Diskussion zur Grundlegung der Mathematik

am Sonntag, dem 7. Sept. 1930

HAHN: Die folgenden Ausführungen sind lediglich Diskussionsbemerkungen, also notwendigerweise nur skizzenhaft; ich muß also bitten, es zu entschuldigen, daß ich keineswegs mit der in diesen Fragen gebotenen Präzision sprechen werde.

Will man sich für einen der Standpunkte bei Grundlegung der Mathematik entscheiden, die hier ausführlich begründet wurden, so muß man sich vor allem fragen: Was ist von einer Grundlegung der Mathematik zu verlangen? Und um zu dieser Frage Stellung zu nehmen, muß ich einige Worte philosophischen Inhalts vorausschicken.

Der einzig mögliche Standpunkt der Welt gegenüber scheint mir der *empiristische* zu sein, den man ganz roh so charakterisieren kann: Irgendeine Erkenntnis, der Inhalt zukommt, die wirklich etwas über die Welt besagt, kann nur durch Beobachtung, durch Erfahrung zustande kommen; durch reines Denken kann eine Erkenntnis über die Wirklichkeit in keiner Weise gewonnen werden; und ein einmaliges Hinsehen kann keine Erkenntnis liefern, die über den betreffenden Einzelfall hinausreicht (welch letztere Bemerkung sich gegen alle Lehren von reiner Anschauung und von Wesensschau richtet). Ich stelle mich auf diesen empiristischen Standpunkt nicht auf Grund einer Auswahl unter verschiedenen möglichen Standpunkten, sondern weil er mir als der einzig mögliche erscheint, weil mir jede Realerkenntnis durch reines Denken, durch reine Anschauung, durch Wesensschau als etwas durchaus Mystisches erscheint.

Der Durchführung dieses empiristischen Standpunktes scheint nun eine sehr einfache Tatsache entgegenzustehen: die Tatsache nämlich, daß es eine Logik und eine Mathematik gibt, die uns doch anscheinend absolut sichere und allgemeine Erkenntnisse über die Welt liefern. So entsteht die Grundfrage: *Wie ist der empiristische Standpunkt mit der Anwendbarkeit von Logik und Mathematik auf Wirk-*

liches verträglich? Und im Sinne dieser Frage ist meiner Ansicht nach von einer Grundlegung der Mathematik vor allem zu verlangen, daß sie dartut, wieso die Anwendbarkeit der Mathematik auf Wirkliches mit dem empiristischen Standpunkt verträglich ist.

Die Vertreter des Intuitionismus und des Formalismus, die hier zu Worte kamen, haben ihre Standpunkte so deutlich dargelegt, daß man wohl mit Bestimmtheit sagen kann: weder Intuitionismus noch Formalismus erfüllen diese Forderung. Ich halte sowohl die Untersuchungen Brouwers als die Hilberts für höchst bedeutungsvoll innerhalb der Mathematik, aber ich halte sie nicht für Grundlegungen der Mathematik. Herr Heyting ging in seinem Referate aus von einer Urintuition der Zahlenreihe; diese Urintuition hat für mich, so wie reine Anschauung oder Wesensschau, etwas Mystisches, und eignet sich daher nicht als Ausgangspunkt für die Grundlegung der Mathematik. Und Herr v. Neumann hat mit aller Deutlichkeit gesagt, daß der Formalismus die gesamte finite Arithmetik voraussetzt, um von da aus die klassische Mathematik zu rechtfertigen; ein Standpunkt aber, der die finite Arithmetik voraussetzt, kann nicht als Grundlegung der Mathematik angesehen werden.

Der Darlegung meines eigenen Standpunktes sei eine kleine Erörterung vorausgeschickt. Sei irgendein Bereich von Gegenständen gegeben, zwischen denen irgendwelche Relationen bestehen; dieser Bereich werde abgebildet auf einen Bildbereich, so daß den Gegenständen und Relationen des ursprünglichen Bereiches Gegenstände und Relationen des Bildbereiches entsprechen; die Gegenstände und Relationen des Bildbereiches können wir dann als *Symbole* für die Gegenstände und Relationen des ursprünglichen Bereiches auffassen. Ist die vorgenommene Abbildung nicht ein-eindeutig, sondern ein-mehrdeutig, so werden einunddemselben Sachverhalte im ursprünglichen Bereiche verschiedene Symbolkomplexe im Bildbereiche entsprechen; es wird also Transformationen dieser Symbolik in sich geben, und es entsteht die Aufgabe, Regeln anzugeben für die Umformung eines Symbolkomplexes in einen anderen, der denselben Sachverhalt des ursprünglichen Bereiches abbildet. So nun steht meiner Meinung nach die Sprache der Wirklichkeit gegenüber: die Sprache ordnet den Sachverhalten der Welt Symbolkomplexe zu, und zwar nicht in ein-eindeutiger Weise (was wenig Zweck hätte), sondern in ein-mehrdeutiger Weise; und die Logik gibt die Regeln an, wie ein Symbolkomplex der Sprache umgeformt werden kann in einen anderen, der denselben Sachverhalt bezeichnet; das ist es, was als der „tautologische" Charakter der Logik bezeichnet wird; ein ganz einfaches Beispiel ist die doppelte Negation: der Satz p und der Satz *non-non-p* bezeichnen denselben Sachverhalt. Immer, wenn eine ein-mehrdeutige Abbildung vorliegt, gibt es in diesem Sinne eine „Logik" dieser Abbildung; was man gewöhnlich *Logik* nennt ist der Spezialfall, in dem es sich um die Zuordnung der Sprachsymbole zu den Sachverhalten der Welt handelt.

