ÜBER EINE METHODE ZUR NUMERISCHEN LÖSUNG DER POISSONSCHEN DIFFERENZENGLEICHUNG FÜR BELIEBIGE GEBIETE

Von

E. EGERVÁRY (Budapest), Mitglied der Akademie[1]

Problemstellung

Eine vergleichende Betrachtung der modernen Hilfsmittel der angewandten Mathematik bekräftigt besonders die an und für sich evidente Feststellung, daß es keine unveränderlich gültigen matematischen Modelle der Empirie gibt. Während aber die diskreten (finiten) Modelle sich auch schon früher mit den kontinuierlichen (infinitesimalen) Modellen prinzipiell gleichberechtigt erwiesen haben, weisen die numerischen Lösungsmethoden für diskrete Modelle nur seit dem Einsatz der programmgesteuerten, automatischen Rechenmaschinen eine entsprechende Entwicklung auf.

Die finiten Analoga der linearen partiellen Differentialgleichungen sind bekanntlich die Differenzengleichungen, d. h. ein spezielles System von linearen algebraischen Gleichungen. Man kann jedoch feststellen, daß — obwohl die reine Theorie der linearen algebraischen Gleichungen als längst abgeschlossen betrachtet werden kann — die bisher bekannten numerischen Lösungsmethoden noch nicht allen Anforderungen der praktischen Brauchbarkeit genügen.

Im besonderen wächst die Anzahl der auszuführenden arithmetischen Operationen bei zunehmender Anzahl der Unbekannten in vielen Aufgaben der Physik und Technik derartig schnell, daß manchmal sogar die Vorteile der elektronischen Rechenmaschinen illusorisch werden.

Für die Poissonschen (und ähnlichen) Differenzengleichungen sind in der neueren Literatur mehrere Lösungsmethoden angegeben worden, die meisten dieser Methoden sind jedoch nur auf ein rechteckiges Gebiet anwendbar.

Wir wollen in dieser Arbeit für die Poissonsche Differenzengleichung bezüglich eines beliebigen Gebietes eine numerische Lösungsmethode entwickeln, welche folgendermaßen charakterisiert werden kann:

1. Die Laplacesche Operatormatrix (welche auch in der Poissonschen Differenzengleichung vorkommt) kann in Blöcke partitioniert werden, welche vertauschbar sind. Für die Invertierung solcher Matrizen ist vom Verfasser ein Algorithmus entwickelt worden, welche die Ordnung der zu invertierenden Matrizen, also auch die Anzahl der auszuführenden Rechenoperationen wesentlich herabsetzt [2].

[1] Aus dem Nachlaß des Verfassers bearbeitet durch P. Rózsa.

2. Ein beliebiges, aus Gitterpunkten bestehendes Gebiet kann immer in ein Rechteckgebiet eingebettet werden, und aus der (als bekannt vorausgesetzten) Inversen dieses Rechteckgebietes kann man die zum beliebigen Gebiete gehörige Inverse durch besonders einfache „rangvermindernde" Operationen berechnen [3].

Ähnliche Lösungsmethoden kann man auch für die biharmonischen und anderen linearen Differenzengleichungen entwickeln.

Man wird sehen, daß die in unserer Methode vorkommenden Rechenoperationen in hohem Grade einförmig sind, also eine bequeme Programmierung für automatische Rechenmaschinen gestatten.

I. Die Matrix des zweidimensionalen Laplaceschen Operators

In einem quadratischen Netz von Gitterpunkten

	x_{01}	x_{02}	x_{0j}	x_{0m}	
x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{1j}	x_{1m}	$x_{1,m+1}$
x_{20}	x_{21}	x_{22}	x_{2j}	x_{2m}	$x_{2,m+1}$
x_{i0}	x_{i1}	x_{i2}	x_{ij}	x_{im}	$x_{i,m+1}$
x_{n0}	x_{n1}	x_{n2}	x_{nj}	x_{nm}	$x_{n,m+1}$
	$x_{n+1,1}$	$x_{n+1,2}$	$x_{n+1,j}$	$x_{n+1,m}$	

wird der Laplacesche Differenzenoperator im Punkte (i,j) durch den Ausdruck

$$\begin{aligned} & x_{i,j-1}-2x_{ij}+x_{i,j+1}+x_{i+1,j}-2x_{ij}+x_{i-1,j}= \\ & =-(4x_{ij}-x_{i,j-1}-x_{i,j+1}-x_{i-1,j}-x_{i+1,j}) \end{aligned}$$

gegeben.

