Periodica Mathematica Hungarica Vol. 5 (3), (1974), pp. 187—193.

REGULA-FALSI-VERFAHREN MIT KONSISTENTER STEIGUNG UND MAJORANTENPRINZIP

von

J. W. SCHMIDT (Dresden)

§ 1.

Für den grundlegenden Satz von Kantorovich über das Newtonsche Verfahren und für einen entsprechenden Satz über die Regula falsi wird ein einheitlicher Beweis angegeben. Er beruht auf dem Majorantenprinzip (vergleiche Ortega [3] und Rheinboldt [4]) und zeichnet sich durch Einfachheit und besondere Herausstellung der wesentlichen Schritte aus.

In der Regula falsi

$$x_{n+1} = x_n - \delta F(x_n, x_{n-1})^{-1} F(x_n)$$

zur Lösung der Gleichung $F(x) = 0$ werden Operatoren δF zugelassen, welche zur Abteilung F' in folgendem Sinne konsistent sind:

$$||\delta F(u, v) - F'(x)|| \leqq \alpha(||u - x|| + ||v - x||).$$

Dagegen wird die Gleichheit

$$F(u) - F(v) = \delta F(u, v)(u - v)$$

nicht gefordert; dennoch werde δF weiterhin Steigung von F genannt. In früheren Arbeiten zur Regula falsi, u. a. von Schmidt [6], Ulm [7], Dennis [8] und Hofmann [2], wird die Gleichheit verwendet, während Burmeister [1] erstmalig für Sätze der erwähnten Art ohne sie auskommt. Der Begriff der Konsistenz (in etwas allgemeinerer Form) geht auf Ortega zurück, welcher auf dieser Grundlage sogenannte lokale Konvergenzsätze gewonnen hat (s. Ortega und Rheinboldt [5], S. 355). Beispiele für konsistente Steigungen findet man z. B. in [6] und [5]; auch die Ableitung ordnet sich diesem Begriff unter. Einige konsistente Steigungen — für solche gilt stets $\delta F(x, x) = F'(x)$ — werden weiter unten in den Bemerkungen 1 und 2 angeführt.

Die Ergebnisse dieser Mitteilung sind inzwischen von Schmidt [10] auf Mehrschrittverfahren vom Regula falsi–Typ verallgemeinert worden.

§ 2.

KONVERGENZ- UND EXISTENSATZ. *Es seien B ein Banachraum, $L(B)$ der Raum der linearen, beschränkten Operatoren von B in sich und $F|C \subset B \to B$ ein Operator, welcher auf einer konvexen Menge $D \subset \mathrm{Int} C$ eine Fréchet-Ableitung $F'|D \to L(B)$ besitze; außerdem sei eine konsistente Steigung $\delta F|D^2 \to \to L(B)$ vorhanden. Für $x_1, y_1 \in D$ existiere $G = \delta F(x_1, y_1)^{-1} \in L(B)$, und im Sinne der Konsistenz gelte mit einer Konstanten $a > 0$*

$$\|G\{\delta F(u, v) - F'(x)\}\| \leqq a(\|u - x\| + \|v - x\|) \text{ für } u, v, x \in D\,. \tag{1}$$

Mit $\|x_1 - y_1\| \leqq b$ und $\|x_2 - x_1\| \leqq c$, wobei $x_2 = x_1 - GF(x_1)$ ist, bestehe die Ungleichung

$$2\sqrt{ac} + ab \leqq 1. \tag{2}$$

Weiterhin gelte

$$K = \{x \in B \mid \|x - x_2\| \leqq t^* - b - c\} \subset D$$

mit

$$t^* = \frac{1 + ab}{2a}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4a(b + c)}{(1 + ab)^2}}\right). \tag{3}$$

Unter diesen Voraussetzungen ist das Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - \delta F(x_n, y_n)^{-1}F(x_n)\,, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

sofern die y_n gemäß

$$y_n = \tau_n x_n + (1 - \tau_n)x_{n-1} \text{ mit } \tau_n \in [0, 1]$$

gewählt werden, mit x_1 und $y_1 = x_0$ als Startwerte durchführbar, und der Grenzwert $x^* = \lim x_n$ existiert. Es ist $F(x^*) = 0$, und mit $x^* \in K$ steht eine Fehlerabschätzung zur Verfügung. Gilt (2) verschärfend

$$2\sqrt{ac} + ab < 1, \tag{5}$$

so erfolgt die Konvergenz überlinear. Im Falle $y_n = x_n$ für fast alle n ist die Konvergenzgeschwindigkeit mindestens quadratisch. Andernfalls hat sie noch mindestens den Wert $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.[1]

