BEITRÄGE ZUR THEORIE DER GEOMETRISCHEN OBJEKTE. III—IV

III. SPEZIELLE GEOMETRISCHE OBJEKTE MIT NICHT WENIGER KOMPONENTEN ALS PARAMETERN

IV. DIFFERENTIELLE GEOMETRISCHE OBJEKTE ERSTER, ZWEITER UND DRITTER KLASSE VON BELIEBIGER KOMPONENTENZAHL IM EINDIMENSIONALEN RAUM

Von

J. ACZÉL (Debrecen)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

§ 1. Einleitung

In [2] wurde eine vollkommene Bestimmung aller differentiellen geometrischen Objekte mit einer Komponente im eindimensionalen Raum ohne Derivierbarkeitsvoraussetzungen gegeben. (Bezüglich der Terminologie s. § 2.) In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit geometrischen Objekten von mehreren Komponenten. Während, wie dies in der Einleitung von [2] ausführlich berichtet wurde, die Transformationsformeln der eindimensionalen differentiellen geometrischen Objekte mit einer Komponente schon bekannt waren, und in [2] dies nur unter schwächeren (Stetigkeits-) Bedingungen wieder erledigt wurde, sind bisher auch unter Linearitäts- bzw. Analytizitätsbedingungen nur Objekte von höchstens zwei Komponenten vollständig bestimmt worden ([4], [5], [6], [9], [10]; vgl. Nachtrag), abgesehen von einem allgemeinen Satz von JU. E. PENSOW [9], der behauptet, daß die eindimensionalen differentiellen geometrischen Objekte von n Komponenten höchstens die Klassenzahl $2n+1$ haben können, und von einem Resultat anderer Natur bezüglich der sogenannten einfachen geometrischen Objekte, das W. W. WAGNER in [12] bewiesen hat.

So werden hier die Transformationsgesetze gewisser allgemeiner Typen von geometrischen Objekten mit beliebig vielen Komponenten in den §§ 3, 4, insbesondere die vollständige Klassifikation der eindimensionalen differentiellen geometrischen Objekte erster, zweiter und dritter Klasse im § 4 zum erstenmal bestimmt. Dagegen sind die Bedingungen, die wir hier voraussetzen, weniger natürlich als in [2], wenn auch nicht allzu sehr einschränkend (besonders in der schwächeren Form, wie sie im Satz 4 vorausgesetzt werden). Die Bedingungen sind denen in den Arbeiten [1], [3] ähnlich, da sich der hier gegebene Gedankengang auf einen Satz aus [3] stützt (s. hier im § 3). Einfälle bezüglich der Anwendung dieses Satzes und bezüglich Einzelheiten des Nachtrages verdankt der Verfasser Herrn M. HOSSZÚ.

§ 2. Grundbegriffe und Bezeichnungen

Für die allgemeine Literatur der Theorie der *geometrischen Objekte* (da nur solche vorkommen werden, nennen wir sie von nun an der Kürze halber nur „*Objekte*") verweisen wir den Leser auf [8] und auf das Literaturverzeichnis von [2]. Was die Objekte mit u Komponenten im t-dimensionalen Raume betrifft, werden wir ihre Komponenten in das Vektorsymbol

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix} x_{\mathrm{I}} \\ x_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ x_{(u)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{X} \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_v \end{Bmatrix}, \quad \left[\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix} x_{\mathrm{I}} \\ x_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ x_{(u-v)} \end{pmatrix}, \mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{(u-v+1)} \\ x_{(u-v+2)} \\ \vdots \\ x_{(u)} \end{pmatrix}\right]$$

zusammenfassen. Zwei Objekte $\mathbf{x}, \mathbf{z}$ nennen wir *äquivalent*, falls es eine umkehrbar eindeutige Vektorfunktion $\mathbf{g}$ gibt derart, daß

$$\mathbf{z}=\mathbf{g}(\mathbf{x})$$

in jedem Koordinatensystem gilt [8].

Nach Definition wird bei einer Transformation der Koordinaten $\eta^j=\varphi^j(\xi^i)$ $(i, j=1, 2, \ldots, t;\ |A_i^j| \neq 0,\ A_i^j=\frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^i}$, *ein* Index oder ein Paar oder eine Menge von Indizes steht hier und im folgenden für *alle* solche) das Objekt durch eine Formel

$$\mathbf{y}=\mathbf{f}[\mathbf{x}, \{\varphi^j(\xi^i)\}]$$

transformiert, wo $\mathbf{f}$ eine *Funktionale* der Koordinatentransformation $\eta^j=\varphi^j(\xi^i)$ ist. Kann diese Abhängigkeit durch eine Abhängigkeit von endlich vielen, mit dieser Koordinatentransformation zusammenhängenden Parametern $(U_1, U_2, \ldots, U_v)=\mathbf{U}$ angegeben werden, so sprechen wir von *speziellen* Objekten, die Transformationsgesetze der Gestalt

$$\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{U})$$

haben, wo $\mathbf{f}$ eine *Funktion* der $u+v$ Veränderlichen $\mathbf{x}, \mathbf{U}$ ist.

Da die Funktion $\mathbf{f}$ selbst bei jeder Koordinatentransformation dieselbe bleibt, hat die Durchführung der Transformationen $\eta^j=\varphi^j(\xi^i)$, $\zeta^k=\psi^k(\eta^j)$ nacheinander dieselbe Wirkung, wie die vereinte Transformation $\zeta^k=\psi^k[\varphi^j(\xi^i)]$:

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{U}), \mathbf{V}]=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{W})=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{U} \circ \mathbf{V}), \tag{1}$$

wo $\mathbf{W}=\mathbf{U}\circ\mathbf{V}$ eine Zusammensetzung (Multiplikation) der Punkte $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ des Parameterraumes ist, die aber nur für gewisse Paare definiert sein muß, nämlich für solche, die zu zwei nacheinander durchführbaren Transformationen gehören. Diese bilden ein Gruppoid (vgl. [8]), das aber in den wichtigsten Spezialfällen zu einer Gruppe wird. (Von den Gruppeneigenschaften werden wir übrigens in dieser Arbeit nur die Assoziativität ausnützen.)

So sind z. B. die Objekte *w-ter Klasse* jene, in denen die Parameter die alten und neuen Koordinaten, sowie die Derivierten höchstens w-ter Ordnung der neuen Koordinaten bezüglich den alten sind:

$$\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}, \{\eta^j\}, \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1 r_2 \ldots r_w}\}) \qquad (|A^l_k| \neq 0),$$

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}, \{\eta^j\}, \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1\ldots r_w}\}), \{\eta^j\}, \{\zeta^J\}, \{B^\lambda_\varkappa\}, \{B^\pi_{\mu\nu}\}, \ldots, \{B^\sigma_{\varrho_1\ldots\varrho_w}\}]=$$

$$=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}, \{\zeta^J\}, \{C^L_K\}, \{C^P_{MN}\}, \ldots, \{C^S_{R_1\ldots R_w}\}), \tag{2}$$

$$\left(A^s_{r_1 r_2\ldots r_q}=\frac{\partial^q \eta^s}{\partial\xi^{r_1}\partial\xi^{r_2}\ldots\partial\xi^{r_q}},\ B^\sigma_{\varrho_1\varrho_2\ldots\varrho_q}=\frac{\partial^q\zeta^\sigma}{\partial\eta^{\varrho_1}\ldots\partial\eta^{\varrho_q}},\ C^S_{R_1\ldots R_q}=\frac{\partial^q\zeta^S}{\partial\xi^{R_1}\ldots\partial\xi^{R_q}}\right).$$

Hier kann

$$\mathbf{U}=(\{\xi^i\}, \{\eta^j\}, \{A^l_k\}, \ldots, \{A^s_{r_1\ldots r_w}\}),\ \mathbf{V}=(\{\tau^j\}, \{\zeta^J\}, \{B^\lambda_\varkappa\}, \ldots, \{B^\sigma_{\varrho_1\ldots\varrho_w}\})$$

nur dann multipliziert werden, falls $\{\tau^j\}\equiv\{\eta^j\}$ ist. Dagegen lassen sich $\mathbf{U}=(\{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1\ldots r_w}\}), \mathbf{V}=(\{B^\lambda_\varkappa\}, \{B^\pi_{\mu\nu}\}, \ldots, \{B^\sigma_{\varrho_1\ldots\varrho_w}\})$ immer multiplizieren und sie bilden eine Gruppe bei den *rein differentiellen* (kurz: differentiellen) Objekten w-ter Klasse, d. h. bei denen, in deren Transformationsgesetz die Koordinaten $\{\xi^i\}, \{\eta^j\}$ selbst nicht figurieren, nur die Derivierten:

$$\mathbf{y}=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1 r_2\ldots r_w}\}) \qquad (|A^l_k|\neq 0),$$

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1\ldots r_w}\}), \{B^\lambda_\varkappa\}, \{B^\pi_{\mu\nu}\}, \ldots, \{B^\sigma_{\varrho_1\ldots\varrho_w}\}]=$$

$$=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{C^L_K\}, \{C^P_{MN}\}, \ldots, \{C^S_{R_1\ldots R_w}\}).$$

Hier ist z. B.

$$C^L_K=B^L_\Lambda A^\Lambda_K=\sum_{\Lambda=1}^{t} B^L_\Lambda A^\Lambda_K, \quad C^P_{MN}=B^P_{ij}A^i_M A^j_N+B^P_k A^k_{MN} \qquad \text{usw.} \tag{3}$$

nach der Derivationsformel zusammengesetzter Funktionen. Wie üblich ist auch hier über den in einem Produkt zweimal vorkommenden Indizes zu summieren.

In dem Fall der eindimensionalen Objekte, mit denen wir uns im § 4 beschäftigen werden, verwenden wir die Bezeichnungen

$$\alpha_k=\frac{d^k\eta}{(d\xi)^k} \qquad (k=1, 2, \ldots, v)$$

und ebenso

$$\beta_k = \frac{d^k \zeta}{(d\eta)^k}, \quad \gamma_k = \frac{d^k \zeta}{(d\xi)^k},$$

so daß bei rein differentiellen Objekten v-ter Klasse im eindimensionalen Raum

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \ldots, \alpha_v) \qquad (\alpha_1 \neq 0),$$

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_v), \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_v] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_v) \tag{4}$$

gilt. Hier ist

$$\gamma_1 = \beta_1 \alpha_1, \quad \gamma_2 = \beta_2 \alpha_1^2 + \beta_1 \alpha_2, \quad \gamma_3 = \beta_3 \alpha_1^3 + \beta_1 \alpha_3 + 3\beta_2 \alpha_1 \alpha_2 \quad \text{usw.} \tag{5}$$

Manchmal werden wir direkte Summen und Produkte von Vektoren

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{I}} \\ x_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ x_{(u)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{\mathrm{I}} \\ y_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ y_{(u)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{I}} + y_{\mathrm{I}} \\ x_{\mathrm{II}} + y_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ x_{(u)} + y_{(u)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{I}}\, y_{\mathrm{I}} \\ x_{\mathrm{II}}\, y_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ x_{(u)}\, y_{(u)} \end{pmatrix} \tag{6}$$

schreiben.