Die Logik sagt also über die Welt gar nichts aus, sondern sie bezieht sich nur auf die Art, wie ich über die Welt spreche, und es leuchtet wohl ein, daß bei dieser Auffassung das Bestehen der Logik ohne weiteres mit dem empiristischen Standpunkte verträglich ist, während die Auffassung der Logik als Lehre von den allgemeinsten Eigenschaften der Gegenstände mit dem empiristischen Standpunkte durchaus unverträglich ist. Nehmen wir als Beispiel den logischen Grundsatz $(x)\ \varphi(x) \cdot \supset \cdot\ \varphi(y)$, der besagt: was für alle gilt, gilt für jedes einzelne. Dieser Grundsatz besagt nichts über die Welt; es ist nicht eine Eigenschaft der Welt, daß, was für alle gilt, auch für jedes einzelne gilt; sondern die Sätze: „$\varphi(x)$ gilt für alle Individuen" und „$\varphi(y)$ gilt für jedes einzelne Individuum" sind nur verschiedene sprachliche Symbole für denselben Sachverhalt; der angeführte logische Grundsatz drückt also nur eine Ein-mehrdeutigkeit der als Sprache verwendeten Symbolik aus; er drückt aus, in welchem Sinne das Symbol „alle" verwendet wird.

Nun kommen wir auf die Grundlegung der Mathematik zurück. Der von Herrn Carnap dargelegte logistische Standpunkt behauptet, daß kein Unterschied zwischen Mathematik und Logik besteht. Ist dieser Standpunkt durchführbar, so ist mit obiger Aufklärung der Stellung der Logik im Systeme unserer Erkenntnis auch die Stellung der Mathematik aufgeklärt; ebenso wie das Bestehen der Logik, ist dann auch das Bestehen der Mathematik mit dem empiristischen Standpunkte verträglich. Und dies ist der Grund, warum ich unter den drei hier vorgebrachten Auffassungen über die Grundlegung der Mathematik für die logizistische Auffassung optiere.

Nun kann man tatsächlich einsehen, daß die Sätze der finiten Arithmetik, wie $3 + 5 = 5 + 3$, denselben tautologischen Charakter haben wie die Sätze der Logik; man hat nur auf die Definition der Symbole $3, 5, +$ und $=$ zurückzugehen. Die finite Arithmetik bereitet also dem logizistischen Standpunkte keine Schwierigkeit. Nicht so klar liegen die Dinge bezüglich der transzendenten Schlußweisen der Mathematik, wie der Lehre von der vollständigen Induktion, der Mengenlehre und mancher Kapitel der Analysis. Hier scheinen Grundsätze eine Rolle zu spielen, die nicht tautologisch sind; so scheint z. B. das Auswahlaxiom einen realen Inhalt zu haben, wirklich etwas über die Welt auszusagen; das war zumindest der Standpunkt Russells, und Ramseys Versuch, auch dem Auswahlaxiom tautologischen Charakter zuzuschreiben, ist sicherlich nicht geglückt.

Russells absolutistisch-realistischer Standpunkt nimmt an, die Welt bestehe aus Individuen, Eigenschaften von Individuen, Eigenschaften solcher Eigenschaften usf.; und die logischen Axiome seien nun Aussagen über diese Welt. Daß diese Auffassung mit konsequentem Empirismus unvereinbar ist, habe ich schon gesagt, und ich halte die Polemik Wittgensteins und der Intuitionisten gegen diese Auffassung für durchaus gerechtfertigt; ebenso scheint mir die realistisch-metaphysische Auffassung Ramseys, gegen die auch Herr Carnap sich gewendet hat, unmöglich.

Wenn ich so Russells philosophische Interpretation seines Systems bekämpfe, so glaube ich doch, daß die formale Seite dieses Systems großenteils in Ordnung und zur Begründung der Mathematik weitgehend geeignet ist; es muß nur nach einer anderen philosophischen Interpretation gesucht werden. Bevor ich eine solche Interpretation anzudeuten versuche, möchte ich, des leichteren Verständnisses halber, auf etwas Ihnen Wohlbekanntes hinweisen: Denken Sie an irgendein System von Axiomen der euklidischen Geometrie, z. B. an das von Hilbert. Dieses Axiomsystem ist zur Beschreibung der Welt ausgezeichnet verwendbar; und doch glaubt niemand, daß in der Welt Gegenstände aufweisbar seien, die sich wie die Punkte, Geraden, Ebenen der euklidischen Geometrie verhalten; es handelt sich dabei eben nur um Idealisierungen, um Annahmen, die man zum Zwecke einer geeigneten Weltbeschreibung macht.

Nun nehme ich wie Russell an, es stünde uns zur Beschreibung der Welt (oder besser: eines Ausschnittes der Welt) ein System von Aussagefunktionen, von Aussagefunktionen über Aussagefunktionen usf. zur Verfügung (wobei ich aber im Gegensatze zu Russell nicht glaube, diese Aussagefunktionen seien etwas absolut Gegebenes, in der Welt Aufweisbares). Die Beschreibung der Welt wird nun verschieden ausfallen, je nach der Reichhaltigkeit dieses Systemes von Aussagefunktionen; wir machen also gewisse *An-*

nahmen über diese Reichhaltigkeit; z. B. werden wir fordern, daß, wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in dem System vorkommen, dies auch von $\varphi(x) \vee \psi(x)$ und $\varphi(x) \wedge \psi(x)$ gilt; wir werden auch annehmen, daß neben $\varphi(x, y)$ auch $(y)\,\varphi(x, y)$ in dem Systeme vorkomme; wir können etwa auch annehmen, das System sei sogar so reichhaltig, daß auch eine Bildung wie $(\varphi)\,\varphi(x)$ nicht aus ihm herausführe; auch die Forderung, es solle das Unendlichkeitsaxiom oder das Auswahlaxiom gelten, sind in diesem Sinne Forderungen an die Reichhaltigkeit des Systems von Aussagefunktionen, mit Hilfe dessen ich die Welt beschreiben will. Die ganze Mathematik entsteht nun durch tautologische Umformung der an die Reichhaltigkeit unseres Systems von Aussagefunktionen gestellten Forderungen. Ob ein bestimmter Satz gilt oder nicht (z. B. der Satz von der Mächtigkeit der Potenzmenge, oder der Wohlordnungssatz), hängt von den an die Reichhaltigkeit des zugrunde gelegten Systems von Aussagefunktionen gestellten Forderungen ab, die man, wenn man will, *Axiome* nennen kann; die Frage nach einer *absoluten* Gültigkeit solcher Sätze ist gänzlich sinnlos.