Werden bei Zugrundelegung eines Rechteckgebietes die nm Unbekannten x_{ij} $(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots,m)$ in der lexikographischen Anordnung

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2m}, \ldots, x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm}$$

geschrieben, so lautet das Poissonsche Gleichungssystem bei Berücksichtigung der verschwindenden Randwerte $x_{0j}=x_{n+1,j}=x_{i0}=x_{i,m+1}=0$:

$$\begin{array}{lllll} 4x_{11}-x_{12} & & -x_{21} & & =p_{11}, \\ -x_{11}+4x_{12}-x_{13} & & & -x_{22} & =p_{12}, \\ \cdot & & & & \vdots \\ & \cdot & -x_{n-1,m} & -x_{n,m-1}+4x_{nm} & =p_{nm}. \end{array}$$

Die Laplace—Poissonsche Koeffizientenmatrix ist also für ein Rechteckgebiet bei verschwindenden Randwerten

$$\mathbf{L}=\left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
4 & -1 & & & -1 & & & & & & & & \\
-1 & 4 & & & & -1 & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & -1 & 4 & & & & -1 & & & & & \\
\hline
-1 & & & & 4 & -1 & & & & & & & \\
 & -1 & & & -1 & 4 & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & -1 & & & & 4 & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & \ddots & & & & \\
\hline
 & & & & & & & & & 4 & -1 & & \\
 & & & & & & & & & -1 & 4 & & \\
 & & & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & & -1 & 4
\end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{c|c|c|c}
\mathbf{K} & -\mathbf{E} & \cdots & \mathbf{O} \\
\hline
-\mathbf{E} & \mathbf{K} & \cdots & \mathbf{O} \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdots & \\
\hline
\mathbf{O} & \cdot & & \mathbf{K}
\end{array}\right].$$

Diese Matrix läßt sich also in n^2 Blöcke m-ter Ordnung partitionieren, welche paarweise vertauschbar sind. Im Abschnitt II werden wir für solche Matrizen ein vereinfachtes Inversionsverfahren angeben, welche ausschließlich aus rationalen Operationen besteht.

Wir wollen hier noch eine andere Darstellung von **L** einführen, welche die Inversion mit Hilfe der Spektralzerlegung ermöglichen wird. Wir definieren zunächst (in unmittelbarem Anschluß an den Begriff des direkten Produktes) das „direkte Polynom" von zwei quadratischen Matrizen **A** und **B** beliebiger Ordnung folgendermaßen:

$$\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{B})=\sum_p \sum_q c_{pq} \mathbf{A}^p \cdot \times \mathbf{B}^q .$$

Schreiben wir nun $\mathbf{L}$ in der Form

$$\mathbf{L}=\left[\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix}2&-1&&\\-1&2&&\\&&\ddots&\\&&&2\end{matrix} & & & \\ \hline
 & \begin{matrix}2&-1&&\\-1&2&&\\&&\ddots&\\&&&2\end{matrix} & & \\ \hline
 & & \ddots & \\ \hline
 & & & \begin{matrix}2&-1&&\\-1&2&&\\&&\ddots&\\&&&2\end{matrix}
\end{array}\right]+$$

$$+\left[\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix}2&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&2\end{matrix} & \begin{matrix}-1&&&\\&-1&&\\&&\ddots&\\&&&-1\end{matrix} & & \\ \hline
\begin{matrix}-1&&&\\&-1&&\\&&\ddots&\\&&&-1\end{matrix} & \begin{matrix}2&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&2\end{matrix} & & \\ \hline
 & & \ddots & \\ \hline
 & & & \begin{matrix}2&&&\\&2&&\\&&\ddots&\\&&&2\end{matrix}
\end{array}\right],$$

so erkennt man unmittelbar, daß $\mathbf{L}$ sich als direktes Polynom der Kontinuanten $\mathbf{C}_m$ und $\mathbf{C}_n$,

$$\mathbf{C}_k = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (1 \\ (2 \\ (3 \\ \\ (k \end{array}, \quad \mathbf{E}_k = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix},$$

in folgender Form ausdrücken läßt:

$$\mathbf{L} = \mathbf{C}_n \cdot \times \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_n \cdot \times \mathbf{C}_m .$$