§ 3. Spezielle geometrische Objekte mit nicht weniger Komponenten als Parametern

Wir brauchen den folgenden

HILFSSATZ. *Gibt es für ein fixes* $\mathbf{A} = (a_1, a_2, \ldots, a_v)$ *und für jedes*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_{\mathrm{I}} \\ x_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ x_{(u)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{X} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(u)} \end{pmatrix}$$

einer u-dimensionalen Punktmenge Π $(u \geqq v)$ *ein und nur ein*

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} = [= \mathbf{g}(\mathbf{x})] \qquad (\mathbf{Y} \in \Sigma) \tag{7}$$

derart, daß

$$[\mathbf{h}(\mathbf{y}) =] = \mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}, \mathbf{Y}\right] = \mathbf{x} \tag{8}$$

sei, so ist die allgemeine Lösung der Funktionalgleichung

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{U}), \mathbf{V}] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{U} \circ \mathbf{V}) \tag{1}$$

(wo $\mathbf{x}$ *die Menge* Π *und* $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ *eine Halbgruppe* $\Sigma \subset \Pi$ *des Parameterraumes*

durchläuft) der Gestalt

$$\text{(9)}\qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{U}) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\circ\mathbf{U}\end{pmatrix}\right]$$

(wo $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ \mathbf{G}(\mathbf{x})\end{pmatrix}$ *eine umkehrbar eindeutige Vektorfunktion mit der inversen Funktion* $\mathbf{h}$ *ist). — Im Fall* $u = v$ *fehlt* $\mathbf{g}_0, \mathbf{y}_0$ *aus* (9), (7), (8) *usw. —*

Dies ist also unter den gemachten Voraussetzungen das Transformationsgesetz der v*-parametrigen speziellen Objekte von* u *Komponenten* ($u \geqq v$), *falls der Parameterraum unter der aus der Zusammensetzung der Koordinatentransformationen entspringenden Multiplikation eine (Halb-) Gruppe bildet.*

Hier wurde der v-dimensionale Parameterraum im u-dimensionalen Komponenten-Raum eingebettet.

Dies ist eine unwesentlich geänderte Gestalt des Satzes 1 von [3] und kann durch Einsetzen von

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix}\mathbf{y}_0\\ \mathbf{A}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{Y} \in \Sigma$$

in (1) mit Rücksicht auf (7)—(8), bzw. von (9) in (1) mit Rücksicht auf die Assoziativität von $\mathbf{U}\circ\mathbf{V}$ leicht bewiesen werden.

Hieraus entspringen u. a. folgende *Korollarien:*

1. *Gibt es für fixe* $\{\underset{0}{A}{}^l_k\}$ ($k, l = 1, 2, \ldots, t$; $|\underset{0}{A}{}^l_k| \neq 0$) *und für jedes* $\mathbf{x}$ *einer* u*-dimensionalen Punktmenge* ($u \geqq t^2$) *ein und nur ein*

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix}\mathbf{y}_0\\ \{Y^j_i\}\end{pmatrix} \qquad (|Y^j_i| \neq 0)$$

derart, daß

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{y}_0\\ \{\underset{0}{A}{}^l_k\}\end{pmatrix}, \ \{Y^j_i\}\right] = \mathbf{x}$$

sei, so ist die allgemeine Lösung von

$$\text{(10)}\qquad \mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{A^j_i\}), \{B^l_k\}] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \{B^J_L A^L_K\})$$

der Gestalt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{A^j_i\}) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ \{A^j_l G^l_i(\mathbf{x})\}\end{pmatrix}\right],$$

wo $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ \{G^j_i(\mathbf{x})\}\end{pmatrix}$ *eine umkehrbar eindeutige Vektorfunktion mit* $|G^j_i(\mathbf{x})| \neq 0$ *und* $\mathbf{h}$ *ihre Inverse ist.*

Unter diesen Voraussetzungen ist also dies das Transformationsgesetz der rein differentiellen Objekte erster Klasse mit u Komponenten im t-dimensionalen Raum.

2. Gibt es für fixe $\{\underset{0}{A^p_n}\}$, $\{\underset{0}{A^s_{qr}}\}$ $(|\underset{0}{A^p_n}| \neq 0)$ *und für jedes* $\mathbf{x}$ *einer u-dimensionalen Punktmenge* $\left(u \geqq t\left[t+\binom{t+1}{2}\right] = \frac{t^3+3t^2}{2}\right)$ *ein und nur ein*

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \{Y^j_i\} \\ \{Y^m_{kl}\} \end{pmatrix} \qquad (|Y^j_i| \neq 0)$$

derart, daß

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \{\underset{0}{A^p_n}\} \\ \{\underset{0}{A^s_{qr}}\} \end{pmatrix}, \{Y^j_i\}, \{Y^m_{kl}\}\right] = \mathbf{x}$$

sei, so ist die allgemeine Lösung von

$$\text{(11)} \quad \mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{A^j_i\}, \{A^m_{kl}\}), \{B^p_n\}, \{B^s_{qr}\}] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \{B^J_I A^I_N\}, \{B^M_{KL} A^K_Q A^L_R + B^M_P A^P_{QR}\})$$

der Gestalt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{A^j_n\}, \{A^m_{qr}\}) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ \{A^j_i G^i_n(\mathbf{x})\} \\ \{A^m_{kl} G^k_q(\mathbf{x}) G^l_r(\mathbf{x}) + A^m_p G^p_{qr}(\mathbf{x})\} \end{pmatrix}\right],$$

wo $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ \{G^j_n(\mathbf{x})\} \\ \{G^m_{qr}(\mathbf{x})\} \end{pmatrix}$ *eine umkehrbar eindeutige Vektorfunktion mit* $|G^j_n(\mathbf{x})| \neq 0$ *und* $\mathbf{h}$ *ihre Inverse ist.*

Unter diesen Voraussetzungen ist also dies das Transformationsgesetz der rein differentiellen Objekte zweiter Klasse mit u Komponenten im t-dimensionalen Raum.

((10), (11) folgen aus (2), (3).)

Offenbar können unter ähnlichen Bedingungen die rein differentiellen Objekte w-ter Klasse im t-dimensionalen Raum ebenso erledigt werden, falls sie $u \geqq t\left[t+\binom{t+1}{2}+\cdots+\binom{t+w-1}{w}\right] = t\left[\binom{t+w}{w}-1\right]$ Komponenten haben.

Daß auch die nicht rein differentiellen Objekte, d. h. solche spezielle Objekte, bei denen die durch die Zusammensetzung der Koordinatentransformationen generierte Multiplikation nicht immer zwischen zwei Punkten des Parameterraumes durchfürbar sind, — mit unseren Methoden gleichfalls behandelt werden können, zeigen wir durch den Beweis der folgenden Aussage:

3. *Gibt es für fixe* $\{\alpha^k\}$ $(k=1,\ldots,t)$, $\mathbf{A}=(a_1,\ldots,a_v)$ *und für jedes* $\mathbf{x}$ *einer u-dimensionalen Punktmenge* $\left(u \geqq t+v=t\binom{t+w}{w}\right)$ *und für alle* $\{\eta^j\}$ *der t-dimensionalen Projektion dieser Punktmenge ein und nur ein*

$$\mathbf{t}=\begin{pmatrix}\mathbf{t}_0\\ \{\tau^i\}\\ \mathbf{T}\end{pmatrix}=[=\mathbf{g}(\mathbf{x},\{\eta^j\})]$$

derart, daß

$$[\mathbf{h}(\mathbf{t},\{\eta^j\})=]=\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{t}_0\\ \{\alpha^k\}\\ \mathbf{A}\end{pmatrix},\{\tau^i\},\{\eta^j\},\mathbf{T}\right]=\mathbf{x} \tag{12}$$

sei, so ist die allgemeine Lösung von

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x},\{\xi^i\},\{\eta^j\},\mathbf{U}),\{\eta^j\},\{\zeta^k\},\mathbf{V}]=\mathbf{f}(\mathbf{x},\{\xi^i\},\{\zeta^k\},\mathbf{U}\circ\mathbf{V}) \tag{13}$$

der Gestalt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\{\xi^i\},\{\eta^j\},\mathbf{U})=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x},\{\xi^i\})\\ \{g^k(\mathbf{x},\{\xi^i\})\}\\ \mathbf{G}(\mathbf{x},\{\xi^i\})\circ\mathbf{U}\end{pmatrix},\{\eta^j\}\right], \tag{14}$$

wo $\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x},\{\xi^i\})=\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0\\ \{g^k\}\\ \mathbf{G}\end{pmatrix}$ *eine Vektor-Vektorfunktion mit den Parametern* $\{\xi^i\}$ *ist, deren eindeutige Inverse bezüglich* $\mathbf{x}$ *mit* $\mathbf{x}=\mathbf{h}(\mathbf{y},\{\xi^i\})$ *bezeichnet wurde.*

Dies ist also unter den obigen Bedingungen das Transformationsgesetz der nicht rein differentiellen Objekte w-ter Klasse im t-dimensionalen Raum mit $u \geqq t\binom{t+w}{w}$ *Komponenten.*

Hier wurde (13) aus (2) durch die Bezeichnungen $\mathbf{U}=(\{A_k^l\},\ldots,\{A_{r_1\ldots r_w}^s\})$, $\mathbf{V}=(\{B_\varkappa^\lambda\},\ldots,\{B_{\varrho_1\ldots\varrho_w}^\sigma\})$ gewonnen. Diese lassen sich bereits immer multiplizieren $(|A_k^l|\neq 0, |B_\varkappa^\lambda|\neq 0)$. Es ist bemerkenswert, daß hier nicht $u\geqq t\binom{t+w}{w}+t$, sondern nur $u\geqq t\binom{t+w}{w}$ vorausgesetzt wurde.

