraussetzungen bekommt man $f(k_1, \ldots, k_1) \leqq k_1 \leqq u$ und $f(k_1, \ldots, k_1) \nleqq s$. Da L algebraisch ist, kann man das Element $f(k_1, \ldots, k_1)$ als eine Vereinigung von kompakten Elementen darstellen. Unter diesen existiert mindestens ein k_2 $(\in K)$ mit den Eigenschaften $k_2 \leqq f(k_1, \ldots, k_1)$ und $k_2 \nleqq s$. Für das Element $f(k_2, \ldots, k_2)$ existiert ein kompaktes Element k_3 mit $k_3 \leqq f(k_2, \ldots, k_2)$ und $k_3 \nleqq s$. Man kann diese Konstruktionsmethode der Elemente k_1, k_2, k_3 durch vollständige Induktion weiterführen. Die Menge $Q = (k_1, k_2, k_3, \ldots, k_i, \ldots)$ hat die Eigenschaft[3]

$$[O, s] \cap Q = \emptyset . \tag{3.1}$$

Bezeichnet man mit $[O, x]_K$ $(x \in L)$ den Durchschnitt $[O, x] \cap K$, so durchlaufen die $[O, x]_K$ $(x \in L)$ alle Ideale des Halbverbandes K; ihre Menge bildet einen zu L isomorphen, algebraischen Verband. (Siehe G. GRÄTZER und E. T. SCHMIDT [1].) Da $Q \subseteqq K$ gilt, ist Bedingung (3.1) mit

$$[O, s]_K \cap Q = [O, s] \cap K \cap Q = \emptyset \tag{3.2}$$

äquivalent. Jetzt kann man das Zornsche Lemma anwenden[4]. So existiert ein Element m in L, welches bezüglich der Eigenschaften $s \leqq m$ und $[O, m] \cap$

[2] In diesem Satz hat KEIMEL bewiesen, daß jedes Semiprimelement s eines negativ geordneten, algebraischen Verbandsgruppoid V der Durchschnitt aller Primelemente p_α von V mit $s \leqq p_\alpha$ ist.

[3] Die Konstruktionsmethode der Menge Q stammt von KEIMEL [2] für binäre Operationen f.

[4] Da die Menge X aller Intervalle $[O, x]$ $(x \in V)$ eines vollständigen Verbandes V im allgemeinen kein induktives Hüllensystem bildet, ist das Zornsche Lemma unmittelbar für X nicht anwendbar. Es ist nicht schwer zu zeigen, daß X dann und nur dann induktiv ist, wenn jedes Element von V kompakt ist.

$\cap Q = \emptyset$ maximal ist. Wir zeigen, daß das Element m ein f-Primelement von L sein muß.

Wenn m kein f-Primelement wäre, so gäbe es eine aus f durch Iteration gebildete Operation f^* mit den Eigenschaften

$$f^*(a_1, a_2, \ldots, a_r) \leqq m \text{ und } a_j \nleqq m \text{ für jedes } j = 1, 2, \ldots, r. \tag{3.3}$$

Wegen der Definition des Elementes m und wegen $s \leqq m < m \vee a_j$ ($j = 1, 2, \ldots, r$) bekäme man daraus die Existenz der Elemente $k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_r} \in Q$ mit

$$k_{i_j} \in Q \cap [O, m \vee a_j] \qquad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{3.4}$$

(3.3) und (3.4) hätten die folgenden Ungleichungen

$$\begin{aligned} &f^*(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_r}) \leqq f^*(m \vee a_1, m \vee a_2, \ldots, m \vee a_r) = \\ &= f^*(m, m, \ldots, m) \vee f^*(a_1, m, \ldots, m) \vee \\ &\vee f^*(m, a_2, m, \ldots, m) \vee \ldots \vee f^*(a_1, a_2, m, \ldots, m) \vee \\ &\vee \ldots \vee f^*(a_1, a_2, \ldots, a_r) \leqq m \end{aligned} \tag{3.5}$$

zur Folge.

