Periodica Mathematica Hungarica Vol. 5 (3), (1974), pp. 195—199.

DIE DICHTE EINER KUGELPACKUNG IN EINER 4-DIMENSIONALEN SCHICHT

von

J. HORVÁTH (Budapest)

In einer gemeinsamen Arbeit mit J. MOLNÁR [4] haben wir eine obere Schranke für die Dichte einer Menge von nicht übereinandergreifenden Einheitskugeln, die in einer 3-dimensionalen Schicht der Breite t liegen, gegeben, wenn $2 \leqq t \leqq 4$ ist. Diese Schranke läßt sich im Falle $t = 2$ und $t = 2 + \sqrt{2}$ nicht verbessern.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit dem analogen Problem im 4-dimensionalen Raum. Wir geben eine obere Schranke für die Dichte der Kugelpackung im Falle $2 \leqq t < 2 + \sqrt{2}$ und konstruieren eine ziemlich dichte Packung für $2 \leqq t \leqq 3$.

Im folgenden definieren wir die Dichte einer in einer Schicht liegenden Kugelpackung. Betrachten wir im 4-dimensionalen euklidischen Raum eine von zwei parallelen Hyperebenen begrenzte Schicht und bezeichnen sie mit $\Gamma(t)$, wo t der Abstand der Hyperebenen ist. Es sei $\{S_i\}$ eine Menge von in $\Gamma(t)$ liegenden, nicht übereinandergreifenden Einheitskugeln. Betrachten wir einen 4-dimensionalen Zylinder $\mathbf{Z}(R)$ vom Radius R mit einer auf die Schicht senkrechten festen Achse a. Im folgenden bezeichnen wir einen Körper und sein Volumen mit demselben Symbol. Wir definieren die Dichte des Kugelsystems in $\Gamma(t)$ durch

$$d = \overline{\lim_{R \to \infty}} \frac{\Sigma_R S_i}{\mathbf{Z}(R) \cap \Gamma(t)}, \tag{1}$$

wo sich die Summation auf diejenigen Kugeln erstreckt, die ganz in $\mathbf{Z}(R)$ liegen. Man sieht leicht ein, daß der Grenzwert (1) von der Wahl der Achse a des Zylinders unabhängig ist.

Unsere Resultate sind in folgenden zwei Sätzen enthalten:

SATZ 1. *Für $2 \leqq t < 2 + \sqrt{2}$ ist die Dichte einer Packung von Einheitskugeln in $\Gamma(t)$ höchstens*

$$\frac{6\pi(-1 + 4t - t^2)}{t(4t - t^2)\sqrt{-2 + 4t - t^2}} \arcsin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-2 + 4t - t^2}{-1 + 4t - t^2}} \left(\sqrt{\frac{2 + 4t - t^2}{4t - t^2}} - 1 \right). \tag{2}$$

SATZ 2. *Ist $2 \leqq t \leqq 3$, so existiert in $\Gamma(t)$ eine Packung von Einheitskugeln mit der Dichte*

$$\frac{\pi^2}{8t\sqrt{-2+4t-t^2}}\,. \tag{3}$$

Die Funktionen (2) und (3) sind in der beiliegenden Figur dargestellt.

Der Beweis von Satz 1 beruht auf drei im wesentlichen bekannten Hilfssätzen.

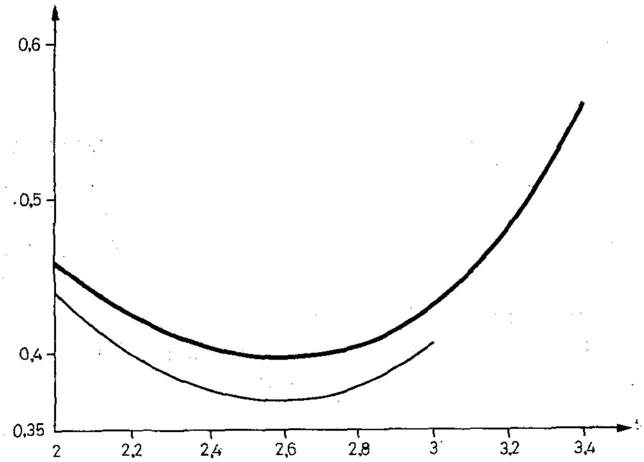

Fig. 1

Wir betrachten eine Menge von Einheitskugeln $\{S_i^*\}$ im 3-dimensionalen euklidischen Raum. Es sei D_i^* die DIRICHLETsche Zelle von S_i^*. D_i^* besteht aus allen Punkten des Raumes, deren Abstand vom Mittelpunkt von S_i^* kleiner ist als ihr Abstand von allen anderen Kugelmittelpunkten.