Nun wird man vielleicht die Frage stellen wollen: *Gibt es* ein solches System von Aussagefunktionen, wie es hier gefordert wird? Im empirischen Sinne (oder im realistischen Sinne Russells) gibt es ein solches System gewiß nicht: es ist ausgeschlossen, ein solches System in der Welt aufzuweisen. Im konstruktiven Sinne der Intuitionisten gibt es ein solches System auch nicht. Aber daran liegt nichts; so wie die euklidische Geometrie sehr nützlich ist zur Beschreibung der Welt, obwohl ihre Punkte, Geraden, Ebenen nicht aufweisbar sind, ebenso ist die Annahme eines Systems von Aussagefunktionen, wie wir es besprachen, sehr nützlich zur Beschreibung der Welt, obwohl ein solches System weder empirisch noch konstruktiv aufweisbar ist. Die so aufgebaute Analysis hat nur hypothetischen Charakter: Nehme ich an, zur Beschreibung der Welt stehe mir ein System von Aussagefunktionen zur Verfügung, das gewissen Reichhaltigkeitsanforderungen genügt, so gelten in einer so gearteten Beschreibung der Welt die Sätze der Analysis. Tatsächlich geht auch die Beschreibung der Welt mit den Hilfsmitteln der Analysis über jede empirische Kontrollmöglichkeit weit hinaus. Natürlich muß aber von den an das postulierte System von Aussagefunktionen gestellten Reichhaltigkeitsforderungen *Widerspruchslosigkeit* vorausgesetzt werden, wodurch Anschluß an die Gedanken Hilberts gewonnen ist.

Was bedeutet nun in der so aufgefaßten Analysis eine Existentialbehauptung? Sicherlich behauptet sie keinerlei Konstruierbarkeit im intuitionistischen Sinne; ist sie aber deshalb so bedeutungsleer, wie die Intuitionisten meinen? Nehmen wir an, es sei mit transzendenten (also nicht konstruktiven) Hilfsmitteln irgendein Existentialsatz bewiesen worden, z. B., nur um konkreter zu sprechen, der Satz: „Es gibt eine stetige Funktion ohne Ableitung"; wird dann noch irgendwer versuchen, den Satz zu beweisen: „Jede stetige Funktion hat eine Ableitung?" Ich glaube, nein. Und damit hat dieser bloße Existentialsatz eine faktische Bedeutung; nicht die, daß irgendwie eine solche Funktion in der Welt empirisch aufweisbar sei; auch nicht die, daß sie „konstruierbar" sei; wohl aber die, ich möchte sagen „wissenschaftstechnische" Bedeutung einer Warnungstafel: Suche nicht den Satz: „Jede stetige Funktion hat eine Ableitung", zu beweisen, denn es wird dir nicht gelingen. Daß dies tatsächlich die Rolle der bloßen „Existentialsätze" ist, werden — denke ich — die meisten Fachgenossen zugeben, die sich aktiv an Forschungen, wie sie etwa in der Theorie der reellen Funktionen getrieben werden, beteiligen.

Zum Schluß noch einige Worte zu Wittgensteins Kritik an Russell, über die Herr Waismann hier referiert hat. Daß mir diese Kritik in sehr wesentlichen Punkten berechtigt scheint, habe ich schon gesagt. Doch glaube ich, daß der Unterschied hier nicht durchweg so groß ist, als es nach Waismanns Referat scheinen mag. Nach Russell sind die natürlichen Zahlen Klassen von Klassen; Wittgensteins Auffassung ist anscheinend eine ganz andere; beachtet man aber, daß nach Russell Klassensymbole unvollständige Symbole sind, die erst eliminiert werden müssen, wenn man die wirkliche Bedeutung eines Satzes erkennen will, und führt man diese Eliminierung nach den von Russell angegebenen Regeln durch, so sieht man, daß die beiden Auffassungen durchaus nicht so verschieden sind. — Sicherlich besteht der von Wittgenstein betonte Unterschied zwischen System und Gesamtheit, zwischen Operation und Funktion, und es ist richtig, daß im Russellschen System diese Unterscheidung nicht gemacht wird. Doch haben Operationen und Funktionen, Systeme und Gesamtheiten viel Gemeinsames und können deshalb sicherlich weitgehend gemeinsam, mit derselben Symbolik, behandelt werden. Um die in diesem Punkte geübte Kritik wirksam zu gestalten, müßte also aufgewiesen werden, daß Russell in dieser gemeinsamen Behandlung zu weit geht, sie auch noch in Fällen anwendet, wo sie wegen effektiver Unterschiede nicht mehr angewendet werden kann, und dadurch in Irrtum gerät.

CARNAP: Ich möchte einige Bemerkungen machen über das Verhältnis, in dem die drei Hauptrichtungen der Grundlagenforschung der Mathematik zueinander stehen. (Die Wittgensteinsche Auffassung, über die Herr Waismann vorgetragen hat, enthält wichtige Gedanken, liegt aber noch nicht in einer spruchreifen Form vor.) Manche Zuhörer haben aus den drei Vorträgen den deprimierenden Eindruck gewonnen, als sei die Problemsituation verworren und aussichtslos: da sind drei Richtungen, von denen keine die andere versteht und von denen jede die Mathematik wieder in einer anderen Weise aufbauen will.