Nach der Definition der Menge Q bilden die Elemente von Q eine Kette $k_1 \geqq k_2 \geqq k_3 \geqq \ldots \geqq k_i \geqq k_{i+1} \geqq \ldots$ mit der Eigenschaft $f(k_i, k_i, \ldots, k_i) \geqq \geqq k_{i+1}$. Wenn i_h die größte Zahl unter den Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_r$ bezeichnet, so besteht wegen der Isotonie der Operation f

$$f^*(k_{i_h}, k_{i_h}, \ldots, k_{i_h}) \leqq f^*(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_r}). \tag{3.6}$$

Da f^* eine aus f durch Iteration gebildete Operation ist, muß Q ein Element k_z mit der Eigenschaft

$$k_z \leqq f^*(k_{i_h}, k_{i_h}, \ldots, k_{i_h}) \tag{3.7}$$

enthalten.

Wegen der Ungleichungen (3.5), (3.6) und (3.7) bestände

$$k_z \leqq f^*(k_{i_h}, \ldots, k_{i_h}) \leqq f^*(k_{i_1}, k_{i_2}, \ldots, k_{i_r}) \leqq m,$$

was unserer Voraussetzung $Q \cap [O, m] = \emptyset$ widerspräche. Damit ist bewiesen, daß m ein *f-Primelement* mit den Eigenschaften $s \leqq m$ und $(k_1 \leqq)\ u \nleqq m$ ist. Das ist aber wegen der Definition des Elementes u unmöglich, folglich kann unsere Voraussetzung $s < u$ nicht bestehen.

Damit ist der Beweis des Satzes 3.1 beendet.

§ 4.

Zum Beweis des Satzes 3.4 und Korollars 3.5 unserer Arbeit [3] benützten wir den Satz 2.5. Diese Ergebnisse werden richtig, wenn man die gegebenen Voraussetzungen dadurch ergänzt, daß L auch ein *algebraischer* vf-Verband sein soll.

Bekanntlich bildet die Menge aller Ideale (aller Normalteiler) eines assoziativen Ringes (einer Gruppe) einen algebraischen Verband bezüglich des mengentheoretischen Enthaltenseins. So lassen sich die berichtigten Sätze 2.5 und 3.4 und das berichtigte Korollar 3.5 der Arbeit [3] für diese Spezialfälle anwenden.

§ 5.

In der Arbeit [3] haben wir den Satz 2.5 auch zum Beweis des Satzes 2.7 angewendet. Jetzt beweisen wir diesen Satz ohne Anwendung des Satzes 2.5 durch eine direkte Methode.

Der Vollständigkeitshalber wiederholen wir die nützlichen Begriffe und Ergebnisse.

Es sei L ein f-negativ geordneter vf-Verband. Dann ist das abgeschlossene Intervall $[O, a] = A$ für jedes Element a von L ein f-negativ geordneter vf-Teilverband von L, also sind auch die f-Semiprimelemente von A definiert.

L bezeichne einen vf-Verband mit der folgenden Eigenschaft: für jedes Elementepaar a, b von L und für jedes i ($i = 1, 2, \dots, n$) besitzt L ein Element $a \overset{i}{:} b$ derart, daß

$$x \leqq a \overset{i}{:} b \Longleftrightarrow f(b, b, \dots, b, \underset{\smile}{\overset{i}{x}}, b, \dots, b) \leqq a\,. \tag{5.1}$$

Das Element $a \overset{i}{:} b$ heißt *i-ter f-Quotient*, und L heißt ein *vf-Verband mit f-Quotienten.*

Satz 5.1. (Vgl. Satz 2.7 von [3]). *Es sei L ein f-negativ geordneter vf-Verband mit f-Quotienten*[5] *und sei $[O, a] = A$ $(a \in L)$ ein Intervall in L. Ist s ein f-Semiprimelement von A, so ist $s \overset{1}{:} a$ ein f-Semiprimelement von L mit den Eigenschaften*

$$(s \overset{1}{:} a) \wedge a = s\,, \tag{5.2}$$

$$s \overset{1}{:} a = s \overset{i}{:} a \qquad (i = 2, 3, \dots, n). \tag{5.3}$$

[5] Im Satz 2.7 von [3] ist vorausgesetzt, daß L ein f-negativ und vf-verbandsgeordneter vf-Verband ist. Es ist leicht einzusehen, daß diese Bedingung die Existenz der f-Quotienten in L impliziert. (S. Behauptung 2.6 aus [3].)