Beweis. Die Assoziativität von $\mathbf{U}\circ\mathbf{V}$ sichert, daß (14) die Gleichung (13) tatsächlich erfüllt. Umgekehrt folgt durch Einsetzen von

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}\mathbf{t}_0\\ \{\alpha^k\}\\ \mathbf{A}\end{pmatrix},\quad \{\xi^i\}=\{\tau^i\},\quad \mathbf{U}=\mathbf{T}$$

in (13) wegen (12) das Bestehen von (14) sofort, w. z. b. w.

Diesbezüglich vgl. übrigens die Arbeiten [8], [11], wo die Zurückführbarkeit der nicht rein differentiellen Objekte auf rein differentielle bewiesen wurde. Da diese Werke z. T. schwer zugänglich sind, wiederholen wir kurz mit unseren Bezeichnungen diese Betrachtung:

Wir schreiben:

$$\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{z}, \{\eta^j\}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}, \{\alpha^q\}, \{\eta^j\}, \{\delta^l_k\}, \{0\}, \ldots, \{0\}),$$
$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}, \{\alpha^q\}, \{\delta^l_k\}, \{0\}, \ldots, \{0\})$$
$$\left(\delta^l_k = \begin{cases} 1 \text{ für } k = l, \\ 0 \text{ für } k \neq l; \end{cases} \{\alpha^q\} \text{ konstant}\right),$$
$$\mathbf{z} = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1 \ldots r_w}\}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \{\alpha^q\}, \{\alpha^q\}, \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1 \ldots r_w}\}).$$

Das letztere ist eben die Transformationsformel eines rein differentiellen Objektes. Durch wiederholtes Anwenden von (2) wird

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}, \{\eta^j\}, \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1 \ldots r_w}\}) =$$
$$= \bar{\mathbf{h}}(\bar{\mathbf{f}}[\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}), \{A^l_k\}, \{A^p_{mn}\}, \ldots, \{A^s_{r_1 \ldots r_w}\}], \{\eta^j\}).$$

Dies erfüllt auch (2), so daß damit die nicht rein differentiellen geometrischen Objekte auf rein differentielle zurückgeführt wurden. Da nämlich bei Voraussetzung von

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \{\xi^i\}, \{\xi^i\}, \{\delta^l_k\}, \{0\}, \ldots, \{0\}) = \mathbf{x}$$

(die identische Koordinatentransformation ändert das Objekt nicht)

$$\bar{\mathbf{g}}[\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{z}, \{\xi^i\}), \{\xi^i\}] = \mathbf{z}$$

gilt, also $\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{z}, \{\xi^i\})$ die Inverse von $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \{\xi^i\})$ bezüglich $\mathbf{x}$ ist, kann das soeben Bewiesene folgenderweise ausgesprochen werden:

Wenn die Koordinaten den Komponenten eines nicht rein differentiellen Objektes hinzugenommen werden, so wird es mit einem Objekt äquivalent, das aus einem rein differentiellen Objekt und aus den Koordinaten besteht.

Deshalb beschäftigen wir uns im folgenden nur mit rein differentiellen Objekten.

§ 4. Objekte erster, zweiter und dritter Klasse von beliebiger Komponentenzahl im eindimensionalen Raum

1. Aus dem Hilfssatz bzw. aus dem Korollar 1 (vgl. auch [1]) folgt sofort der

SATZ 1. *Genügt* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1)$ *für* $\mathbf{x} \in \Pi$ *und für die* $\alpha_1 \neq 0$ *einer Halbgruppe* $A \subset \Pi$ *der Funktionalgleichung*

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1), \beta_1] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \beta_1 \alpha_1) \tag{15}$$

und ist für solche $\mathbf{x}$

$$\mathbf{x}=\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{y}_0\\ a_1\end{pmatrix}, y_1\right] \qquad (a_1 \text{ konstant, } 0 \neq y_1 \in A)$$

bezüglich $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}\mathbf{y}_0\\ y_1\end{pmatrix}$ *eindeutig lösbar, so ist für diese* $\mathbf{x}$ *und* α_1

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1)=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1\end{pmatrix}\right], \tag{16}$$

wo $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ g_1(\mathbf{x})\end{pmatrix}$ $(0 \neq g_1(\mathbf{x}) \in A)$ *eine umkehrbar eindeutige Vektorfunktion mit der Inversen* $\mathbf{h}$ *ist. Im Fall* $u=\dim \mathbf{x}=1$ *fehlt* $\mathbf{g}_0(\mathbf{x})$ *aus* (16). (16) *genügt der Gleichung* (15) *und auch der Gleichung*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1)=\mathbf{x}.$$

Unter diesen Bedingungen ist also (16) *das Transformationsgesetz der differentiellen geometrischen Objekte erster Klasse mit* u *Komponenten im eindimensionalen Raum.*

2. Ebenfalls aus dem Hilfssatz bzw. aus dem Korollar 2 folgt für Objekte zweiter Klasse, daß falls

$$u=\dim \mathbf{x} \geqq 2$$

und

$$\mathbf{x}=\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{y}_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}, y_1, y_2\right] \qquad (y_1 \neq 0)$$

bezüglich $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}\mathbf{y}_0\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix}$ eindeutig lösbar ist, so sind die Lösungen der Funktionalgleichung (vgl. (4), (5))

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2), \beta_1, \beta_2]=\mathbf{f}(\mathbf{x}, \beta_1\alpha_1, \beta_2\alpha_1^2+\beta_1\alpha_2) \tag{17}$$

der Objekte zweiter Klasse der Gestalt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2)=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ \alpha_1 g_1(\mathbf{x})\\ \alpha_2 g_1(\mathbf{x})^2+\alpha_1 g_2(\mathbf{x})\end{pmatrix}\right]$$

$$\left(g_1(\mathbf{x}) \neq 0,\ \mathbf{g}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ g_1(\mathbf{x})\\ g_2(\mathbf{x})\end{pmatrix},\ \mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{y})]=\mathbf{y}\right).$$

Führen wir die neuen Funktionen

$$\bar{\mathbf{h}}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{y}_0\\ y_1\\ \dfrac{y_2}{y_1^2}\end{pmatrix}\right]=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{y}_0\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix}\right],\qquad \begin{aligned}\bar{\mathbf{g}}_0(\mathbf{x})&=\mathbf{g}_0(\mathbf{x}),\\ \bar{g}_1(\mathbf{x})&=g_1(\mathbf{x})\neq 0,\\ \bar{g}_2(\mathbf{x})&=\frac{g_2(\mathbf{x})}{g_1(\mathbf{x})}\end{aligned}$$

ein, so erhalten wir (die Oberstriche wieder weggelassen) den

SATZ 2. *Genügt* $\mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,\alpha_2)$ *für* $\mathbf{x}\in\Pi$ *und für die* $\alpha_1\neq 0,\alpha_2$ *einer Halbgruppe* $A\subset\Pi$ *der Gleichung* (17), *ist ferner für solche* $\mathbf{x}$

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{y}_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix},y_1,y_2\right]=\mathbf{x}\qquad (a_1,a_2\ \textit{konstant},\ \{y_1\neq 0,y_2\}\in A)$$

bezüglich $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}\mathbf{y}_0\\ y_1\\ y_2\end{pmatrix}$ *eindeutig lösbar, so ist für diese* $\mathbf{x}$ *und* α_1,α_2

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1\\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}+\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\end{pmatrix}\right],\tag{18}$$

wo $\mathbf{g}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}\mathbf{g}_0(\mathbf{x})\\ g_1(\mathbf{x})\\ g_2(\mathbf{x})\end{pmatrix}$ $(g_1(\mathbf{x})\neq 0)$ *eine umkehrbar eindeutige Vektorfunktion mit der Inversen* $\mathbf{h}$ *ist.* (18) *erfüllt die Gleichung* (17) *sowie die Gleichung*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},1,0)=\mathbf{x}.$$

(18) *ist also unter diesen Bedingungen das Transformationsgesetz der rein differentiellen geometrischen Objekte zweiter Klasse mit u Komponenten im eindimensionalen Raum.*

Wir ließen im Text des Satzes die Bedingung $u=\dim\mathbf{x}\geqq 2$ fort, da dasselbe Resultat für $u=1$ $(y_1=1)$ in [2] schon bewiesen wurde. Für $u=\dim\mathbf{x}=2,1$ ist nämlich (18) so zu verstehen, daß darin $\mathbf{g}_0$ bzw. $\mathbf{g}_0,g_1$ fehlen, und ähnlich in den übrigen Formeln.

Ganz ähnlich lassen sich die Objekte ν-ter Klasse mit u Komponenten im eindimensionalen Raum unter der Untergruppe

$$\eta=\varphi(\xi),\quad \varphi'(\xi)\neq 0,\quad \varphi''(\xi)=\cdots=\varphi^{(\nu-1)}(\xi)=0$$

von Koordinatentransformationen erledigen, indem man die Transformationsformel

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, 0, \ldots, 0, \alpha_v) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \dfrac{g_v(\mathbf{x})}{\alpha_1^{v-1}} + \dfrac{\alpha_v}{\alpha_1^v} \end{pmatrix}\right]$$

$$\left(\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}) \\ g_v(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad g_1(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{y})] = \mathbf{y}\right)$$

erhält.