In Wirklichkeit ist aber die Lage nicht so schlimm, wie wir sehen werden.

Der Unterschied der Richtungen läßt sich vielleicht erklären aus dem Unterschied der Forderungen, die von verschiedenen Gesichtspunkten aus an den Aufbau der Mathematik gestellt werden. Der *Logiker* (vertreten in erster Linie durch Frege, später durch Russell, in gewisser Hinsicht auch durch Brouwer) fordert: „Jedes Zeichen der Sprache, also auch der mathematischen Symbolik, muß eine bestimmte, angebbare Bedeutung besitzen." Dem tritt der *Mathematiker* (vertreten durch Hilbert) gegenüber: „Wir wollen nicht verpflichtet sein, über die Bedeutung der mathematischen Zeichen Rechenschaft zu geben; wir beanspruchen das Recht, in freier Weise axiomatisch zu operieren, d. h. Axiome und Operationsvorschriften für irgendein mathematisches Gebiet aufzustellen und dann formalistisch die Folgerungen aufzusuchen."

Diese beiden Forderungen scheinen unvereinbar. In ihnen stellt sich uns der Gegensatz Logizismus—Formalismus dar. Der Gegensatz kann aber, wie ich glaube, überbrückt werden. Den Weg dazu weist uns die dritte Forderung, die des *Physikers*. Dieser verlangt von dem logisch-mathematischen System, daß es nicht nur in sich stimmt, sondern daß es auch im Gebiet der empirischen Wissenschaft anwendbar ist. Denn es ist ja der eigentliche Sinn dieses Systems, anzugeben, wie Schlüsse gezogen werden können, d. h. welche Transformationen von Sätzen zulässig sind. So werden wir z. B. verlangen, daß das logisch-mathematische System uns in den Stand setzt, von den Sätzen

„Alle Menschen sind sterblich"

und

„Alle Griechen sind Menschen",

überzugehen zu dem Satz

„Alle Griechen sind sterblich".

Und in der Tat finden wir die Möglichkeit dieser Transformation in jedem der bekannten logisch-mathematischen Systeme angegeben. Aber wir werden von diesen Systemen auch verlangen, daß sie uns z. B. die Transformation des Satzes

„In diesem Zimmer sind nur die Personen Hans und Peter"

in den Satz

„In diesem Zimmer sind zwei Personen"

ermöglichen. Denn sonst können wir die Arithmetik nicht auf die Empirie anwenden. Der Mathematiker braucht sich zwar innerhalb seines Gebietes nicht um diese Anwendung zu kümmern. Im Rahmen der Gesamtwissenschaft aber müssen wir selbstverständlich die Möglichkeit der Anwendung der Arithmetik auf Wirklichkeitssätze verlangen; sonst könnte ja keine Physik getrieben werden. Wird nun diese Forderung vom logizistischen und vom formalistischen System erfüllt? Bei der Frege-Russellschen Art der Definition der Zahlen kann der genannte Schluß gezogen werden. Bei der Hilbertschen axiomatischen Einführung der Zahlen ist das nicht sicher, da die genaue Form des Axiomensystems noch nicht vorliegt. Jedenfalls kann aber dieses System durch Einfügung bestimmter Axiome so ergänzt werden, daß es Transformationen von der genannten Form erlaubt. Ich glaube nun, daß der Gegensatz zwischen Logizismus und Formalismus, wenn das System des letzteren die angedeutete notwendige Ergänzung erfahren hat, in gewisser Weise überwunden werden kann.

Denken wir uns den Aufbau des logisch-mathematischen Systems zunächst nach der Hilbertschen Methode vorgenommen. Als wesentlichster Punkt dieser Methode erscheint mir die Zweiteilung in die formale Mathematik (einschließlich der Logik) und die inhaltliche Metamathematik. Die Mathematik besteht dabei aus Formeln, auf deren Bedeutung nicht Rücksicht genommen wird; die Metamathematik gibt die zulässigen Transformationen der Formeln an und untersucht das System der aus den Grundformeln ableitbaren Formeln. Diese Methode der Zweiteilung hat den großen Vorteil, daß sie den Mathematiker innerhalb seines Gebietes von den lästigen Forderungen des Logikers, Rechenschaft über die Bedeutung der

Zeichen zu geben, befreit, dabei aber auf der inhaltlichen Seite, nämlich in der Metamathematik, den finitistisch-konstruktivistischen Forderungen entspricht.

Der Logizismus verlangt aber, daß nicht nur die Metamathematik, sondern auch die Mathematik selbst bedeutungsvoll sei. Bei der genannten Art des Aufbaus scheint diese Forderung zunächst verletzt. Ich glaube aber, daß sie doch nachträglich erfüllt werden kann. Wenn nämlich in dem mathematisch-logischen System die Ergänzungen vorgenommen sind, deren Notwendigkeit wir vorhin überlegt haben, so muß *eine nachträgliche logische Analyse* des Aufbaus uns in den Stand setzen, die Bedeutung der zunächst rein formal eingeführten mathematischen Zeichen herauszustellen. So wird z. B. die logische Analyse derjenigen Formel, die die Transformation des Hans-Peter-Satzes in den Zwei-Satz erlaubt, zu dem Ergebnis führen, daß das Zeichen „2" gerade diejenige Bedeutung hat, die der Logizismus ihm beilegt. In solcher Weise würde die formalistische Einführung der natürlichen Zahlen eine logizistische Interpretation erhalten.