II. Inversion der Laplaceschen Operatormatrix für ein Rechteckgebiet

Erste Methode

Es sei $\mathbf{A}$ eine quadratische nichtsinguläre Matrix nm-ter Ordnung, welche als Hypermatrix

$$[\mathbf{A}_{ij}] \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

aus n^2 paarweise vertauschbaren Blöcken besteht, d. h.

$$\mathbf{A}_{ij}\mathbf{A}_{kl} = \mathbf{A}_{kl}\mathbf{A}_{ij} \qquad (i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n).$$

Die quadratische Matrix m-ter Ordnung

$$\sum_{\nu} \pm \mathbf{A}_{1\nu_1}\mathbf{A}_{2\nu_2} \ldots \mathbf{A}_{n\nu_n},$$

welche (wegen der Vertauschbarkeit der Blöcke) wohldefiniert ist, soll die *Determinantenmatrix* der Hypermatrix $[\mathbf{A}_{ij}]$ genannt und mit $\mathbf{Det}\,[\mathbf{A}_{ij}]$ bezeichnet werden. In Verallgemeinerung einer von I. SCHUR stammenden Formel kann man leicht zeigen, daß die gewöhnliche Determinante $\mathrm{Det}\,\mathbf{Det}\,[\mathbf{A}_{ij}]$ der Determinantenmatrix m-ter Ordnung der gewöhnlichen Determinante $\mathrm{Det}\,\mathbf{A}$ der ursprünglichen Matrix $\mathbf{A}$ nm-ter Ordnung gleich ist.

Wenn also die Matrix nm-ter Ordnung invertierbar ist, so ist auch die Determinantenmatrix $\mathbf{Det}\,[\mathbf{A}_{ij}]$ invertierbar.

Aus der Matrix $(n-1)m$-ter Ordnung, welche aus $\mathbf{A}$ durch Tilgung der i-ten Blockzeile und der j-ten Blockspalte entsteht (welche also aus $(n-1)^2$ vertauschbaren Blöcken m-ter Ordnung besteht), kann nach der obigen Definition die Determinantenmatrix m-ter Ordnung gebildet werden. Diese Matrix, multipliziert mit $(-1)^{i+j}$, soll die zum Blocke $\mathbf{A}_{ij}$ gehörige algebraische *Komplementmatrix* genannt und mit $\mathbf{A}_{ji}^*$ bezeichnet werden.

Die Rolle der gewöhnlichen adjungierten Matrix wird nun von der Hypermatrix

$$[\mathbf{A}_{ij}^*] \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

übernommen. Werden nämlich in die skalare Identität, welche die Elemente einer gewöhnlichen Matrix und die Elemente ihrer Adjungierten verbindet, die vertauschbaren Blöcke $\mathbf{A}_{ij}$ von $\mathbf{A}$, sowie die (mit diesen Blöcken und untereinander vertauschbaren) Komplementmatrizen $\mathbf{A}^*_{ij}$ substituiert, so erhalten wir die für unsere Zwecke grundlegende Identität

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathbf{A}_{n1} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^*_{11} & \cdots & \mathbf{A}^*_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathbf{A}^*_{n1} & \cdots & \mathbf{A}^*_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Det}[\mathbf{A}_{ij}] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{Det}[\mathbf{A}_{ij}] & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{Det}[\mathbf{A}_{ij}] \end{bmatrix}.$$

Ist $\mathbf{A}$, also auch $\mathbf{Det}[\mathbf{A}_{ij}]$ nichtsingulär, so folgt hieraus unmittelbar

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathbf{A}_{n1} & \cdots & \mathbf{A}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^*_{11}\,\mathbf{Det}^{-1}[\mathbf{A}_{ij}] & \cdots & \mathbf{A}^*_{1n}\,\mathbf{Det}^{-1}[\mathbf{A}_{ij}] \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \mathbf{A}^*_{n1}\,\mathbf{Det}^{-1}[\mathbf{A}_{ij}] & \cdots & \mathbf{A}^*_{nn}\,\mathbf{Det}^{-1}[\mathbf{A}_{ij}] \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{mn}. \tag{1}$$

Damit haben wir die Inversion der Matrix $\mathbf{A}=[\mathbf{A}_{ij}]$ nm-ter Ordnung auf Additionen und Multiplikationen und auf die Inversion der einzigen Matrix $\mathbf{Det}[\mathbf{A}_{ij}]$ m-ter Ordnung zurückgeführt.