3. Für Objekte dritter Klasse mit der Funktionalgleichung (vgl. (4))

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \beta_1, \beta_2, \beta_3] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \beta_1\alpha_1, \beta_2\alpha_1^2 + \beta_1\alpha_2, \beta_3\alpha_1^3 + \beta_1\alpha_3 + 3\beta_2\alpha_1\alpha_2) \tag{19}$$

ergibt unser Hilfssatz 1 unmittelbares Ergebnis nur im Fall $u = \dim \mathbf{x} \geqq 3$: Ist

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, y_1, y_2, y_3\right] = \mathbf{x} \qquad \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ konstant, } y_1 \neq 0\right]$$

bezüglich $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ eindeutig lösbar, so ist

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ \alpha_1 g_1(\mathbf{x}) \\ \alpha_2 g_1(\mathbf{x})^2 + \alpha_1 g_2(\mathbf{x}) \\ \alpha_3 g_1(\mathbf{x})^3 + \alpha_1 g_3(\mathbf{x}) + 3\alpha_2 g_1(\mathbf{x}) g_2(x) \end{pmatrix}\right]$$

$$\left(\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ g_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad g_1(\mathbf{x}) \neq 0, \quad \mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{y})] = \mathbf{y}\right).$$

Wir führen die neuen Funktionen

$$\bar{\mathbf{h}}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ y_1 \\ \dfrac{y_2}{y_1^2} \\ \dfrac{y_3}{y_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{y_2^2}{y_1^4} \end{pmatrix}\right] = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right], \qquad \begin{aligned} \bar{\mathbf{g}}_0(\mathbf{x}) &= \mathbf{g}_0(\mathbf{x}), \\ \bar{g}_1(\mathbf{x}) &= g_1(\mathbf{x}) \neq 0, \\ \bar{g}_2(\mathbf{x}) &= g_1(\mathbf{x})^{-2} g_2(\mathbf{x}), \\ \bar{g}_3(\mathbf{x}) &= g_1(\mathbf{x})^{-3} g_3(\mathbf{x}) - \frac{3}{2} g_1(\mathbf{x})^{-4} g_2(\mathbf{x})^2 \end{aligned}$$

ein, und erhalten nach Weglassung der Striche die Formel

$$\text{(20)} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_3^1} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right].$$

Für $u = \dim \mathbf{x} = 1$ wurde die bezügliche Formel in [2] schon bewiesen. Es bleibt also nur noch der Fall $u = \dim \mathbf{x} = 2$ übrig. Diesbezüglich untersuchen wir zuerst den Spezialfall $\alpha_1 = 1$, wofür (19) zu

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, \alpha_2, \alpha_3), 1, \beta_2, \beta_3] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + 3\alpha_2\beta_2 + \beta_3)$$

wird. Dies ist wieder eine Gleichung der Gestalt (1), wofür der Hilfssatz besagt, daß falls

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, 1, y_2, y_3\right] = \mathbf{x}$$

bezüglich $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ eindeutig lösbar ist, so wird

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\begin{pmatrix} g_2(\mathbf{x}) + \alpha_2 \\ g_3(\mathbf{x}) + 3g_2(\mathbf{x})\alpha_2 + \alpha_3 \end{pmatrix} \qquad \left(\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix}, \mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{y})] = \mathbf{y}\right),$$

oder mit

$$\overline{\mathbf{h}}\left[\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 - \dfrac{3}{2} y_2^2 \end{pmatrix}\right] = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right], \qquad \begin{aligned} \bar{g}_2(\mathbf{x}) &= g_2(\mathbf{x}), \\ \bar{g}_3(\mathbf{x}) &= g_3(\mathbf{x}) - \frac{3}{2} g_2(\mathbf{x})^2, \end{aligned}$$

$$\text{(21)} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, \alpha_2, \alpha_3) = \overline{\mathbf{h}}\left[\begin{pmatrix} \bar{g}_2(\mathbf{x}) + \alpha_2 \\ \bar{g}_3(\mathbf{x}) + \alpha_3 - \dfrac{3}{2}\alpha_2^2 \end{pmatrix}\right].$$

Um nun $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ zu bestimmen, nehmen wir in Betracht, daß aus (19)

$$\text{(22)} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{f}\left[\mathbf{f}\left(\mathbf{x}, 1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right), \alpha_1, 0, 0\right] = \mathbf{f}\left[\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, 0, 0), 1, \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}, \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\right]$$

folgt, also mit (21) und mit den Bezeichnungen

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_2^2} \end{pmatrix},$$

sowie mit

$$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{f}[\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}), \alpha_1, 0, 0]) = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \alpha_1), \tag{23}$$

wofür wegen (19) offenbar

$$\bar{\mathbf{f}}[\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \alpha_1), \beta_1] = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \beta_1 \alpha_1) \tag{24}$$

gilt, erhalten wir

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}+\mathbf{z}, \alpha_1) = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y}, \alpha_1) + \mathbf{z}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix}$$

(vgl. (6)). Wir setzen hierin $\mathbf{y}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ und erhalten mit $\bar{\mathbf{f}}\left[\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \alpha_1\right] = \mathbf{c}(\alpha_1)$

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \alpha_1) = \mathbf{c}(\alpha_1) + \mathbf{z}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix}. \tag{25}$$

Dies substituieren wir in (24) zurück:

$$\mathbf{c}(\alpha_1)\cdot\begin{pmatrix}\beta_1^{-1}\\ \beta_1^{-2}\end{pmatrix} + \mathbf{y}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\beta_1^{-2}\end{pmatrix} + \mathbf{c}(\beta_1) = \mathbf{c}(\alpha_1\beta_1) + \mathbf{y}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\beta_1^{-2}\end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt aus Symmetriegründen

$$\mathbf{c}(\alpha_1)\cdot\begin{pmatrix}\beta_1^{-1}\\ \beta_1^{-2}\end{pmatrix} + \mathbf{c}(\beta_1) = \mathbf{c}(\alpha_1\beta_1) = \mathbf{c}(\alpha_1) + \mathbf{c}(\beta_1)\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix}$$

und durch Trennung der Veränderlichen

$$\mathbf{c}(\alpha_1)\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1-\alpha_1^{-1}}\\ \dfrac{1}{1-\alpha_1^{-2}}\end{pmatrix} = \mathbf{c}(\beta_1)\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1-\beta_1^{-1}}\\ \dfrac{1}{1-\beta_1^{-2}}\end{pmatrix} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{c}(\alpha_1) = \mathbf{c}\cdot\begin{pmatrix}1-\alpha_1^{-1}\\ 1-\alpha_1^{-2}\end{pmatrix} = \mathbf{c} - \mathbf{c}\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix}.$$

So wird aus (25)

$$\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \alpha_1) = \mathbf{c} + (\mathbf{z}-\mathbf{c})\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix}$$

und aus (23)

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, 0, 0) = \bar{\mathbf{h}}\left[\mathbf{c} + [\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}]\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix}\right],$$

oder mit den neuen Bezeichnungen $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}$, $\mathbf{h}(\mathbf{y}) = \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{y}+\mathbf{c})$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, 0, 0) = \mathbf{h}\left[\mathbf{g}(\mathbf{x})\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}\\ \alpha_1^{-2}\end{pmatrix}\right] = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}\\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2}\end{pmatrix}\right],$$

während (21) zu

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_2(\mathbf{x}) + \alpha_2 \\ g_3(\mathbf{x}) + \alpha_3 - \frac{3}{2}\alpha_2^2 \end{pmatrix}\right]$$

wird. Schreiben wir alldies in (22) ein, so erhalten wir endlich

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right]. \tag{26}$$

Die Zusammenfassung von (20) und (26) ergibt den

SATZ 3. *Genügt* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *für* $\mathbf{x} \in \Pi$ *und für die* $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \alpha_3$ *einer Halbgruppe* $A \subset \Pi$ *der Gleichung* (19), *ist ferner für solche* $\mathbf{x}$

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, y_1, y_2, y_3\right] = \mathbf{x} \qquad \left(\textit{bzw.}\ \mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, y_1, y_2, y_3\right] = \mathbf{x}\right)$$

bzw.

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, 1, y_2, y_3\right] = \mathbf{x}$$

bzw.

$$f(a_3, 1, 0, y_3) = \mathbf{x} \qquad \left(a_1, a_2, a_3\ \textit{konstant};\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ y_3 \end{pmatrix} \in A\right)$$

bezüglich $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ $\left(\textit{bzw.}\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\ \textit{bzw.}\ \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\ \textit{bzw.}\ y = y_3\right)$ *(je nachdem* $u = \dim \mathbf{x} > 3, = 3, = 2, = 1$*) eindeutig lösbar, so ist für diese* $\mathbf{x}$ *und* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \frac{g_1(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] \tag{20}$$

$$\left(\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ g_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \ g_1 \neq 0, \ \mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{y})] = \mathbf{y}\right).$$

In den Fällen $u = \dim \mathbf{x} = 3, 2, 1$ *fehlen die Zeilen mit* $\mathbf{g}_0$ *bzw.* $\mathbf{g}_0, g_1$ *bzw.* $\mathbf{g}_0, g_1, g_2$. — (20) *erfüllt* (19) *sowie die Gleichung*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, 0, 0) = x.$$

(20) *ist also unter diesen Bedingungen das Transformationsgesetz der rein differentiellen geometrischen Objekte dritter Klasse mit beliebig vielen Komponenten im eindimensionalen Raum.*

Wenn man (20) mit den Resultaten von [2] II vergleicht, sieht man, daß bei unseren Voraussetzungen jedes eindimensionale Objekt dritter Klasse mit beliebiger Komponentenzahl einem Objekte äquivalent ist, dessen letzte bzw. vorletzte bzw. die davorstehende Komponente bzw. die übrigen Komponenten sich als eindimensionale Objekte mit einer Komponente und von dritter bzw. zweiter bzw. erster Klasse transformieren bzw. konstant bleiben (sich als Objekte nullter Klasse transformieren). Man sieht auch, daß sich (18) und (16) aus (20) durch Weglassung der letzten bzw. der beiden letzten Zeilen ergeben.

4. Die bisherigen Sätze (insbesondere der Satz 1) haben den Mangel, daß sie im Spezialfall $u = 1$ (eine Komponente) ein bekanntes Objekt, nämlich die Weylsche Dichte mit dem Transformationsgesetz

$$\bar{z} = f(z, \alpha_1) = z|\alpha_1|$$

nicht enthalten (bzw. nur für positive α_1 enthalten, wo sie mit der gewöhnlichen Dichte $\bar{z} = z\alpha_1$ zusammenfällt), da die Voraussetzung der *eindeutigen* Lösbarkeit von

$$x = f(a_1, y_1) = a_1|y_1| \qquad (y_1 \neq 0)$$

bezüglich y_1 nicht erfüllt ist, falls *alle* nicht-verschwindende reelle y_1 erlaubt sind. Dagegen ist die Eindeutigkeit der Lösung unter den *positiven* y_1 gesichert, jedenfalls besteht dann die *Lösbarkeit* selbst nur für $\operatorname{sg} x = \operatorname{sg} a_1$. Dies gibt den Gedanken, unsere Bedingungen in diesem Sinn zu schwächern. Wir beweisen so den

SATZ 4. *Genügt* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *für jedes* $\mathbf{x} \in X_- \cup X_+$ $(X_- \cap X_+ = 0)$ *und für jedes* $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \alpha_3$ *der Gleichung* (19) *und ist außerdem*

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ a_{\pm 1} \\ a_{\pm 2} \\ a_{\pm 3} \end{pmatrix}, y_1, y_2, y_3\right] = \mathbf{x} \tag{27}$$

für $\mathbf{x} \in X_\pm$ *bezüglich* $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ *mit* $y_1 > 0$ *eindeutig lösbar (mit* $y_1 = 1$ *bzw.*