Der formalistische Aufbau wird nach den natürlichen Zahlen die übrigen Zahlarten einführen. Es werden in dem System Axiome vorkommen, die die Beziehungen zwischen den natürlichen Zahlen und den Brüchen, zwischen diesen und den reellen Zahlen, zwischen diesen und den komplexen Zahlen, zwischen den natürlichen und den transfiniten Zahlen festlegen. Die Aufgabe der logischen Analyse würde es dann sein, diesem Aufbau Schritt für Schritt zu folgen und damit die Bedeutung aller mathematischen Zeichen zu ergründen. Der formalistische Aufbau kann nicht umhin, Operationsregeln für die mathematischen Zeichen anzugeben, d. h. Vorschriften, die den Gebrauch dieser Zeichen nicht nur innerhalb der Mathematik, sondern auch in der empirischen Wissenschaft bestimmen. Durch diese Angabe ist dann implizit auch die Bedeutung aller Zeichen festgelegt. Denn (das hat Herr Waismann vorhin schon betont) die Bedeutung eines Begriffes liegt in seinem Gebrauch.

Meine Vermutung geht nun genauer dahin, daß diese logische Analyse des formalistischen Systems das folgende Ergebnis haben wird; trifft diese Vermutung zu, so wäre damit, trotz formalistischer Aufbaumethode, der Logizismus gerechtfertigt und der Gegensatz zwischen den beiden Richtungen überwunden:

1. Für jedes *mathematische Zeichen* finden sich eine oder mehrere *Bedeutungen;* und zwar sind dies rein logische Bedeutungen.

2. Falls das Axiomensystem widerspruchsfrei ist, so wird jede *mathematische Formel,* wenn an Stelle eines jeden mathematischen Zeichens die dafür gefundene logische Bedeutung (bzw. eine beliebige von den verschiedenen Bedeutungen) eingesetzt wird, zu einer *Tautologie* (einem allgemeingültigen Satz).

3. Falls das Axiomensystem vollständig ist (im Sinn Hilberts: keine nicht-ableitbare Formel ist widerspruchsfrei hinzufügbar), so wird die Bedeutungsanalyse eindeutig; jedes Zeichen erhält genau eine Bedeutung; damit wäre der formalistische Aufbau in einen logizistischen verwandelt.

Die Durchführung der angedeuteten Gedanken kann erst versucht werden, wenn das Hilbertsche logisch-mathematische Axiomensystem einmal vollständig vorliegen wird. Wenn dabei nicht nur das Axiomensystem selbst vorgelegt, sondern auch noch der erstrebte Widerspruchsfreiheitsbeweis für das System oder für bestimmte Teile geführt werden würde, so wäre dadurch die Aufgabe der logischen Bedeutungsanalyse erheblich erleichtert. Denn nach meiner Ansicht enthält jeder Widerspruchsfreiheitsbeweis offen oder versteckt die Aufweisung eines formalen Modells (Hilbert selbst hat in einem bestimmten Fall einen Hinweis in dieser Richtung gegeben, Logik S. 65). In diesem Modellaufbau würde aber, wie ich glaube, die logische Bedeutung der formalistischen Zeichen sichtbar werden.

Wenn ich hier die Hoffnung auf eine Einigung der entgegengesetzten Richtungen ausgesprochen habe, so will ich damit nicht etwa die jetzt noch bestehenden Gegensätze und Schwierigkeiten verschleiern. Im Gegenteil: es wird am besten sein, wenn jede Richtung sich bemüht, ihre Grundgedanken mit möglichster Schärfe und Konsequenz durchzuführen. Ich glaube, daß dann schließlich diese Durchführungen zu einem gemeinsamen Ergebnis führen werden.

v. NEUMANN: Zu Ihrer Interpretation der Widerspruchsfreiheit möchte ich bemerken, daß ich zweifle, ob das wirklich so geht. Die Situation ist die: bei Hilbert werden tatsächlich sinnlose Symbole eingeführt. Aber die Einführung dieser sinnlosen Symbole ist bei Hilbert kein Selbstzweck. Die angenehmen Erfahrungen, die man mit positiven ganzen Zahlen macht, berechtigen einen nicht zu einem Optimismus für die späteren Ergebnisse. Wenn Hilberts Beweis der Widerspruchsfreiheit geglückt ist, ist es fraglich, ob das eine Interpretationsmöglichkeit ergibt. Wenn ein Axiomensystem widerspruchsfrei sein soll, genügt es, daß eine endliche Teilmenge widerspruchsfrei ist. Daher versucht man, für endliche Teilmengen des Systems eine Interpretationsmöglichkeit anzugeben. Das immerwährende Schwanken dieser provisorischen Interpretationen beweist, daß man von ihnen nicht ohne weiteres zu einer definitiven kommen kann. Man kann so wohl zu einem Widerspruchsfreiheitsbeweis kommen, ohne eine Interpretation für die Mathematik zu finden. Ich glaube also nicht, daß der Beweis der Widerspruchsfreiheit genügt. Herrn Hahn möchte ich fragen: Wird bei seiner Auffassung das Reduzibilitätsaxiom abgelehnt?

HAHN: Ja.

v. NEUMANN: Dann kann man die klassische Mathematik mit den logischen Mitteln nicht begründen. Man bekommt vielleicht etwas mehr als den Intuitionismus, aber die klassische Mathematik bekommt man nicht.

HAHN: Das Reduzibilitätsaxiom braucht man nur, um die verzweigte Typentheorie auf die einfache zurückzuführen. Die verzweigte Typentheorie aber ist nur nötig zur Aufklärung von Widersprüchen, die nicht extensionalen Charakter haben. Da die Mathematik rein extensionalen Charakter hat, braucht man zu ihrer Begründung nur die einfache Typentheorie, mithin kein Reduzibilitätsaxiom.