Beweis. Im Falle $s = a$ ist $a \overset{i}{:} a = e$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, und die Gleichungen (5.2), (5.3) gelten trivialerweise.

Es sei dann $s < a$. Gilt für die aus f durch Iteration gebildete Operation f' und für das Element m von L die Bedingung $f'(m, \ldots, m) \leqq s \overset{1}{:} a$, so besteht nach (5.1)

$$f(f'(m, \ldots, m), a, \ldots, a) \leqq s\,.$$

Wegen $m \wedge a \leqq m$ und wegen der Isotonie der Operation f bekommt man

$$f(f'(m \wedge a, \ldots, m \wedge a), a, \ldots, a) \leqq s\,. \tag{5.4}$$

Da $m \wedge a \leqq a$ gilt, gilt auch $f'(m \wedge a, \ldots, m \wedge a) \leqq m \wedge a \leqq a$ wegen der f-negativen Ordnung. Dies und (5.4) implizieren

$$f(f'(m \wedge a, \ldots, m \wedge a), f'(m \wedge a, \ldots, m \wedge a), \ldots, f'(m \wedge a, \ldots, m \wedge a) \leqq s. \tag{5.5}$$

Nach unserer Voraussetzung ist s ein f-Semiprimelement des Intervalls $A = [O, a]$, so folgen aus (5.5)

$$f'(m \wedge a, \ldots, m \wedge a) \leqq s \text{ und } m \wedge a \leqq s\,.$$

Da A f-negativ geordnet ist, gilt

$$f(m, a, \ldots, a) \leqq m \wedge a \leqq s\,,$$

also $m \leqq s \overset{1}{:} a$. Damit ist bewiesen, daß der f-Quotient $s \overset{1}{:} a$ ein f-Semiprimelement von L ist.

Da L f-negativ geordnet ist, besteht $s \leqq s \overset{i}{:} a$ für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$, woraus $s \leqq (s \overset{i}{:} a) \wedge a$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ folgt. Andererseits gilt

$$f((s \overset{i}{:} a) \wedge a, (s \overset{i}{:} a) \wedge a, \ldots, (s \overset{i}{:} a) \wedge a) \leqq f(a, \ldots, a, s \overset{i}{:} a, a, \ldots, a) \leqq s\,,$$

was $(s \overset{i}{:} a) \wedge a \leqq s$ für jedes $i (= 1, 2, \ldots, n)$ impliziert. Damit ist (5.2) nicht nur für $i = 1$, sondern auch für jedes $i (= 1, 2, \ldots, n)$ bewiesen.

Wegen (5.2) und wegen der f-negativen Ordnung von L besteht

$$f(a, \ldots, a, \overset{\overset{i}{\curlyvee}}{s \overset{1}{:} a}, a, \ldots, a) \leqq (s \overset{1}{:} a) \wedge a = s\,,$$

woraus nach der Definition (5.1)

$$s \overset{1}{:} a \leqq s \overset{i}{:} a \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

folgt. Ähnlich bekommt man aus

$$f(s \overset{i}{:} a, a, \ldots, a) \leqq (s \overset{i}{:} a) \wedge a = s \qquad (i = 2, 3, \ldots, n)$$

die Ungleichung $s \overset{i}{:} a \leqq s \overset{1}{:} a$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, womit auch (5.3) bewiesen ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] G. Grätzer and E. T. Schmidt, Characterizations of congruence lattices of abstract algebras, *Acta Sci. Math.* (Szeged) **24** (1963), 34–59.
[2] K. Keimel, A unified theory of minimal prime ideals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* (Im Erscheinen)
[3] O. Steinfeld, Primelemente und Primradikale in gewissen verbandsgeordneten algebraischen Strukturen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **19** (1968), 243–261.

(Eingegangen am 20. Juli 1970)

MTA MATEMATIKAI KUTATÓ INTÉZETE,
BUDAPEST, V., REÁLTANODA U. 13–15.
HUNGARY