$y_1 = 1, y_2 = 0$ *für* $u = \dim \mathbf{x} = 2, 1$), *so ist für diese* $\mathbf{x}$ *und* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *bei* $\alpha_1 > 0$ $f(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *durch* (20), *für* $\alpha_1 < 0$ *dagegen durch*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{e}_0[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \\ -e_1[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ -\dfrac{e_2[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]}{g_1(\mathbf{x})\alpha_1} + \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{e_3[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]}{g_1(\mathbf{x})^2\alpha_1^2} + \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] \tag{28}$$

$$(g_1(\mathbf{x}), e_1(\mathbf{y}_0) \neq 0)$$

dargestellt, wo $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ g_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$ *eine umkehrbar eindeutige Vektorfunktion ist,*

und bezüglich $\mathbf{e}(\mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0) \\ e_1(\mathbf{y}_0) \\ e_2(\mathbf{y}_0) \\ e_3(\mathbf{y}_0) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] &= \mathbf{y}_0 \\ e_1[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] &= e_1(\mathbf{y}_0)^{-1} \\ e_2[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] &= e_2(\mathbf{y}_0)e_1(\mathbf{y}_0) \\ e_3[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] &= -e_3(\mathbf{y}_0)e_1(\mathbf{y}_0)^2 \end{aligned} \tag{29}$$

gelten. — (28) *mit* (29) *erfüllen* (19) *für jedes* $\alpha_1 \neq 0, \alpha_2, \alpha_3$ *und für jedes* $\mathbf{x} \in X_- \cup X_+$ *und auch*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, 0, 0) = \mathbf{x}.$$

Ist die Klassenzahl $v = 2, 1$, *so sind die letzten bzw. die beiden letzten Zeilen in* (28) *und* (29), *sowie* $a_{\pm 3}, y_3$ *bzw.* $a_{\pm 2}, a_{\pm 3}, y_2, y_3$ *in* (27) *wegzulassen. Ist die Komponentenzahl* $u \leqq v$, *so sind die bezüglichen Zeilen von oben wegzulassen und es wird*

für $u = v: e_1, e_2, e_3$ *konstant und zwar entweder* $e_1 = 1, e_2$ *beliebig,* $e_3 = 0$ *oder* $e_1 = -1$, $e_2 = 0$, $e_3 = 0$,

für $u < v: e_2 = e_3 = 0$.

Unter den obigen Bedingungen sind also die allgemeinen Transformationsformeln der eindimensionalen differentiellen geometrischen Objekte erster, zweiter und dritter Klasse ($v = 1, 2, 3$) *mit beliebiger Komponentenzahl* u *durch die folgende Tabelle gegeben:*

v	u	*Transformationsformeln* für $\alpha_1 > 0$	*Transformationsformeln* für $\alpha_1 < 0$	*e-Formeln*
1	1	$y = h[g(x)\alpha_1]$	$\begin{cases} y = h[g(x)\alpha_1] \\ y = h[g(x)\lvert\alpha_1\rvert] \end{cases}$	—
	$\geqq 2$	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \end{pmatrix}\right]$	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{e}_0[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \\ e_1[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]g_1(\mathbf{x})\lvert\alpha_1\rvert \end{pmatrix}\right]$	$\mathbf{e}_0[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = \mathbf{y}_0$ $e_1[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = e_1(\mathbf{y}_0)^{-1}$
2	1	$y = h\left[\dfrac{g(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\right]$		—
	2	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}\right]$	$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}\right] \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x})\lvert\alpha_1\rvert \\ \dfrac{e_2}{g_1(\mathbf{x})\lvert\alpha_1\rvert} + \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}\right] \end{cases}$	—
	$\geqq 3$	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}\right]$	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{e}_0[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \\ e_1[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]g_1(\mathbf{x})\lvert\alpha_1\rvert \\ \dfrac{e_2[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]}{g_1(\mathbf{x})\lvert\alpha_1\rvert} + \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}\right]$	$\mathbf{e}_0[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = \mathbf{y}_0$ $e_1[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = e_1(\mathbf{y}_0)^{-1}$ $e_2[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = e_2(\mathbf{y}_0)e_1(\mathbf{y}_0)$

<table>
<tr><th rowspan="2">v</th><th rowspan="2">u</th><th colspan="2">Transformationsformeln</th><th rowspan="2">e-Formeln</th></tr>
<tr><th>für $\alpha_1 > 0$</th><th>für $\alpha_1 < 0$</th></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td colspan="2">$y = h\left[\frac{g(x)}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}\right]$</td><td>—</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td colspan="2">$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right]$</td><td>—</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} \\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}\, g_2(\mathbf{x}) + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha^4} \end{pmatrix}\right]$ (s. Nachtrag)</td><td>—</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} \\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right]$</td><td>$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} \\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \frac{g_2(\mathbf{x})}{|\alpha_1|} \\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] \end{array}\right.$ (s. Nachtrag)</td><td>—</td></tr>
</table>

v	u	*Transformationsformeln* für $\alpha_1 > 0$	*Transformationsformeln* für $\alpha_1 < 0$	*e-Formeln*
3	3	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x})\,\alpha_1 \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right]$	$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x})\,\alpha_1 \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] \\ \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x})\,\lvert\alpha_1\rvert \\ \dfrac{e_2}{g_1(\mathbf{x})\,\lvert\alpha_1\rvert} + \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] \end{array}\right.$	—
	$\geqq 4$	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})\,\alpha_1 \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right]$	$\mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{e}_0[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})] \\ e_1[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]\,g_1(\mathbf{x})\,\lvert\alpha_1\rvert \\ \dfrac{e_2[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]}{g_1(\mathbf{x})\,\lvert\alpha_1\rvert} + \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{e_3[\mathbf{g}_0(\mathbf{x})]}{g_1(\mathbf{x})^2\alpha_1^2} + \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right]$	$e_0[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = \mathbf{y}_0$ $e_1[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = e_1(\mathbf{y}_0)^{-1}$ $e_2[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = e_2(\mathbf{y}_0)\,e_1(\mathbf{y}_0)$ $e_3[\mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0)] = -e_3(\mathbf{y}_0)\,e_1(\mathbf{y}_0)$

[Die Teilung $X_- \cup X_+$ $(X_+ \cap X_- = u)$ ähnelt der Teilung $\alpha_1 \gtrless 0$ der $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.]

Beweis. Aus dem Satz 3, der auch die Sätze 1, 2 enthält, folgt für $\alpha_1 > 0$ bei $\mathbf{x} \in X_+$ das Bestehen von (20) mit $g_1(x) > 0$. Da (20) bei dem Ersetzen von

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ g_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{h}\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ -g_1(\mathbf{x}) \\ g_2(\mathbf{x}) \\ g_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{h}\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ -y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

gültig bleibt, kann $g_1(\mathbf{x}) \gtrless 0$ für $\mathbf{x} \in X_\pm$ genommen werden. So haben die zu den beiden Fällen gehörenden zwei Funktionen $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ verschiedene Definitionsbereiche (X_+, X_-) und Wertevorräte $(y_1 > 0, y_1 < 0)$, und deshalb führt es zu keinem Mißverständnis, wenn beide mit demselben Funktionenzeichen $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ bezeichnet werden. So gilt

$$\text{(20)} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] \quad \text{für} \quad \alpha_1 > 0, \quad \mathbf{x} \in X_+ \cup X_-,$$

insbesondere

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, 0, 0) = \mathbf{x}.$$

Für $\alpha_1 < 0$ folgt aus (19)

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, -1, 0, 0), -\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3] = \\ &= \mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3), -1, 0, 0], \end{aligned}$$

oder mit (20) und mit $\mathbf{g}(\mathbf{f}[\mathbf{h}(\mathbf{y}), -1, 0, 0]) = \mathbf{d}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_0(\mathbf{y}) \\ d_1(\mathbf{y}) \\ d_2(\mathbf{y}) \\ d_3(\mathbf{y}) \end{pmatrix}$:

$$
(30)\quad
\begin{aligned}
\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{d}_0[\mathbf{g}(\mathbf{x})] \\ -d_1[\mathbf{g}(\mathbf{x})]\alpha_1 \\ -\dfrac{d_2[\mathbf{g}(\mathbf{x})]}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{d_3[\mathbf{g}(\mathbf{x})]}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right] = \\
&= \mathbf{h}\left(\mathbf{d}\left[\begin{pmatrix} \mathbf{g}_0(\mathbf{x}) \\ -g_1(\mathbf{x})\alpha_1 \\ -\dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix}\right]\right),
\end{aligned}
$$

und hieraus mit $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$:

$$
\mathbf{d}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ -\dfrac{1}{\alpha_1} \\ -\alpha_1 \\ \alpha_1^2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{d}\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ -y_1\alpha_1 \\ -\dfrac{y_2}{\alpha_1} - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{y_3}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \\ -\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1} + \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} \end{pmatrix}.
$$

Nehmen wir z. B. für $\mathbf{x} \in X_+, y_1 > 0$ (der andere Fall läßt sich analog erledigen)

$$
\alpha_1 = -\frac{1}{y_1}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = -y_2, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} = -y_3
$$

und bezeichnen

$$
\mathbf{d}\begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}(\mathbf{y}_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0(\mathbf{y}_0) \\ e_1(\mathbf{y}_0) \\ e_2(\mathbf{y}_0) \\ e_3(\mathbf{y}_0) \end{pmatrix},
$$

so wird

$$
\mathbf{d}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ y_1 \\ y_1^{-1} \\ y_1^{-2} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{y}_0) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ -y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.
$$

Setzen wir dies in (30) ein, so erhalten wir (28); setzen wir dagegen (28) z. B. in

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, -1, 0, 0), -1, 0, 0] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, 0, 0) = \mathbf{x}$$

ein (vgl. (19)), so ist (29) unmittelbar einsehbar. — Auch die Spezialfälle $v < 3$ und $u \leqq v$ können mittels der bezüglichen Spezialisierung des Beweises sofort erledigt werden.

Substituieren wir (28) in (19) und nehmen (29) in Betracht, so sehen wir, daß (19) tatsächlich erfüllt wird. Damit ist der Beweis vollendet.

Jedenfalls gelangten wir unter diesen Bedingungen bei $\alpha_1 < 0$ zu wesentlich mehr verwickelten Formeln, als bei den Bedingungen der Sätze 1, 2, 3, während bei $\alpha_1 > 0$ die Formeln dieselben blieben.

(Eingegangen am 8. Juni 1956.)

Nachtrag

Wir vergleichen in diesem Nachtrag die Resultate des § 4 der vorstehenden Arbeit mit den Ergebnissen anderer Verfasser über denselben Gegenstand.