CARNAP: Der Versuch einer Interpretation des formalen Axiomensystems scheint mir nicht aussichtslos. Wenn für jedes endliche Teilsystem eine Interpretation möglich ist derart, daß diese Interpretationen durch ein allgemeines Gesetz bestimmt sind, so ist durch dieses Gesetz im Grunde auch schon eine Interpretation des Gesamtsystems gegeben. Denn eine Interpretation darf ja auch disjunktive Form haben („dieses Zeichen hat in diesem Zusammenhang diese, in jenem Zusammenhang jene Bedeutung“) und daher auch funktional angegeben sein.

Für jedes einzelne mathematische Zeichen müssen im mathematischen System Regeln vorhanden sein, die es ermöglichen, aus Realsätzen ohne dieses Zeichen solche, die dieses Zeichen enthalten, zu erschließen. Hier können wir nun die Wittgensteinsche These anwenden, daß der Sinn eines Symbols sich in seinem Gebrauche zeigt, und genauer die These, daß jeder abgeleitete Realsatz eine Wahrheitsfunktion derjenigen Elementarsätze ist, aus denen er abgeleitet worden ist. Denken wir uns das kombinatorische Schema der „Wahrheitsmöglichkeiten" jener Realsätze, die das betreffende mathematische Zeichen nicht enthalten, aufgestellt, so wird die Schlußregel erlauben, aus gewissen Wahrheitsmöglichkeiten (das sind die Zeilen des Schemas) den Realsatz, der das mathematische Zeichen enthält, abzuleiten, aus den übrigen nicht. Dann betrachten wir die Menge derjenigen Wahrheitsmöglichkeiten, bei denen die Ableitung möglich ist. Die Disjunktion der Sätze dieser Menge gibt dann die Bedeutung des Satzes mit dem mathematischen Zeichen an, enthält aber selbst das Zeichen nicht. Damit, scheint mir, wäre dann eine Interpretation des mathematischen Zeichens gefunden.

SCHOLZ: Wenn man den Formalismus als Schema darstellt, so ist ein Satz, wenn er richtig ist, auch schon im Abzählbaren realisierbar. Man könnte sagen, es ist überflüssig über abzählbare Mengen hinauszugehen, weil man ein Axiomensystem, wenn es überhaupt realisierbar ist, schon im Abzählbaren realisieren kann. Wie ist es denn aber mit der größeren Mächtigkeit der reellen über den rationalen Zahlen?

v. NEUMANN: Das ganze Kontinuum läßt sich nicht abzählen, wenn man nur Funktionen verwendet, die sich rein logisch herstellen lassen. Man kann aber von außen her durch andere Funktionen diese Abbildung herstellen. Das ist kein Widerspruch.

HEYTING: Ein wichtiges Ergebnis dieser Tagung ist es für mich, daß das Verhältnis zwischen Formalismus und Intuitionismus sich vollständig geklärt hat. Der Meinung von Neumanns kann ich mich völlig anschließen. Wie ist also das Verhältnis? Beide Richtungen sind an sich möglich, beide haben ein gewisses Recht auf den Namen Mathematik, weil beide durch Umdeutung aus der klassischen Mathematik hervorgegangen sind. Das Wort „Mathematik" bedeutet freilich einmal eine gedankliche Konstruktion, das andere Mal ein Spiel mit Formeln. Es bestehen zwischen den beiden Richtungen gewisse Beziehungen, der Formalismus braucht den Intuitionismus wenigstens teilweise, soweit es die ganzen Zahlen und die vollständige Induktion betrifft. Andererseits: ist einmal der Widerspruchsfreiheitsbeweis geliefert, dann kann der Formalismus dem Intuitionismus als Beweismittel dienen, weil die formalen Zeichen intuitionistisch als mathematische Gegebenheiten aufgefaßt werden können. Daß diese Verständigung möglich ist, hat seinen Grund darin, daß für beide Richtungen die Mathematik da ist, ehe sie auf die Natur, auf die Wirklichkeit angewendet wird. Da liegt auch der Grund, daß eine Verständigung mit dem Logizismus noch nicht möglich ist. Da müßte man erst erklären, wie man Mathematik auf Wirklichkeit anwenden kann. Diese Frage ist durchaus noch nicht vollständig gelöst. Die Logizisten wollen nicht darauf verzichten, beim Aufbau der Mathematik den Begriff der Welt schon zu gebrauchen. Daher ist eine endgültige Klärung noch nicht möglich.

GÖDEL: Nach formalistischer Auffassung fügt man zu den sinnvollen Sätzen der Mathematik transfinite (Schein-) Aussagen hinzu, welche an sich keinen Sinn haben, sondern nur dazu dienen, das System zu einem abgerundeten zu machen, ebenso wie man in der Geometrie durch Einführung der unendlich fernen Punkte zu einem abgerundeten System gelangt. Diese Auffassung setzt voraus, daß, wenn man zum System S der sinnvollen Sätze das System T der transfiniten Sätze und Axiome hinzufügt und dann einen Satz aus S auf dem Umweg über Sätze aus T beweist, dieser Satz auch inhaltlich richtig ist, daß also durch Hinzufügung der transfiniten Axiome keine inhaltlich falschen Sätze beweisbar werden. Diese Forderung pflegt man durch die der Widerspruchsfreiheit zu ersetzen. Ich möchte nun darauf hinweisen, daß diese beiden Forderungen keinesfalls ohne weiteres als äquivalent angesehen werden dürfen. Denn wenn in einem widerspruchsfreien formalen System A (etwa dem der klassischen Mathematik) ein sinnvoller Satz p mit Hilfe der transfiniten Axiome beweisbar ist, so folgt aus der Widerspruchsfreiheit von A bloß, daß *non-p innerhalb* des Systems A formal nicht beweisbar ist. Trotzdem bleibt es denkbar, daß man *non-p* durch irgendwelche inhaltliche (intuitionistische) Überlegungen einsehen könnte, die sich in A *nicht* formal darstellen lassen. In diesem Falle wäre trotz der Widerspruchsfreiheit von A in A ein Satz beweisbar, dessen Falschheit man durch finite Betrachtungen einsehen könnte. Sobald man den Begriff „sinnvoller Satz" hinreichend eng faßt (z. B. auf die finiten Zahlgleichungen beschränkt), kann etwas Derartiges allerdings nicht eintreten. Hingegen wäre es z. B. durchaus möglich, daß man einen Satz der Form $(Ex)\,F(x)$, wo F