Hierzu ist allerdings zu bemerken, daß die Berechnung der Determinantenmatrix und der Komplementmatrizen im allgemeinen noch langwieriger ist, als die Berechnung einer gewöhnlichen Determinante. Die durch die Formel (1) gegebene Inversionsmethode wird also nur dann eine praktische Brauchbarkeit haben, wenn die darin vorkommenden Matrizen besonders einfach berechenbar sind. Dies ist jedoch bei der Inversion der Laplace—Poissonschen Operatormatrix der Fall.

Wie wir im Abschnitt I gezeigt haben, hat die Laplace—Poissonsche Operatormatrix (für ein Rechteck und verschwindende Randwerte) die folgende Form:

$$\mathbf{L}=\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{E} & \mathbf{O} & \cdots & & \mathbf{O} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{K} & -\mathbf{E} & \cdots & & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{E} & \mathbf{K} & \cdots & & \mathbf{O} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ \mathbf{O} & \cdot & \cdot & \cdots & -\mathbf{E} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (1 \\ (2 \\ (3\,, \\ \\ (n \end{array}$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \cdots & & 0 \\ 0 & -1 & 4 & \cdots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (1 \\ (2 \\ (3\,, \\ \\ (m \end{array} \quad \mathbf{E}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Die entsprechende, aus Skalarelementen bestehende Matrix

$$\mathbf{C}_n(x) = \begin{bmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdots -1 & x \end{bmatrix} \begin{matrix} (1 \\ (2 \\ (3 \\ \\ (n \end{matrix}$$

ist nichts anderes als die wohlbekannte Kontinuantmatrix, deren Determinante und Inverse explizit bekannt sind. Wird nämlich das Tschebyscheffsche Polynom k-ten Grades (zweiter Art) mit $T_k(x)$ bezeichnet, so besteht zwischen diesen Polynomen die rekurrente Relation

$$(2) \qquad T_{k+1}(x) = x\,T_k(x) - T_{k-1}(x); \quad T_1 = x, \quad T_0 = 1,$$

und daraus folgt, daß

$$\operatorname{Det} \mathbf{C}_n(x) = T_n(x)$$

und die Inverse von $\mathbf{C}_n(x)$ in der folgenden expliziten Form angegeben werden kann:

$$(3) \qquad \mathbf{C}_n(x)^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{T_{n-1}(x)T_0(x)}{T_n(x)} & \dfrac{T_{n-2}(x)T_0(x)}{T_n(x)} & \cdots & \dfrac{T_0^2(x)}{T_n(x)} \\ \dfrac{T_{n-2}(x)T_0(x)}{T_n(x)} & \dfrac{T_{n-2}(x)T_1(x)}{T_n(x)} & \cdots & \dfrac{T_0(x)T_1(x)}{T_n(x)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \dfrac{T_0^2(x)}{T_n(x)} & \dfrac{T_0(x)T_1(x)}{T_n(x)} & \cdots & \dfrac{T_0(x)T_{n-1}(x)}{T_n(x)} \end{bmatrix}.$$

Für $x = 2$ ergibt sich z. B. hieraus

$$\mathbf{C}_n(2)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{n \cdot 1}{n+1} & \dfrac{(n-1) \cdot 1}{n+1} & \cdots & \dfrac{1 \cdot 1}{n+1} \\ \dfrac{(n-1) \cdot 1}{n+1} & \dfrac{(n-1) \cdot 2}{n+1} & \cdots & \dfrac{1 \cdot 2}{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \dfrac{1 \cdot 1}{n+1} & \dfrac{1 \cdot 2}{n+1} & \cdots & \dfrac{1 \cdot n}{n+1} \end{bmatrix}.$$