O. E. GHEORGHIU hat sich in [6] mit (differentiellen geometrischen) Objekten erster Klasse von zwei Komponenten im eindimensionalen Raum beschäftigt und findet (entgegen seiner Behauptung wegen Rechnungsfehler nicht alle derivierbare, sondern nur) alle jene Objekte, die von der Gestalt

$$y_0 = x_0 + k(x_1 - \lambda x_0, \alpha_1), \quad y_1 = x_1 + \lambda k(x_1 - \lambda x_0, \alpha_1)$$

sind. Er beweist, daß diese Transformationsformeln

$$y_0 = x_0 + l(x_1 - \lambda x_0) \log|\alpha_1|, \quad y_1 = x_1 + \lambda l(x_1 - \lambda x_0) \log|\alpha_1|$$

sind.

Nimmt man

$$z_0 = g_0\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right] = x_1 - \lambda x_0, \quad w_0 = g_0\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right] = y_1 - \lambda y_0,$$

$$z_1 = g_1\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right] = e^{\frac{x_1}{l(x_1 - \lambda x_0)}}, \quad w_1 = g_1\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right] = e^{\frac{y_1}{l(y_1 - \lambda y_0)}},$$

so sieht man, daß diese Objekte sich mit

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x_1 - \lambda x_0 \\ e^{\frac{x_1}{l(x_1 - \lambda x_0)}} \end{pmatrix}$$

in

$$w_0 = z_0, \quad w_1 = z_1 |\alpha_1|, \qquad \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})|\alpha_1| \end{pmatrix}\right] \qquad (\mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{z})] = \mathbf{z})$$

einreihen lassen, was der Spezialfall

$$e_0(y_0) = y_0, \quad e_1(y_0) = 1$$

der zweiten Zeile unserer Tabelle ist.

In [5] findet O. E. Gheorghiu sämtliche Objekte erster Klasse von zwei Komponenten im eindimensionalen Raum, deren Transformationsformeln Spezialfälle von

$$y_0 = x_0 + k_0(\alpha_1), \quad y_1 = x_1 + \frac{k_1(\alpha_1)}{k_0(\alpha_1)}(e^{k_0(\alpha_1)} - 1)e^{x_1}$$

sind und findet, daß diese von der Gestalt

$$y_0 = x_0 + \lambda \log|\alpha_1|, \quad y_1 = x_1 + \varkappa(|\alpha_1|^{\lambda} - 1)e^{x_1}$$

sein müssen.

Auch dies geht durch

$$z_0 = g_0\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right] = x_1 - \varkappa e^{x_0}, \qquad w_0 = g_0\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right] = y_1 - \varkappa e^{y_0},$$

$$z_1 = g_1\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right] = e^{\frac{x_0}{\lambda}}, \qquad w_1 = g_1\left[\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right] = e^{\frac{y_0}{\lambda}},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}\left[\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x_1 - \varkappa e^{x_0} \\ e^{\frac{x_0}{\lambda}} \end{pmatrix}$$

in

$$w_0 = z_0, \quad w_1 = z_1|\alpha_1|, \qquad \mathbf{y} = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_0(\mathbf{x}) \\ g_1(\mathbf{x})|\alpha_1| \end{pmatrix}\right]$$

über.

In [4] untersucht derselbe Verfasser Objekte zweiter Klasse von zwei Komponenten und findet (entgegen seiner Behauptung wieder nicht alle derivierbare, sondern nur) alle jene Objekte, die von der Gestalt

$$y_1 = \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} k(x_1 - x_2) + l(x_1 - x_2)m(\alpha_1),$$

$$y_2 = \frac{x_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} k(x_1 - x_2) + l(x_1 - x_2)m(\alpha_1)$$

sind, indem er beweist, daß ihre Transformationsformeln nur von der Gestalt

$$y_1 = \frac{x_1}{\alpha_1} + \varkappa\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} + \lambda\left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right), \quad y_2 = \frac{x_2}{\alpha_1} + \varkappa\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} + \lambda\left(1 - \frac{1}{\alpha_1}\right)$$

sein können, über welche er selbst bemerkt, daß sie mit

$$y_1=\frac{x_1}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2},\quad y_2=\frac{x_2}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}$$

äquivalent sind.

Diese letzteren gehen durch

$$z_1=g_1\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{x_2-x_1},\quad w_1=g_1\left[\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{y_2-y_1},$$

$$z_2=g_2\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right]=x_2,\qquad w_2=g_2\left[\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right]=y_2,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})=\mathbf{g}\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{x_2-x_1}\\x_2\end{pmatrix}$$

in

$$w_1=z_1\alpha_1,\qquad \mathbf{y}=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}g_1(\mathbf{x})\alpha_1\\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}+\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\end{pmatrix}\right],$$

$$w_2=\frac{z_2}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2},$$

d. h. in die erste Formel der vierten Zeile unserer Tabelle über. (Die obige Bestimmung der Funktionen $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ erfolgte eben mit den im Beweis der Sätze 1, 2 gegebenen Methoden.)

JU. E. PENSOW hat in [9] unter Analytizitätsbedingungen u. a. die Objekte von zwei Komponenten im eindimensionalen Raum untersucht, und fand als Objekte erster, zweiter und dritter Klasse die Objekte der Sätze 1, 2, 3 (nicht aber die des Satzes 4) unserer Arbeit für den Fall $n=2$, und außerdem die mit

$$y_2=\frac{x_2}{\alpha_1},\quad y_3=\frac{x_3}{\alpha_1^2}+x_2\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}-\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\tag{31}$$

äquivalenten Objekte dritter Klasse.

Diese Objekte lassen sich in die bisherigen Ergebnisse unserer Arbeit nicht einreihen, da die in den Sätzen 3, 4 geforderte eindeutige Lösbarkeit von

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix}a_2\\a_3\end{pmatrix},1,y_2,y_3\right]=\mathbf{x}\tag{32}$$

bezüglich $\begin{pmatrix}y_2\\y_3\end{pmatrix}$ für

$$x_2=a_2,\quad x_3=a_3+a_2y_2-\frac{3}{2}y_2^2+y_3$$

offenbar nicht erfüllt ist.

Es ist aber auch eine gewisse Willkür in der Bedingung (32), mehr als in den übrigen Bedingungen unserer Arbeit. Da die Zahl der Parameter größer ist als die der Komponenten, muß nämlich ein Parameter festgehalten werden. Dies muß aber nicht $\alpha_1=1$ sein, es kann auch $\alpha_2=0$ genommen werden, da nicht nur die Elemente $\{1,\alpha_2,\alpha_3\}$, sondern auch die $\{\alpha_1, 0, \alpha_3\}$ eine zweiparametrige Untergruppe der Gruppe mit der „Multiplikation"

$$\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}=\{\beta_1\alpha_1,\beta_2\alpha_1^2+\beta_1\alpha_2,\beta_3\alpha_1^3+\beta_1\alpha_3+3\beta_2\alpha_1\alpha_2\}$$

der Elemente $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ $(\alpha_1 \neq 0)$ bilden. Wird tatsächlich die Bedingung (32) durch die Forderung der eindeutigen Lösbarkeit von

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix}a_2\\a_3\end{pmatrix}, y_2, 0, y_3\right]=\mathbf{x}$$

bezüglich $\begin{pmatrix}y_2\\y_3\end{pmatrix}$ ersetzt, so erhalten wir außer den Objekten (20) bzw. (28) (für $n=2$) auch die mit den Pensowschen Objekten (31) äquivalenten Objekte.

Wir beweisen nämlich den folgenden

SATZ 5. *Genügt* $\mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ $\left(\alpha_1\neq 0, \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}\in X\right)$ *der Funktionalgleichung*

$$(19)\qquad \mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\beta_1,\beta_2,\beta_3]=\mathbf{f}(\mathbf{x},\beta_1\alpha_1,\beta_2\alpha_1^2+\beta_1\alpha_2,\beta_3\alpha_1^3+\beta_1\alpha_3+3\beta_2\alpha_2\alpha_1)$$

und ist

$$\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix}a_{\pm 2}\\a_{\pm 3}\end{pmatrix}, y_2, 0, y_3\right]=\mathbf{x}$$

bezüglich $\begin{pmatrix}y_2\\y_3\end{pmatrix}=\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})$ *eindeutig lösbar (ob* 1) *bei* $\mathbf{x}\in X, a_{-2}=a_2, a_{-3}=a_3$ *für beliebiges* $y_2\neq 0$, *oder* 2) *bei* $\mathbf{x}\in X_{\pm}, X_-\cup X_+=X, X_-\cap X_+=0$ *für die* $y_2>0$), *ist ferner*

$$\mathbf{g}\left\{\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix}a_{\pm 2}\\a_{\pm 3}\end{pmatrix}, 1, \alpha_2, 0\right]\right\}$$

in $\alpha_2=0$ *bezüglich* α_2 *derivierbar, so gilt entweder*

$$(33)\qquad \mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}+c_2\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\[2ex] \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1}+c_3\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^3}g_2(\mathbf{x})+\dfrac{c_2c_3-3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right]$$

($\mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{y})]=\mathbf{y}$; c_2, c_3 *beliebige Konstanten) oder* [2)]

$$(34)\qquad \mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\dfrac{g_2(\mathbf{x})}{|\alpha_1|}\\[2ex] \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}-\dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}\end{pmatrix}\right]\qquad (\mathbf{g}[\mathbf{h}(\mathbf{y})]=\mathbf{y}),$$

womit für alle erlaubten $\mathbf{x}, \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ (19), *sowie* $\mathbf{f}(\mathbf{x},1,0,0)=\mathbf{x}$ *erfüllt ist.*

Diese eindimensionalen differentiellen geometrischen Objekte dritter Klasse von zwei Komponenten sind mit einer der durch die folgenden Transformationsformeln bestimmten vier Objekte äquivalent:

$$(35)\qquad y_2=\frac{x_2}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2},\qquad y_3=\frac{x_3}{\alpha_1^2}-\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3},$$

$$(31)\qquad y_2=\frac{x_2}{\alpha_1},\qquad y_3=\frac{x_3}{\alpha_1^2}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3}x_2-\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3},$$

$$(36)\qquad y_2=\frac{x_2}{\alpha_1},\qquad y_3=\frac{x_3}{\alpha_1^2}-\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3},$$

$$(37)\qquad y_2=\frac{x_2}{|\alpha_1|},\qquad y_3=\frac{x_3}{\alpha_1^2}-\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}.$$

Wir haben auch die mit (31), (36), (37) äquivalenten Objekte in unsere Tabelle schon eingetragen.