eine finite Eigenschaft natürlicher Zahlen ist (die Negation des Goldbachschen Satzes hat z. B. diese Form), mit den transfiniten Mitteln der klassischen Mathematik beweisen und andererseits durch inhaltliche Überlegungen einsehen könnte, daß alle Zahlen die Eigenschaft *non-F* haben, und zwar bleibt dies, worauf ich eben hinweisen möchte, auch dann noch möglich, wenn man die Widerspruchsfreiheit des formalen Systems der klassischen Mathematik nachgewiesen hätte. Denn man kann von keinem formalen System mit Sicherheit behaupten, daß alle inhaltlichen Überlegungen in ihm darstellbar sind.

v. NEUMANN: Es ist nicht ausgemacht, daß alle Schlußweisen, die intuitionistisch erlaubt sind, sich formalistisch wiederholen lassen.

GÖDEL: Man kann (unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik) sogar Beispiele für Sätze (und zwar solche von der Art des Goldbachschen oder Fermatschen) angeben, die zwar inhaltlich richtig, aber im formalen System der klassischen Mathematik unbeweisbar sind. Fügt man daher die Negation eines solchen Satzes zu den Axiomen der klassischen Mathematik hinzu, so erhält man ein widerspruchsfreies System, in dem ein inhaltlich falscher Satz beweisbar ist.

REIDEMEISTER: Ich möchte die Diskussion mit einigen Bemerkungen abschließen, die nichts Neues bringen, vielmehr nur einige Punkte aus der Diskussion herausheben sollen, drei Punkte, die sich für die Klärung der drei Grundeinstellungen in ihren Beziehungen zueinander als besonders wichtig herausgestellt haben.

1. Welche Rolle spielt das Reduzibilitätsaxiom im System Russells? In dem Gedankenaustausch zwischen v. Neumann und Hahn hat sich gezeigt, daß hier eine ganz konkrete Frage vorliegt, die den Tatbestand der fertig ausgearbeiteten logistischen Theorie betrifft. In der deutschen Literatur ist diese Frage nicht mit genügender Deutlichkeit herausgearbeitet. Ich darf mitteilen, daß ein Vortrag hierüber für die nächste Gelegenheit in Aussicht genommen ist. Derselbe wird sich zugleich mit der sogenannten Extensionalitätsthese zu befassen haben.

2. Wie verhält sich die Hahnsche Interpretation des Russellschen Systems zu der formalistischen Interpretation desselben? Auch die Formalisten behaupten, daß die inhaltliche Deutung, welche

Russell seinem System gegeben hat, nicht unbedingt mit diesem System gekoppelt ist, sie trennen vielmehr das formale System von seiner Bedeutung. Wie aber läßt sich von einem logistischen Standpunkt aus das erste Hilfsmittel einer solchen Umdeutung, nämlich der Begriff einer wesentlich bedeutungsleeren Aussage, bilden? Wie ist eine bedeutungsleere Aussage faßbar für jemanden, der nicht auf dem rein intuitionistischen Standpunkt steht, daß die Logik ein Teil der Kombinatorik ist und daß Sätze aus Zeichen konstruiert werden können?

3. Was ist die Bedeutung eines Satzes im intuitionistischen und logistischen Sinn? Ich knüpfe an eine Diskussionsbemerkung von Carnap an, daß es vielleicht gelingen könne, an Hand eines Beweises für Widerspruchsfreiheit einen Weg zu finden, wie man einem formalistischen System eine Bedeutung geben könnte. Was heißt hier „Bedeutung"? Jedenfalls nicht das, was ein Intuitionist unter Bedeutung versteht. Es ist wohl der schwerstwiegende Gegensatz zwischen den beiden Lagern, daß das Wort „Bedeutung" so verschieden gemeint ist. Dies ist von den Vertretern der Logistik wohl nicht immer klar genug anerkannt worden, und es ist somit eine wichtige Aufgabe, zwischen diesen ganz verschiedenen Auffassungen des Begriffs „Bedeutung" klare Grenzen zu ziehen.