Werden nun in der Gleichung (3) an die Stelle von $x, 1, 0$ die vertauschbaren Blöcke von $\mathbf{L}$

$$\mathbf{K}, \mathbf{E}, \mathbf{O}$$

substituiert, so erhält man für die Inverse der Laplace—Poissonschen Operatormatrix unmittelbar den folgenden expliziten Ausdruck:

$$(4)\qquad \mathbf{L}^{-1}=\begin{bmatrix} T_{n-1}(\mathbf{K})\,T_0(\mathbf{K})\,T_n(\mathbf{K})^{-1} & T_{n-2}(\mathbf{K})\,T_0(\mathbf{K})\,T_n(\mathbf{K})^{-1} & \cdots & T_0(\mathbf{K})^2\,T_n(\mathbf{K})^{-1} \\ T_{n-2}(\mathbf{K})\,T_0(\mathbf{K})\,T_n(\mathbf{K})^{-1} & T_{n-2}(\mathbf{K})\,T_1(\mathbf{K})\,T_n(\mathbf{K})^{-1} & \cdots & T_0(\mathbf{K})\,T_1(\mathbf{K})\,T_n(\mathbf{K})^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ T_0(\mathbf{K})^2\,T_n(\mathbf{K})^{-1} & T_0(\mathbf{K})\,T_1(\mathbf{K})\,T_n(\mathbf{K})^{-1} & \cdots & T_0(\mathbf{K})\,T_{n-1}(\mathbf{K})\,T_n(\mathbf{K})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Die Matrix $\mathbf{L}$, sowie ihre Inverse sind zentrosymmetrisch, deshalb gibt es unter den n^2 Blöcken nur ungefähr $\frac{n^2}{4}$ verschiedene.

Die durch die rekurrenten Relationen (2) definierten Polynome $T_k(x)$ können auch in expliziter Form angegeben werden:

$$T_2(x)=x^2-1,\quad T_3(x)=x^3-2x,\quad T_4(x)=x^4-3x^2+1,$$

$$T_k(x)=x^k-\binom{k-1}{1}x^{k-2}+\binom{k-2}{2}x^{k-4}-+\cdots.$$

Für numerische Rechnungen scheint es aber am zweckmäßigsten, wenn man zuerst mit Hilfe der rekurrenten Relationen (2) die Folge der Matrizen m-ter Ordnung

$$T_1(\mathbf{K}),\ T_2(\mathbf{K}),\ldots,\ T_{n-1}(\mathbf{K}),\ T_n(\mathbf{K})^{-1},$$

und dann gemäß (4) die einzelnen Blöcke von $\mathbf{L}^{-1}$ berechnet.

Aus der mechanischen Deutung der Laplace—Poissonschen Koeffizientenmatrix, welche später in dieser Arbeit noch näher auseinandergesetzt wird, folgt unmittelbar, daß alle Elemente der Inversen $\mathbf{L}^{-1}$ positiv sind. Rein mathematisch kann diese Eigenschaft der Inversen bewiesen werden, wenn man eine vom Verfasser herrührende Verallgemeinerung eines Stieltjesschen Satzes heranzieht [1].

Dieser Satz besagt nämlich, daß, wenn

1. alle Hauptminoren einer Matrix positiv sind,
2. alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen nichtpositiv sind,
3. alle Teilzeilen rechts von der Hauptdiagonalen und alle Teilspalten unterhalb der Hauptdiagonalen mindestens ein negatives Element enthalten,

alle Elemente der Inversen positiv sind.

Diese drei Bedingungen sind jedoch bei der Laplace—Poissonschen Koeffizientenmatrix $\mathbf{L}$ offenbar erfüllt, folglich hat ihre Inverse lauter positive Elemente.

Zweite Methode

Aus zwei quadratischen Matrizen **A** und **B** beliebiger Ordnung kann man durch Additionen, Multiplikationen, skalare Multiplikation und direkte Multiplikation Polynome folgender Art bilden:

$$\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_p \sum_q c_{pq} \mathbf{A}^p \cdot \times \mathbf{B}^q .$$

Diese Polynome, die wir kurz direkte Polynome nennen wollen, wurden zuerst von C. STÉPHANOS untersucht [4]. Von ihm stammt der folgende Satz über die Eigenwerte von $\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{B})$:

Sind die Eigenwerte der Matrix **A** n-ter Ordnung

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

und die Eigenwerte der Matrix **B** m-ter Ordnung

$$b_1, b_2, \ldots, b_m,$$

dann sind die Eigenwerte des direkten Polynoms $\varphi(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

$$\varphi(a_1, b_1), \ldots, \varphi(a_1, b_m), \varphi(a_2, b_1), \ldots, \varphi(a_2, b_m), \ldots, \varphi(a_n, b_1), \ldots, \varphi(a_n, b_m). \tag{5}$$

Als eine naheliegende Ergänzung der Ergebnisse von STÉPHANOS verifiziert man unmittelbar, daß im Besitze der Spektralzerlegung von $\mathbf{C}_n$ und $\mathbf{C}_m$ man auch die Spektralzerlegung für $\varphi(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_m)$, folglich auch für $\varphi(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_m)^{-1}$ aufschreiben kann.