BEMERKUNG 1. Es sei

$$\delta F(u, v) = \frac{1}{2}\{F'(u) + F'(v)\}\,.$$

[1] Die Voraussetzung (1) kann man nach HOYER [9] abschwächen, indem man die Vorfaktoren der beiden Summanden auf der rechten Seite als verschieden zuläßt.

und mit $G = F'(x_1)^{-1} \in L(B)$ gelte

$$(6) \qquad ||G\{F'(u) - F'(x)\}|| \leq 2a||u - x|| \quad \text{für} \quad u, x \in D\,.$$

Dann ist δF eine konsistente Steigung entsprechend (1). Wenn außerdem $y_n = x_n$ für alle n gesetzt wird, geht (4) in das Newtonsche Verfahren über. Mit der jetzt möglichen Festsetzung $b = 0$ entsteht aus dem obigen Satz das Kantorovich-Theorem (s. z. B. [3]) in einer hinsichtlich der Fehlerabschätzung geringfügig verbesserten Form.

Bemerkung 2. Im Falle $y_n = x_{n-1}$ für alle n bedeutet (4) die Regula falsi. Das dann aus dem obigen Satz hervorgehende Ergebnis stammt von Burmeister [1], wenn man von einer etwas anderen, jedoch zu (1) äquivalenten Form der Konsistenz absieht. Für den Beweis wird dort mit geeigneten rekursiv erklärten Folgen gearbeitet.

Als Beispiel einer konsistenten Steigung für Operatoren $F \mid C \subset R^d \to R^d$ sei hier erwähnt:

$$(7) \qquad \begin{aligned} [\delta F(u, v)]_j &= \{F(u + \beta w_j + (v - u)e_j) - F(u + \beta w_j)\}/(v - u)e_j && \text{für } (v - u)e_j \neq 0 \\ &= F'(u + \beta w_j)e_j && \text{für } (v - u)e_j = 0 \end{aligned}$$

mit $w_j = (v - u)e_1 + \ldots + (v - u)e_{j-1}$. Dabei bezeichne $[A]_j$ den j-ten Spaltenvektor der Matrix A, e_j den j-ten Einheitsvektor und $\beta \in [0, 1]$ einen Parameter. Günstig ist Insbesondere $\beta = 1$ [6]. Als $D \subset \operatorname{Int} C$ wird man zur Vereinfachung einen achsenparallelen Quader wählen. Falls z. B. die zweiten partiellen Differenzenquotienten von F auf D beschränkt sind, ist die Konsistenz von (7) gesichert (vergleiche [6] für $\beta = 1$ und $\beta = 0$). Hinreichend ist hierfür ebenfalls das Bestehen einer Lipschitz-Bedingung (6) auf D (vergleiche [5], S. 359).

§ 3.

Beweis des Satzes. Er wird in mehrere Hilfssätze zergliedert. Dabei sollen die Voraussetzungen des Satzes jeweils erfüllt sein.

Hilfssatz 1. *Es seien*

$$E = \{(x, y) \in B^2 \mid a(||x - y|| + 2||y - x_1|| + ||x_1 - y_1||) < 1\}$$

und $Q = D^2 \cap E$. *Im Falle* $(x, y) \in Q$ *ergeben sich mit*

$$H(x, y) = G\{\delta F(x, y) - \delta F(x_1, y_1)\}$$

die Beziehung

$$||H(x, y)|| \leq a(||x - y|| + 2||y - x_1|| + ||x_1 - y_1||) < 1$$

und die Existenz von

$$\delta F(x, y)^{-1} = (I + H(x, y))^{-1} G \in L(B).$$

Beweis. Wegen der Konsistenz (1) erhält man

$$\begin{aligned} ||H(x, y)|| &\leqq ||G\{\delta F(x, y) - F'(y)\}|| + ||G\{F'(y) - \delta F(y, x_1)\}|| + \\ &+ ||G\{\delta F(y, x_1) - F'(x_1)\}|| + ||G\{F'(x_1) - \delta F(x_1, y_1)\}|| \leqq \\ &\leqq a(||x - y|| + 2||y - x_1|| + ||x_1 - y_1||) < 1, \end{aligned}$$

womit aus dem Banachschen Lemma (s. z. B. [5], S. 45) bereits die Behauptungen folgen.