Nachtrag

Von den Herausgebern der „Erkenntnis" werde ich aufgefordert, eine Zusammenfassung der Resultate meiner jüngst in den Monatsh. f. Math. u. Phys. XXXVIII erschienenen Abhandlung „Über formal unentscheidbare Sätze der ‚Principia Mathematica' und verwandter Systeme" zu geben, die auf der Königsberger Tagung noch nicht vorlag. Es handelt sich in dieser Arbeit um Probleme von zweierlei Art, nämlich 1. um die Frage der Vollständigkeit (Entscheidungsdefinitheit) formaler Systeme der Mathematik, 2. um die Frage der Widerspruchsfreiheitsbeweise für solche Systeme. Ein formales System heißt vollständig, wenn jeder in seinen Symbolen ausdrückbare Satz aus den Axiomen formal entscheidbar ist, d. h. wenn für jeden solchen Satz A eine nach den Regeln des Logikkalküls verlaufende endliche Schlußkette existiert, die mit irgendwelchen Axiomen beginnt und mit dem Satz A oder dem Satz *non*-A endet. Ein System $\mathfrak{S}$ heißt vollständig hinsichtlich einer gewissen Klasse von Sätzen $\mathfrak{R}$, wenn wenigstens jeder Satz von $\mathfrak{R}$ aus den Axiomen von $\mathfrak{S}$ entscheidbar ist. Was in der obigen Arbeit gezeigt wird, ist, daß es kein System mit endlich vielen Axiomen gibt, welches auch nur hinsichtlich der arithmetischen Sätze vollständig wäre[1]). Unter „arithmetischen Sätzen" sind dabei diejenigen Sätze zu verstehen, in denen keine anderen Begriffe vorkommen als $+$, $\cdot$, $=$ (Addition, Multiplikation, Identität, u. zw. bezogen auf natürliche Zahlen), ferner die logischen Verknüpfungen des Aussagenkalküls und schließlich das All- und Existenzzeichen, aber nur bezogen auf Variable, deren Laufbereich die natürlichen Zahlen sind (in arithmetischen Sätzen kommen daher überhaupt keine anderen Variablen vor als solche für natürliche Zahlen). Sogar für Systeme, welche unendlich viele Axiome haben, gibt es immer unentscheidbare arithmetische Sätze, wenn nur die „Axiomenregel" gewissen (sehr allgemeinen) Voraussetzungen genügt. Insbesondere ergibt sich aus dem Gesagten, daß es in allen bekannten formalen Systemen der Mathematik — z. B. „Princ. Math." (samt Reduzibilitäts-, Auswahl- und Unendlichkeitsaxiom), Zermelo-Fränkelsches und v. Neumannsches Axiomensystem der Mengenlehre, formale Systeme der Hilbertschen Schule — unentscheidbare arithmetische Sätze gibt. Bezüglich der Resultate über die Widerspruchsfreiheitsbeweise ist zunächst zu beachten, daß es sich hier um Widerspruchsfreiheit in formalem (Hilbertschen) Sinn handelt, d. h. die Widerspruchsfreiheit wird als rein kombinatorische Eigenschaft gewisser Zeichensysteme und der für sie geltenden „Spielregeln" aufgefaßt. Kombinatorische Tatsachen kann man aber in den Symbolen der mathematischen Systeme (etwa der „Princ. Math.") zum Ausdruck bringen. Daher wird die Aussage, daß ein gewisses formales System $\mathfrak{S}$ widerspruchsfrei ist, häufig in den Symbolen dieses Systems selbst ausdrückbar sein (insbesondere gilt dies für alle oben angeführten Systeme). Was gezeigt wird, ist nun das folgende: Für alle formalen Systeme, für welche oben die Existenz unentscheidbarer arithmetischer Sätze behauptet wurde, gehört insbesondere die Aussage der Widerspruchsfreiheit des betreffenden Systems zu den in diesem System unentscheidbaren Sätzen. D. h. ein Widerspruchsfreiheitsbeweis für eines dieser Systeme $\mathfrak{S}$ kann nur mit Hilfe von Schlußweisen geführt werden, die in $\mathfrak{S}$ selbst nicht formalisiert sind. Für ein System, in dem alle finiten (d. h. intuitionistisch einwandfreien)

[1]) Vorausgesetzt, daß keine falschen (d. h. inhaltlich widerlegbaren) arithmetischen Sätze aus den Axiomen des betr. Systems beweisbar sind.

Beweisformen formalisiert sind, wäre also ein finiter Widerspruchsfreiheitsbeweis, wie ihn die Formalisten suchen, überhaupt unmöglich. Ob eines der bisher aufgestellten Systeme, etwa die „Princ. Math.", so umfassend ist (bzw. ob es überhaupt ein so umfassendes System gibt), erscheint allerdings fraglich.

Kurt Gödel, Wien.

Literatur zur Grundlegung der Mathematik

Ein umfangreiches Literaturverzeichnis findet sich in A. Fraenkel: Einführung in die Mengenlehre, 3. Aufl., 1928. Mit Rücksicht hierauf ist im folgenden vor allem die spätere Literatur berücksichtigt. Man vergleiche auch das Literaturverzeichnis in Erkenntnis Bd. 1, S. 315—339, 1930.

Ackermann, W., Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke. Math. Ann. 100, 1928.

— Begründung des tertium non datur mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit. Math. Ann. 93, 1925.

Ajdukiewicz, K., Beiträge zur Methodologie der deduktiven Wissenschaften. Polnisch. 1921.

— Baldus, R., Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik. Karlsruhe 1924.

Bavink, B., Ergebnisse und Probleme der Naturwissenschaften. 4. Aufl., 1930.

Becker, O., Über den sog. „Anthropologismus" in der Philosophie der Mathematik. Phil. Anz. 3.

Behmann, H., Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem. Math. Ann. 86, 1922, S. 163.

— Mathematik und Logik. (Math.-Phys. Bibl., Bd. 71.) Teubner, Leipzig 1927.

— Zu den Widersprüchen der Logik und Mengenlehre. Jahresbericht d. Deutsch. Math.-Ver. 40, S. 37, 1931.

Bernays, P., Axiomatische Untersuchung des Aussagen-Kalküls der „Principia Mathematica". Math. Zeitschr. Bd. 25, S. 305, Berlin 1926.

— Die Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie. Blätt. f. deutsche Phil. Bd. 4, 1930.

Bernstein, B. A., Irredundant sets of postulates for the logic of propositions. Bulletin A. M. S. 35, 1929.

Bouligand, G., L'unité des sciences mathématiques. Scientia 45.

Brouwer, L. E. J., Over de grondslagen der wiskunde. Diss. Amsterdam 1907.

— Addenda en corrigenda over de grondslagen der wiskunde. Verslagen Kon. Akademie van Wet. Amsterdam XXV.

— Intuitionisme en formalisme. Rede. Groningen 1912. Englische Übersetzung im Bull. Amer. Math. Soc. 20, 1913.

— Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionstheorie. Journal f. Math. 54, 1920.

— Intuitionistische Zerlegung mathematischer Grundbegriffe. Jahresber. D. M. V. 23, 1920.

— Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., 1928.