Die Spektralzerlegung für $\mathbf{C}_n$ ist bekanntlich

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{U}_n \mathbf{\Lambda}_n \mathbf{U}_n, \quad \mathbf{U}_n = \mathbf{U}'_n, \quad \mathbf{U}_n \mathbf{U}'_n = \mathbf{E},$$

wo $\mathbf{U}_n$ die aus den Eigenvektoren von $\mathbf{C}_n$ gebildete Orthogonalmatrix

$$\mathbf{U}_n = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \begin{bmatrix} \sin\frac{\pi}{n+1} & \sin\frac{2\pi}{n+1} & \cdots & \sin\frac{n\pi}{n+1} \\ \sin\frac{2\pi}{n+1} & \sin\frac{4\pi}{n+1} & \cdots & \sin\frac{2n\pi}{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \sin\frac{n\pi}{n+1} & \sin\frac{2n\pi}{n+1} & \cdots & \sin\frac{n^2\pi}{n+1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

und $\mathbf{\Lambda}_n$ die aus den Eigenwerten

$$\lambda_p^{(n)} = 4 \sin^2 \frac{p\pi}{2(n+1)} \tag{7}$$

von $\mathbf{C}_n$ gebildete Diagonalmatrix bedeutet.

Hieraus sieht man leicht ein, daß die Spektralzerlegung von $\varphi(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_m)$ folgende Form besitzt:

$$\varphi(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_m) = \sum_p \sum_q c_{pq} \mathbf{C}_n^p \cdot \times \mathbf{C}_m^q = \mathbf{U}_n \cdot \times \mathbf{U}_m \langle \varphi(\lambda_p^{(n)}, \lambda_q^{(m)}) \rangle \mathbf{U}_n \cdot \times \mathbf{U}_m ,$$

wo $\langle \varphi(\lambda_p^{(n)} \lambda_q^{(m)}) \rangle$ die aus den nm Eigenwerten (7) gebildete Diagonalmatrix bedeutet.

Also erhalten wir für die Matrix $\mathbf{L} = \mathbf{C}_n \cdot \times \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_n \cdot \times \mathbf{C}_m$

$$\mathbf{L} = \mathbf{U}_n \cdot \times \mathbf{U}_m \langle \lambda_p^{(n)} + \lambda_q^{(m)} \rangle \mathbf{U}_n \cdot \times \mathbf{U}_m ,$$

und für die Inverse $\mathbf{L}^{-1}$ ergibt sich hieraus

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{U}_n \cdot \times \mathbf{U}_m \left\langle \frac{1}{\lambda_p^{(n)} + \lambda_q^{(m)}} \right\rangle \mathbf{U}_n \cdot \times \mathbf{U}_m .$$

Wie die Formeln (6) und (7) zeigen, können sämtliche in diesen Formeln vorkommenden Zahlen aus goniometrischen Tafeln unmittelbar entnommen werden.

III. Berücksichtigung einer einfachen Modifikation der Randbedingungen

Um den Einfluß einer Modifikation der Randbedingungen auf die Lösung der Poissonschen Differenzengleichung anschaulich darstellen zu können, geben wir zuerst der Aufgabe eine mechanische Interpretation.

Werden in den Knotenpunkten P_{ij} eines quadratischen elastischen Fadennetzes die transversalen Kräfte q_{ij} angebracht, während die Endpunkte

$$P_{i0},\ P_{i,m+1},\ P_{0j},\ P_{n+1,j} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m)$$

der Fäden festgehalten werden, so werden die transversalen Verschiebungen x_{ij} der Knotenpunkte P_{ij} (bei geeigneter Wahl der Einheiten) durch die Gleichgewichtsgleichungen

$$4x_{ij} - x_{i+1,j} - x_{i-1,j} - x_{i,j-1} - x_{i,j+1} = q_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m) \tag{8}$$

bestimmt, wo gemäß den Randbedingungen

$$x_{0j},\ x_{n+1,j},\ x_{i0},\ x_{i,m+1}$$

veschwinden müssen.