BEWEIS. 1. Man setze in (19) $\alpha_2=\beta_2=0$, so wird

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,0,\alpha_3),\beta_1,0,\beta_3]=\mathbf{f}(\mathbf{x},\beta_1\alpha_1,0,\beta_3\alpha_1^3+\beta_1\alpha_3).$$

Da dies eine Gleichung von der Gestalt (1) ist, wird laut des Hilfssatzes, falls unsere Voraussetzung erfüllt ist,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,0,\alpha_3)=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} g_2(\mathbf{x})\alpha_1 \\ g_3(\mathbf{x})\alpha_1+g_2(\mathbf{x})^3\alpha_3\end{pmatrix}\right],\quad \mathbf{h}[g(x)]=x$$

(insbesondere $\mathbf{f}(\mathbf{x},1,0,0)=\mathbf{x}$) oder mit

$$\bar{\mathbf{h}}\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{y_2}\\ \frac{y_3}{y_2^3}\end{pmatrix}\right]=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}y_2\\ y_3\end{pmatrix}\right],\qquad \bar{g}_2(\mathbf{x})=\frac{1}{g_2(\mathbf{x})},\quad \bar{g}_3(\mathbf{x})=\frac{g_3(\mathbf{x})}{g_2(\mathbf{x})^3}:$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,0,\alpha_3)=\bar{\mathbf{h}}\left[\begin{pmatrix}\frac{\bar{g}_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}\\ \frac{\bar{g}_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right].$$

Wird andererseits diese Formel (die Oberstriche weggelassen) in (19) mit $\alpha_2=\beta_3=0$, $\beta_1=1$ eingesetzt, so erhalten wir

$$\mathbf{f}\left\{\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}\\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right],1,\beta_2,0\right\}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,\beta_2\alpha_1^2,\alpha_3)$$

oder mit $\beta_2 \alpha_1^2 = \bar{\alpha}_2$, $\bar{\mathbf{f}}(y, \alpha_2) = \mathbf{g}\{\mathbf{f}[\mathbf{h}(\mathbf{y}), 1, \alpha_2, 0]\}$:

$$\text{(38)} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \bar{\alpha}_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left\{\bar{\mathbf{f}}\left[\begin{pmatrix} \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} \\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \end{pmatrix}, \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_1^3}\right]\right\}.$$

Setzen wir jetzt dies in (19) mit

$g_2(\mathbf{x}) = y_2$, $g_3(\mathbf{x}) = y_3$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\beta_1 = y_2$, $\beta_3 = -\beta_1 y_3 = -y_2 y_3$

ein, so wird mit den Bezeichnungen (6)

$$\begin{pmatrix} y_2^{-1} \\ y_2^{-2} \end{pmatrix} \cdot \bar{\mathbf{f}}\left[\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \alpha_2\right] + \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{y_3}{y_2^2} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{f}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\alpha_2}{y_2}\right]$$

oder mit

$$\mathbf{C}(\alpha_2) = \bar{\mathbf{f}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2\right] = \mathbf{g}\left(\mathbf{f}\left\{\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right], 1, \alpha_2, 0\right\}\right) = \mathbf{g}\left\{\mathbf{f}\left[\begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, 1, \alpha_2, 0\right]\right\}$$

einerseits

$$\mathbf{C}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

andererseits

$$\bar{\mathbf{f}}\left[\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \alpha_2\right] = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2^2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{C}\left(\frac{\alpha_2}{y_2}\right) + \begin{pmatrix} 0 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

(38) geht hiermit in

$$\text{(39)} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} \dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} C_2\left(\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 g_2(\mathbf{x})}\right) \\ \dfrac{g_2(\mathbf{x})^2}{\alpha_1^2} C_3\left(\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 g_2(\mathbf{x})}\right) + \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \end{pmatrix}\right]$$

über, was wir in (19) zurücksubstituieren, um nach den möglichen Verkürzungen

$$C_2(\xi) C_2\left(\frac{\eta}{C_2(\xi)}\right) = C_2(\xi + \eta) \qquad (C_2(0) = 1),$$

$$C_2(\xi)^2 C_3\left(\frac{\eta}{C_2(\xi)}\right) + C_3(\xi) = C_3(\xi + \eta) + 3\xi\eta \qquad (C_3(0) = 0)$$

zu erhalten, wo

$$\xi = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 g_2(\mathbf{x})}, \quad \eta = \frac{\beta_2 \alpha_1}{\beta_1 g_2(\mathbf{x})}$$

bezeichnet wurde.

Ohne Voraussetzungen über $\mathbf{C}(\xi)$ würden wir zu kein vernünftiges Ergebnis gelangen, da unser Gleichungssystem z. B. durch

$$C_2(\xi)=1, \quad C_3(\xi)=-\frac{3}{2}\xi^2+\lambda(\xi)$$

erfüllt ist, wo $\lambda(\xi)$ eine beliebige (also möglicherweise völlig unstetige) Lösung von

$$\lambda(\xi+\eta)=\lambda(\xi)+\lambda(\eta)$$

bedeutet, d. h. wir erhielten mit

$$y_2=\frac{x_2}{\alpha_1}, \quad y_3=\frac{x_2^2}{\alpha_1^2}\lambda\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 x_2}\right)+\frac{x_3}{\alpha_1^2}-\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}$$

äquivalente Objekte mit unstetigen Transformationsformeln.

Da aber laut unserer Voraussetzungen $\mathbf{C}(\alpha_2)$ bei $\alpha_2=0$ derivierbar ist, können wir unser Gleichungssystem folgenderweise lösen:

$$\frac{C_2(\xi+\eta)-C_2(\xi)}{\eta}=\frac{C_2\left(\frac{\eta}{C_2(\xi)}\right)-C_2(0)}{\frac{\eta}{C_2(\xi)}},$$

und da die rechte Seite bei $\eta\to 0$ einen Grenzwert $C_2'(0)$ besitzt, gilt dasselbe auch für die linke:

$$C_2'(\xi)=C_2'(0)=c_2,$$

und

$$C_2(\xi)=c_2\xi+1$$

wegen

$$C_2(0)=1.$$

Weiter wird

$$(c_2\xi+1)^2 C_3\left(\frac{\eta}{c_2\xi+1}\right)+C_3(\xi)=C_3(\xi+\eta)+3\xi\eta,$$

d. h.

$$\frac{C_3(\xi+\eta)-C_3(\xi)}{\eta}=-3\xi+\frac{C_3\left(\frac{\eta}{c_2\xi+1}\right)-C_3(0)}{\frac{\eta}{c_2\xi+1}}(c_2\xi+1);$$

und wieder wegen der Konvergenz der rechten Seite bei $\eta\to 0$:

$$C_3'(\xi)=-3\xi+C_3'(0)(c_2\xi+1)=-3\xi+c_3(c_2\xi+1),$$

also integriert:

$$C_3(\xi)=\frac{c_2c_3-3}{2}\xi^2+c_3\xi$$

wegen

$$C_3(0) = 0.$$

Wenn wir nun dies in (39) einsetzen, erhalten wir die Formel (33) die der Gleichung (19) genügt.

BEMERKUNG. Fordern wir statt der Derivierbarkeit z. B., daß $C_2(\xi)$ *höchstens eine Nullstelle habe,* so wird aus

$$C_2(\xi) C_2\left(\frac{\eta}{C_2(\xi)}\right) = C_2(\xi + \eta),$$

falls wir den Fall

$$C_2(\xi) = 1$$

ausschließen, durch das Einsetzen von $\eta = \frac{\xi C_2(\xi)}{1 - C_2(\xi)}$ $\left(\text{also } \xi + \eta = \frac{\eta}{C_2(\xi)} = \frac{\xi}{1 - C_2(\xi)}\right)$:

$$C_2\left(\frac{\xi}{1 - C_2(\xi)}\right) = 0, \qquad \frac{\xi}{1 - C_2(\xi)} = \text{konstant} = -\frac{1}{c_2},$$

und wieder

$$C_2(\xi) = c_2 \xi + 1,$$

wozu auch $C_2(\xi) = 1$ gehört, falls $c_2 = 0$ ist.

Ist $c_2 \neq 0$, so folgt aus

$$(c_2\xi + 1)^2 C_3\left(\frac{\eta}{c_2\xi + 1}\right) + C_3(\xi) = C_3(\xi + \eta) + 3\xi\eta$$

mit $\eta = -\xi - \frac{1}{c_2}$ $\left(\text{also } \xi + \eta = \frac{\eta}{c_2\xi + 1} = -\frac{1}{c_2}\right)$:

$$C_3(\xi) = -(c_2^2\xi^2 + 2c_2\xi) C_3\left(-\frac{1}{c_2}\right) - 3\xi^2 - 3\frac{\xi}{c_2},$$

und mit $-\frac{3}{c_2} - 2c_2 C_3\left(-\frac{1}{c_2}\right) = c_3$ wieder:

$$C_3(\xi) = \frac{c_2 c_3 - 3}{2} \xi^2 + c_3 \xi.$$

Hier wurde nichts über $C_3(\xi)$ vorausgesetzt. Ist aber $c_2 = 0$, so führt die so erhaltene Gleichung

$$C_3(\eta) + C_3(\xi) = C_3(\xi + \eta) + 3\xi\eta$$

mit

$$C_3(\xi) + \frac{3}{2}\xi^2 = \lambda(\xi)$$

auf

$$\lambda(\xi+\eta)=\lambda(\xi)+\lambda(\eta),$$

und die Lösung

$$\lambda(\xi)=c_3\xi, \quad C_3(\xi)=-\frac{3}{2}\xi^2+c_3\xi$$

kann nur dann erhalten werden, falls $C_3(\xi)$ als *stetig* (oder meßbar, auf einer Menge von positivem Maß beschränkt, usw.) vorausgesetzt wird.