HILFSSATZ 1. *Entspricht eine Menge von Einheitskugeln $\{S_i^*\}$ im 3-dimensionalen euklidischen Raum der Bedingung, daß alle Abstände zwischen einem beliebigen Kugelmittelpunkt O_i^* und der Flächen, Kanten bzw. Ecken der Dirichletschen Zelle D_i^* mindestens r_1, r_2 bzw. r_3 sind, so ist die Dichte von $\{S_i^*\}$ höchstens*

$$f(r_1, r_2, r_3) = \frac{2 \arcsin \dfrac{\sqrt{(r_3^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_1^2)}}{r_2(r_3 + r_1)}}{r_1 \sqrt{(r_3^2 - r_2^2)(r_2^2 - r_1^2)}}\,. \tag{4}$$

Die geometrische Bedeutung von $f(r_1, r_2, r_3)$ ist folgendes: Es sei $OABC$ ein orthogonales Tetraeder, so daß $OA = r_1$, $OB = r_2$, $OC = r_3$, OA auf die Fläche ABC und BC auf die Fläche OAB senkrecht ist. Wir zeichnen eine

Einheitskugel K um O und betrachten den Durchschnitt Q von K und des Trieders $O(ABC)$. Dann bedeutet $f(r_1, r_2, r_3)$ den Quotient aus dem Rauminhalt von Q und dem Tetraeder $OABC$.

Hilfssatz 1 stammt von K. Böröczky (s. den Beweis von Satz 1 in [1]). Die obere Schranke (4) läßt sich nur dann erreichen, wenn sich der Raum mit kongruenten Exemplaren des oben definierten orthogonalen Tetraeders schlicht und lückenlos ausfüllen läßt.

Hilfssatz 2. *Betrachten wir in einer 3-dimensionalen Schicht der Breite* τ $(0 \leq \tau \leq \sqrt{2})$ *drei Punkte* A, B, C *mit* $\operatorname{Min}(AB, AC, BC) \geq 2$. *Es seien* A^*, B^*, C^* *die senkrechten Projektionen von* A, B, C *auf eine zu der Schicht parallele Ebene. Dann ist der Umkreisradius des Dreiecks* $A^*B^*C^*$ *mindestens*

$$\frac{4 - \tau^2}{2\sqrt{3 - \tau^2}}.$$

Der Beweis findet sich in [4].

Hilfssatz 3. *Es sei* $0 \leq \tau < \sqrt{2}$. *Sind die Länge jeder Kante eines Tetraeders mindestens* $\sqrt{4 - \tau^2}$ *und der Umkreisradius jeder Fläche mindestens* $\dfrac{4 - \tau^2}{2\sqrt{3 - \tau^2}}$, *so ist der Umkreisradius des Tetraeders mindestens* $\dfrac{\sqrt{6 - \tau^2}}{2}$. *Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn die Flächen des Tetraeders kongruente Dreiecke mit den Seitenlängen* $\sqrt{4 - \tau^2}$, $\sqrt{4 - \tau^2}$, 2 *sind.*

Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis des Hilfssatzes in [3].

Beweis des Satzes 1. Die Mittelpunkte $\{O_i\}$ der im Satz 1 betrachteten Einheitskugeln $\{S_i\}$ liegen in einer Schicht $\Gamma(\tau)$, wo $\tau = t - 2$ ist. Es sei Π eine zu der Schicht $\Gamma(\tau)$ parallele Hyperebene. Wir projizieren $\{S_i\}$ senkrecht auf Π und bezeichnen die Projektionen von $\{S_i\}$ und $\{O_i\}$ mit $\{S_i^*\}$ bzw. $\{O_i^*\}$.

Es sei $c = \dfrac{3\pi}{8}$ der Quotient der Rauminhalte einer 4-dimensionalen und einer 3-dimensionalen Einheitskugel. Man sieht leicht ein, daß für die in (1) definierte Dichte

$$d = \frac{c}{t} d^* \tag{5}$$

gilt, wo d^* die in der üblichen Weise definierte Dichte von $\{S_i^*\}$ im 3-dimensionalen euklidischen Raum ist (s. [2]).

Wir betrachten den Abstand von O_i^* von der nächsten Flächenebene, Kantengerade und Ecke von D_i^*, sowie die Infima r_1, r_2, r_3 dieser Größen für

$i = 1, 2, 3, \ldots$. Wir werden zeigen, daß $r_1 \geqq \frac{\sqrt{4-\tau^2}}{2}$, $r_2 \geqq \frac{4-\tau^2}{2\sqrt{3-\tau^2}}$ und $r_3 \geqq \frac{\sqrt{6-\tau^2}}{2}$ ausfällt. Hieraus ergibt sich mit Hilfe von Hilfssatz 1 die im Satz 1 angedeutete Schranke (2).