Hilfssatz 2. *Es seien* $(u, v) \in D^2$ *und* $x = R(u, v)$ *mit*

$$R(u, v) = u - \delta F(u, v)^{-1} F(u)$$

vorhanden. Falls $(x, y) \in Q$ *ist, existiert* $R(x, y)$ *und es gilt*

$$||R(x,y) - R(u,v)|| \leqq \frac{a(||x - u|| + ||u - v||)\,||x - u||}{1 - a(||x - y|| + 2\,||y - x_1|| + ||x_1 - y_1||)}.$$

Beweis. Man findet u. a. mit Hilfssatz 1

$$\begin{aligned} R(x, y) - R(u, v) &= -\delta F(x, y)^{-1} F(x) = \\ &= -(I + H(x, y))^{-1} G\{F(x) - F(u) - \delta F(u, v)(x - u)\}. \end{aligned}$$

Da die Konsistenz

$$||G\{F'(u) - F'(x)\}|| \leqq 2a||u - x|| \quad \text{für } u, x \in D$$

impliziert, kann man über die Taylorsche Formel (s. z. B. [5], S. 73)

$$\begin{aligned} ||G\{F(x) - F(u) - \delta F(u, v)(x - u)\}|| &\leqq ||G\{F(x) - F(u) - F'(u)(x - u)\}|| + \\ + ||G\{F'(u) - \delta F(u, v)\}(x - u)|| &\leqq a(||x - u||^2 + ||u - v||\,||x - u||) \end{aligned}$$

und damit die behauptete Ungleichung gewinnen.

Hilfssatz 3. *Das quadratische Polynom*

$$f(t) = at^2 - (1 + ab)t + b + c$$

mit $a > 0$, $b \geqq 0$ *und* $c > 0$ *hat* t^* *aus* (3) *als kleinere Nullstelle, wenn* (2) *gilt. Die Iterationsfolge*

$$t_{n+1} = t_n - \frac{(t_n - s_n) f(t_n)}{f(t_n) - f(s_n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

mit den Startwerten $t_1 = b$ *und* $s_1 = t_0 = 0$ *konvergiert monoton wachsend gegen* t^*, *sofern die* s_n *entsprechend* $t_{n-1} \leqq s_n \leqq t_n$ *gewählt werden. Bei* (5) *erfolgt die*

Konvergenz im Falle $s_n = t_n$ für fast alle n mindestens quadratisch, sonst noch mindestens mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

Beweis. Zum induktiven Nachweis der Ungleichung $t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} < t^*$, aus der bereits die Konvergenz folgt,[2] sei neben $t_1 < t^*$ auf

$$t_{n+1} - t^* = \frac{a(t_n - t^*)(s_n - t^*)}{a(t_n + s_n) - 1 - ab},$$

$$t_{n+1} - t_n = \frac{a(t_n - s_{n-1})(t_n - t_{n-1})}{1 + ab - a(t_n + s_n)} \quad (n \geqq 2;\ t_2 - t_1 = c)$$

und

$$a(t_n + s_n) - 1 - ab < 2at^* - 1 - ab = -\sqrt{(1+ab)^2 - 4a(b+c)} \leqq 0$$

verwiesen. Auch die genannten Konvergenzgeschwindigkeiten ergeben sich unmittelbar aus diesen Beziehungen.

Hilfssatz 4. *Für $n = 1, 2, \ldots$ kann x_{n+1} nach der Vorschrift* (4) *gebildet werden, und es gilt*

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqq t_{n+1} - t_n \tag{9}$$

mit t_n aus (8) *und* $s_n = \tau_n t_n + (1 - \tau_n) t_{n-1}$.