2. Aus der Voraussetzung 2) folgt, wie bei dem Beweis des Satzes 4, daß für $\alpha_1>0, \mathbf{x}\in X_\pm$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}\dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}+c_2\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2}+c_3\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^3}g_2(\mathbf{x})+\dfrac{c_2c_3-3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right] \tag{33}$$

$(\mathbf{h}[\mathbf{g}(\mathbf{y})]=\mathbf{y}, g_2(\mathbf{x})\gtrless 0)$ gilt. Für $\alpha_1<0$ folgt aus (19) auch hier

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)&=\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x},-1,0,0),-\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_3]=\\&=\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x},-\alpha_1,-\alpha_2,-\alpha_3),-1,0,0]\end{aligned}$$

oder mit (33) und mit $\mathbf{g}(\mathbf{f}[\mathbf{h}(\mathbf{y}),-1,0,0])=\mathbf{d}(\mathbf{y})=\begin{pmatrix}d_2(\mathbf{y})\\ d_3(\mathbf{y})\end{pmatrix}$:

$$\left\{\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x},\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)&=h\left[\begin{pmatrix}-\dfrac{d_2[\mathbf{g}(\mathbf{x})]}{\alpha_1}+c_2\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\ \dfrac{d_3[\mathbf{g}(\mathbf{x})]}{\alpha_1^2}-c_3\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^3}d_2[\mathbf{g}(\mathbf{x})]+\dfrac{c_2c_3-3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right]=\\ &=\mathbf{h}\left\{\mathbf{d}\left[\begin{pmatrix}-\dfrac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}-c_2\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\ \dfrac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2}+c_3\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^3}g_2(\mathbf{x})+\dfrac{c_3c_3-3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right]\right\}\end{aligned}\right. \tag{40}$$

und hieraus mit $\mathbf{y}=\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{y}_2\gtrless 0$, je nachdem $\mathbf{x}\in X_\pm$):

$$d_2(\mathbf{y})=-\alpha_1 d_2\left[\begin{pmatrix}-\dfrac{y_2}{\alpha_1}-c_2\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\ \dfrac{y_3}{\alpha_1^2}+c_3\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^3}y_2+\dfrac{c_2c_3-3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right]+c_2\frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$\begin{aligned}d_3(\mathbf{y})=\alpha_1^2 d_3&\left[\begin{pmatrix}-\dfrac{y_2}{\alpha_1}+c_2\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\ \dfrac{y_3}{\alpha_1^2}+c_3\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^3}y_2+\dfrac{c_2c_3-3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}+\dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3}\end{pmatrix}\right]+\\ &+c_3\frac{\alpha_2}{\alpha_1}d_2(\mathbf{y})-\frac{c_2c_3-3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}-\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}.\end{aligned}$$

Wir nehmen z. B. für $\mathbf{x} \in X_-$, $y_2 < 0$ (der andere Fall läßt sich ebenso erledigen):

$$\alpha_1 = y_2, \quad \alpha_2 = 0, \quad \frac{\alpha_3}{\alpha_1} = -y_3$$

und bezeichnen $\mathbf{d}\left[\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}e_2\\e_3\end{pmatrix}$:

$$d_2(\mathbf{y}) = -y_2 e_2, \quad d_3(\mathbf{y}) = y_3 + y_2^2 e_3.$$

Aus (33) ($\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$) folgt

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, 0, 0) = \mathbf{x},$$

aus (19) ($\alpha_1 = \beta_1 = -1$, $\alpha_2 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_3 = 0$) dagegen

$$\mathbf{f}[\mathbf{f}(\mathbf{x}, -1, 0, 0), -1, 0, 0] = \mathbf{f}(\mathbf{x}, 1, 0, 0) = \mathbf{x},$$

$$\begin{pmatrix}y_2\\y_3\end{pmatrix} = \mathbf{y} = \mathbf{d}[\mathbf{d}(\mathbf{y})] = \begin{pmatrix}y_2 e_2^2\\ y_3 + y_2^2 e_3 + y_2^2 e_2^2 e_3\end{pmatrix},$$

so daß

$$e_2^2 = 1, \quad e_3 = 0$$

sein muß. Setzen wir

$$\mathbf{d}(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix}-e_2 y_2\\ y_3\end{pmatrix}, \quad e_2 = \pm 1$$

in (40) zurück, so erhalten wir

$$c_2(1 - e_2) = 0, \quad c_3(1 - e_2) = 0.$$

Ist also nicht $c_2 = c_3 = 0$, so muß

$$e_2 = 1$$

sein. Für $c_2 = c_3 = 0$ sind

$$e_2 = 1 \quad \text{und} \quad e_2 = -1$$

beide möglich. Dies ergibt eben die Formeln (33) und (34) für $\alpha_1 < 0$ (für $\alpha_1 > 0$ fällt (34) in (33)), die die Gleichung (19) auch tatsächlich erfüllen.

Die Objekte (34) sind offenbar mit den Objekten äquivalent, die durch (37) transformiert werden. Ist

$$c_2 = c_3 = 0, \quad e_2 = 1,$$

so ist (33) mit den Objekten, die durch (36) transformiert werden, äquivalent. Für

$$c_2 = 0, \quad c_3 \neq 0, \quad (e_2 = 1)$$

führen wir

$$\bar{\mathbf{h}}\left[\begin{pmatrix} c_3 y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right] = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right], \qquad \begin{aligned} \bar{g}_2(\mathbf{x}) &= c_3 g_2(\mathbf{x}), \\ \bar{g}_3(\mathbf{x}) &= g_3(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

ein, und erhalten

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \bar{\mathbf{h}}\left[\begin{pmatrix} \dfrac{\bar{g}_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} \\ \dfrac{\bar{g}_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^3}\bar{g}_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}\right],$$

was die Äquivalenz mit dem Pensowschen Objekt (31) zeigt. Endlich ergibt für

$$c_2 \neq 0, \quad (e_2 = 1)$$

die Substitution

$$\bar{\mathbf{h}}\left[\begin{pmatrix} \dfrac{y_2}{c_2} \\ y_3 - \dfrac{c_3}{2c_2} y_2^2 \end{pmatrix}\right] = \mathbf{h}\left[\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right], \qquad \begin{aligned} \bar{g}_2(\mathbf{x}) &= \frac{g_2(\mathbf{x})}{c_2}, \\ \bar{g}_3(\mathbf{x}) &= g_3(\mathbf{x}) - \frac{c_3}{2c_2} g_2(\mathbf{x})^2 \end{aligned}$$

eben

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \bar{h}\left[\begin{pmatrix} \dfrac{\bar{g}_2(\mathbf{x})}{\alpha_1} + \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ \dfrac{\bar{g}_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2} - \dfrac{3}{2}\dfrac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \dfrac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \end{pmatrix}\right], \tag{26}$$

und diese Objekte sind mit denen von der Transformationsformel (35) äquivalent.

Es ist interessant zu bemerken, daß falls das Pensowsche Objekt

$$y_2 = \frac{x_2}{\alpha_1}, \quad y_3 = \frac{x_3}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} x_2 - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}$$

durch ein Objekt mit einer Komponente von z. B. zweiter oder dritter Klasse ergänzt wird, so erfüllen die so erhaltenen Objekte

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \\ y_2 &= \frac{x_2}{\alpha_1}, \\ y_3 &= \frac{x_3}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} x_2 - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}, \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} y_1 &= \frac{x_1}{\alpha_1^2} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}, \\ y_2 &= \frac{x_2}{\alpha_1}, \\ y_3 &= \frac{x_3}{\alpha_1^2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1^3} x_2 - \frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4} + \frac{\alpha_3}{\alpha_1^3} \end{aligned}$$

schon die Bedingungen unseres Satzes 3 und können deshalb mit den Transformationen

$$\mathbf{g}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}\frac{1}{x_2}\\ x_1\\ x_3-x_1x_2\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}\frac{1}{x_2}\\ \frac{x_3-x_1}{x_2}\\ x_1\end{pmatrix},$$

$$z_1=g_1\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{x_2}, \qquad z_1=g_1\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{x_2},$$

$$z_2=g_2\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]=x_1, \qquad z_2=g_2\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]=\frac{x_3-x_1}{x_2},$$

$$z_3=g_3\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]=x_3-x_1x_2, \qquad z_3=g_3\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\right]=x_1,$$

$$w_1=g_1\left[\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{y_2}, \qquad w_1=g_1\left[\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{y_2},$$

$$w_2=g_2\left[\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right]=y_1, \qquad w_2=g_2\left[\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right]=\frac{y_3-y_1}{y_2},$$

$$w_3=g_3\left[\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right]=y_3-y_1y_2, \qquad w_3=g_3\left[\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right]=y_1,$$

$$w_1=z_1\alpha_1,$$

$$w_2=\frac{z_2}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2},$$

$$w_3=\frac{z_3}{\alpha_1^2}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}-\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}$$

in (20) übertragen werden:

$$\mathbf{y}=\mathbf{h}\left[\begin{pmatrix}g_1(\mathbf{x})\alpha_1\\ \frac{g_2(\mathbf{x})}{\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}\\ \frac{g_3(\mathbf{x})}{\alpha_1^2}+\frac{\alpha_3}{\alpha_1^3}-\frac{3}{2}\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^4}\end{pmatrix}\right].$$

Für weitere, sich auf unseren Gegenstand beziehende Ergebnisse verweisen wir den Leser auf die demnächst erscheinende Arbeit [7] von M. HOSSZÚ.

(Eingegangen am 11. Oktober 1956.)

Literaturverzeichnis

[1] J. ACZÉL Lösung der Vektor-Funktionalgleichung der homogenen und inhomogenen n-dimensionalen einparametrigen „Translation", der erzeugenden Funktion von Kettenreaktionen und des stationären und nicht-stationären Bewegungsintegrals, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), S. 131—141.

[2] J. ACZÉL, Beiträge zur Theorie der geometrischen Objekte. I—II, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), S. 339—354.

[3] J. ACZÉL and M. HOSSZÚ, On transformations with several parameters and operations in multidimensional spaces, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **7** (1956), S. 327—338.

[4] O. E. GHEORGHIU, Determinarea legii de transformarea obiectelor diferenţial geometrice de clasa a IIa cu două componente in X_1, *Comunicarile Ac. R. P. Romane,* **1** (1951), S. 1017—1020.

[5] O. E. GHEORGHIU, Un obiect geometric pseudolinear de clasa I cu două componente, *Comunicarile Ac. R. P. Romane,* **2** (1952), S. 1—4.

[6] O. E. GHEORGHIU, Obiecte geometrice diferenţiale de clasa I cu două componente in X_1, *Studii Si. Cerc. Stiint. Timişoara,* Ser. I, **2** (1955), S. 21—25.

[7] M. HOSSZÚ, Functional equations and algebraic methods in the theory of geometric objects. I—II—III, *Publ. Math. (Debrecen),* **5** (1957) (im Erscheinen).

[8] A. NIJENHUIS, *Theory of the geometric object* (Amsterdam, 1952).

[9] Ю. Е. Пензов, О дифференциально-геометрических овъектах класса v в X_1, Мат. Сборник, **26** (1950), S. 161—182.

[10] Ю. Е. Пензов, Классификация геометрических дифференциальных объектов с двумя компонентами, ДАН СССР, **80** (1951), S. 537—540.

[11] V. WAGNER, The theory of geometric objects and the theory of finite and infinite continuous groups of transformations, ДАН СССР, **46** (1945), S. 383—386.

[12] В. В. Вагнер, Классификация простых геометрических дифференциальных объектов, ДАН СССР, **69** (1949), S. 293—296.