Aus der Definition der Dirichletschen Zellen folgt, daß sich r_j ($j = 1, 2, 3$) auch folgendermaßen definieren läßt. Wir wählen $j+1$ Punkte von den Kugelmittelpunkten $\{O_i^*\}$. Diese bestimmen eine j-dimensionale "Kugel". r_j ist das Infimum der Radien aller dieser Kugeln.

Da die Mittelpunkte $\{O_i\}$ in einer Schicht der Breite τ liegen, ist offensichtlich

$$r_1 \geqq \frac{\sqrt{4-\tau^2}}{2} = \frac{\sqrt{4t-t^2}}{2}.$$

Da die Mittelpunkte O_i, O_j, O_k in einer 3-dimensionalen Schicht $\Gamma(\tau)$, $(0 \leqq \tau < \sqrt{2})$ liegen, folgt aus Hilfssatz 2, daß

$$r_2 \geqq \frac{4-\tau^2}{2\sqrt{3-\tau^2}} = \frac{4t-t^2}{2\sqrt{-1+4t-t^2}}$$

ist. Aus Hilfssatz 2 und 3 folgt, daß

$$r_3 \geqq \frac{\sqrt{6-\tau^2}}{2} = \frac{\sqrt{2+4t-t^2}}{2}$$

ist.

Damit ist der Beweis von Satzes 1 beendet.

Eine leichte Diskussion unseres Beweises ergibt, daß sich die obere Schranke (2) für keinen Wert von t $(2 \leqq t < 2+\sqrt{2})$ erreichen läßt.

Beweis von Satz 2. Es sei $2 \leqq t \leqq 3$. Wir betrachten in einem 3-dimensionalen Unterraum Π des 4-dimensionalen euklidischen Raumes ein 3-dimensionalen Gitter, dessen Grundparallelepiped ein Quader mit den Kanten $2, 2, 2\sqrt{2-\tau^2}$ ist $(\tau = t-2)$. Wir bezeichnen die Gitterpunkte mit $\{P_i\}$ und die Mittelpunkte der Quader mit $\{Q_i\}$. Wir verschieben die Punkte $\{Q_i\}$ orthogonal zu Π um τ und bezeichnen die erhaltenen Punkte mit $\{\bar{Q}_i\}$. Die Punkte $\{P_i\}$ bilden zusammen mit den Punkten $\{\bar{Q}_i\}$ ein Punktsystem $\{O_i\}$. Es ist leicht einzusehen, daß der Abstand zwei beliebiger Punkte des Systems $\{O_i\}$ mindestens 2 ist. Die um die Punkte $\{O_i\}$ geschlagenen 4-dimensionalen Einheitskugeln liegen offensichtlich in einer Schicht der Breite t und eine einfache Rechnung zeigt, daß ihre Dichte in dieser Schicht

$$\frac{\tau^2}{8t\sqrt{-2+4t-t^2}}$$

ist.

Im Falle $t = 2$ liegen alle Punkte $\{O_j\}$ im 3-dimensionalen Raum Π und bilden die Kugelmittelpunkte der dichtesten Gitterpackung von Einheitskugeln des 3-dimensionalen Raumes. Im Falle $t = 3$ ist das Gitterparallelepiped ein Würfel. Die erhaltene Kugelpackung ist ein Teil der dichtesten gitterförmigen Kugelpackung des 4-dimensionalen euklidischen Raumes [5].

LITERATURVERZEICHNIS

[1] K. Böröczky und A. Florian, Über dichteste Kugelpackung im hyperbolischen Raum, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **15** (1964), 237—245.

[2] L. Fejes Tóth, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1953.

[3] J. Horváth, Über die Durchsichtigkeit gitterförmiger Kugelpackungen, *Studia Sci. Math. Hungar.* **5** (1970), 421—426.

[4] J. Horváth und J. Molnár, On the density of non-overlapping unit spheres lying in a strip, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* **10** (1967), 193—201.

[5] A. N. Korkin und E. I. Zolotareff, Sur les formes quadratiques positives quaternaires, *Math. Ann.* **5** (1872), 581—583.

(Eingegangen am 6. April 1972)

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
ÁBRÁZOLÓ ÉS PROJEKTIV GEOMETRIA TANSZÉK
H–1088 BUDAPEST
MÚZEUM KRT. 6–8.
HUNGARY