Beweis (durch Induktion). Die Behauptung trifft für $n = 1$ zu, da x_2 wegen der Existenz von $\delta F(x_1, y_1)^{-1}$ vorhanden ist und $\|x_2 - x_1\| \leqq c = t_2 - t_1$ gilt. Zusätzlich ist $\|x_1 - y_1\| \leqq b = t_1 - t_0$.

Es gelte (9) für alle $n \leqq m - 1$. Hieraus folgt $\|x_n - x_2\| \leqq t_n - t_2 \leqq t^* - b - c$ und somit $(x_n, y_n) \in D^2$ für $2 \leqq n \leqq m$. Außerdem ist $(x_1, y_1) \in D^2$. Beachtet man weiter $\|x_n - y_n\| \leqq t_n - s_n$ und $\|y_n - x_{n-1}\| \leqq s_n - t_{n-1}$, erhält man für $2 \leqq n \leqq m$

$$a(\|x_n - y_n\| + 2\|y_n - x_1\| + \|x_1 - y_1\|) \leqq a(t_n + s_n - b) < a(2t^* - b) \leqq 1$$

und folglich $(x_n, y_n) \in E$. Also ist $(x_n, y_n) \in Q$ für $2 \leqq n \leqq m$. Der Hilfssatz 2 sichert daher mit $x = x_m$, $y = y_m$, $u = x_{m-1}$ und $v = y_{m-1}$ für $m \geqq 2$ die Existenz von x_{m+1} und die Ungleichung

$$\|x_{m+1} - x_m\| \leqq \frac{a(\|x_m - x_{m-1}\| + \|x_{m-1} - y_{m-1}\|)\|x_m - x_{m-1}\|}{1 - a(\|x_m - y_m\| + 2\|y_m - x_1\| + \|x_1 - y_1\|)} \leqq$$

$$\leqq \frac{a(t_m - s_{m-1})(t_m - t_{m-1})}{1 - a(t_m + s_m - b)} = t_{m+1} - t_m .$$

[2] Daß der Grenzwert nur t^* sein kann, erhält man leicht mit Hilfe von (8).

HILFSSATZ 5. *Aus* $\|x_{n+1} - x_n\| \leqq t_{n+1} - t_n$ *für alle* n *und* $\lim t_n = t^*$ *ergeben sich die Existenz von* $x^* = \lim x_n$ *und* $\|x^* - x_n\| \leqq t^* - t_n$ *für alle* n, *insbesondere* $x^* \in K$.

BEWEIS. Es genügt der Hinweis auf die unmittelbare Folgerung aus den Voraussetzungen, daß (x_n) eine Cauchy-Folge ist.

Der Beweis des Satzes ist damit vollständig, wenn noch x^* als Nullstelle von F bestätigt wird. Diesen Fakt erhält man aber über

$$F(x^*) = \{F(x^*) - F(x_n) - \delta F(x_n, y_n)(x^* - x_n)\} +$$
$$+ \{\delta F(x_n, y_n) - F'(x^*)\}(x^* - x_{n+1}) + F'(x^*)(x^* - x_{n+1})$$

mit Hilfe der Ungleichung

$$\|F(x^*)\| \leqq \|G^{-1}\| \, a\{\|x^* - x_n\|^2 + \|x^* - x_n\| \, \|x_n - y_n\| +$$
$$+ (\|x^* - x_n\| + \|x^* - y_n\|) \, \|x^* - x_{n+1}\|\} + \|F'(x^*)\| \, \|x^* - x_{n+1}\|$$

durch Grenzübergang.

§ 4.

EINDEUTIGKEITSSATZ. *Die Voraussetzungen des Konvergenz- und Existenzsatzes seien erfüllt, und es werde*

$$M = \{x \in B \mid \|x - x_1\| < t^{**} - b\}$$

mit

$$t^{**} = \frac{1 + ab}{2a}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4a(b+c)}{(1+ab)^2}}\right)$$

gesetzt. Dann hat F *in* $D \cap M$ *außer* x^* *keine weitere Nullstelle. Im Falle* $t^* = t^{**}$ *trifft dies sogar mit* $M = \{x \in B \mid \|x - x_1\| \leqq t^{**} - b\}$ *zu.*[3]

BEWEIS. Es seien $F(z) = 0$ und $z \in D \cap M$. Insbesondere gilt also

$$\|z - x_1\| \leqq \zeta - t_1 < t^{**} - t_1,$$

wobei $t^* \leqq \zeta < t^{**}$ angenommen werden kann. Für $t^* = t^{**}$ wird $\zeta = t^*$ gesetzt. Wie im Hilfssatz 3 zeigt man für die Iteration

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n - \frac{(t_n - s_n) f(\zeta_n)}{f(t_n) - f(s_n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

mit $\zeta_1 = \zeta$, daß $\lim \zeta_n = t^*$ ist.[4] Die Vorschrift

$$z_{n+1} = z_n - \delta F(x_n, y_n)^{-1} F(z_n), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

[3] Es ist in der Tat $x^* \in D \cap M$, da $x^* \in K$ und $K \subset D \cap M$.

[4] Die Konvergenzaussagen über die Folgen (t_n) und (ζ_n) können durch Veranschaulichung in der Ebene bequem motiviert werden.

mit $z_1 = z$ führt auf die stationäre Folge mit dem Element z. Man bestätigt für sie durch Induktion

$$\|z_n - x_n\| = \|z - x_n\| \leqq \zeta_n - t_n, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

woraus im Sinne der Behauptung $z = \lim x_n = x^*$ folgt.

Für $n = 1$ trifft die Ungleichung (10) zu. Sie gelte für n. Dann findet man wie im Hilfssatz 2 über

$$z_{n+1} - x_{n+1} = -\delta F(x_n, y_n)^{-1}\{F(z_n) - F(x_n) - \delta F(x_n, y_n)(z_n - x_n)\}$$

die Ungleichung (10) für $n + 1$:

$$\|z_{n+1} - x_{n+1}\| \leqq \frac{a(\|z_n - x_n\| + \|x_n - y_n\|)\|z_n - x_n\|}{1 - a(\|x_n - y_n\| + 2\|y_n - x_1\| + \|x_1 - y_1\|)} \leqq$$

$$\leqq \frac{a(\zeta_n - s_n)(\zeta_n - t_n)}{1 - a(t_n + s_n - b)} = \zeta_{n+1} - t_{n+1}.$$

Für $n + 1 = 2$ ergibt sich bei der ersten Abschätzung der Nenner unmittelbar zu 1. Das war insgesamt zu zeigen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. Burmeister, Inversionsfreie Verfahren zur Lösung nicht linearer Operatorgleichungen, *Z. Angew. Math. Mech.* **52** (1972), 101–110.
[2] W. Hofmann, *Regula-falsi-Verfahren in Banachräumen*, Diss. Univ. Hamburg, 1970.
[3] J. M. Ortega, The Newton–Kantorovich theorem, *Amer. Math. Monthly* **75** (1968), 658–660.
[4] W. C. Rheinboldt, A unified convergence theory for a class of iterative processes, *SIAM J. Numer. Anal.* **5** (1968), 42–63.
[5] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, New York–London, 1970.
[6] J. W. Schmidt, Eine Übertragung der Regula falsi auf Gleichungen in Banachräumen, *Z. Angew. Math. Mech.* **43** (1963), 1–8 und 97–110.
[7] S. Ulm, Das Majorantenprinzip und die Sehnenmethode, *Izv. Akad. Nauk Eston. SSR* **13** (1964), 217–227 (in Russian).
[8] J. E. Dennis, Toward a unified convergence theory for Newton-like methods, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, New York – London, 1971, 425-472.
[9] W. Hoyer, Das Majorantenprinzip bei Mehrschritt-Iterationsverfahren, *Beiträge Numer. Math.* **2** (1974), 39 – 60.
[10] J.W. Schmidt, Überlinear konvergente Mehrschrittverfahren vom Regula falsi- und Newton-Typ, *Z. Angew. Math. Mech.* **53** (1973), 103–114 und **54** (1974), 600.

(Eingegangen am 25. Januar 1972)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN
SEKTION MATHEMATIK
BEREICH NUMERISCHE MATHEMATIK
DDR–8027 DRESDEN
ZELLESCHER WEG 12–14
GERMAN DEMOCRATIC REPUBLIC