Es sei jetzt der Knotenpunkt P_{rs} festgehalten. Dies bedeutet erstens, daß die Verschiebung $x_{rs} = 0$ gesetzt werden muß. Zweitens bekommt die

Gleichung mit dem Doppelindex (r, s) eine neue Bedeutung. Die Festhaltung des Knotenpunktes P_{rs} kann man nämlich auch in der Weise realisiert denken, daß man im Knotenpunkte P_{rs} eine vorläufig unbekannte, von den anderen Kräften q_{ij} abhängige Kraft q_{rs} anbringt, welche die Verschiebung x_{rs} ausgleicht. Diese Gleichung kann also nachträglich zur Berechnung der beim Festhalten des Knotenpunktes P_{rs} auftretenden Reaktionskraft benutzt werden, nachdem man erst die unbekannten Verschiebungen x_{ij} $((i, j) \neq (r, s))$ aus den übrigbleibenden $nm-1$ Gleichungen (8) berechnet hat.

Die Koeffizientenmatrix dieser Gleichungen ist aber nichts anderes als diejenige (gleichfalls symmetrische und definite) Hauptminormatrix, welche aus $\mathbf{L}$ durch Tilgung der Zeile und der Spalte mit dem Doppelindex (r, s) entsteht.

Wir werden auf diese Weise zur Aufgabe geführt, einen einfachen Algorithmus anzugeben, welche die Berechnung der Inversen einer Minormatrix aus der schon bekannten Inversen der ursprünglichen Matrix ermöglicht. Das geeignete Hilfsmittel zur Lösung dieser Aufgabe ist, wie wir jetzt zeigen wollen, eine besonders einfache rangvermindernde Operation.

Es sei $\mathbf{A}$ eine beliebige Matrix. Wir betrachten die folgende, aus $\mathbf{A}$ abgeleitete Matrix:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \frac{\mathbf{A u v' A}}{\mathbf{v' A u}}, \tag{9}$$

wo $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}'$ bis auf die Einschränkung $\mathbf{v'Au} \neq 0$ beliebige Parametervektoren sind. Es ist leicht zu zeigen, daß sich der Rang von $\mathbf{A}$ bei dieser Operation genau um Eins vermindert, d. h.

$$\operatorname{Rang}\left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A u v' A}}{\mathbf{v' A u}}\right) = \operatorname{Rang}(\mathbf{A}) - 1.$$

Es sei, wie üblich, der i-te Einheitsspaltenvektor mit $\mathbf{e}_i$, und der j-te Einheitszeilenvektor mit $\mathbf{e}_j'$ bezeichnet. Ist das Element $a_{ij} = \mathbf{e}_j' \mathbf{A} \mathbf{e}_i$ von $\mathbf{A}$ von 0 verschieden, so kann $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$, $\mathbf{v}' = \mathbf{e}_j'$ gesetzt werden. Bei dieser Wahl der Parametervektoren ist jedoch $\mathbf{A}\mathbf{e}_i$ die i-te Spalte von $\mathbf{A}$, und $\mathbf{e}_j'\mathbf{A}$ ist die j-te Zeile von $\mathbf{A}$. Die Matrix vom Typ (9), welche bei dieser Wahl der Parametervektoren erhalten wird, erfüllt also offenbar die Relationen

$$\left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A e}_i \mathbf{e}_j' \mathbf{A}}{\mathbf{e}_j' \mathbf{A e}_i}\right)\mathbf{e}_i = 0, \quad \mathbf{e}_j'\left(\mathbf{A} - \frac{\mathbf{A e}_i \mathbf{e}_j' \mathbf{A}}{\mathbf{e}_j' \mathbf{A e}_i}\right) = 0,$$

d. h. die i-te Spalte und die j-te Zeile der abgeleiteten Matrix bestehen aus lauter Nullen.

Nach dieser Vorbereitung beweisen wir den folgenden

SATZ. *Wenn man an der Inversen* $\mathbf{A}^{-1}$ *einer Matrix* $\mathbf{A}$ *N-ter Ordnung die rangvermindernde Operation mit Hilfe der Formel*

$$\mathbf{A}^{-1}-\frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j'\mathbf{A}^{-1}}{\mathbf{e}_j'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_i} \tag{10}$$

ausführt, und die so entstehende i-te Spalte und j-te Zeile (welche aus lauter 0-en bestehen) wegläßt, die übrigbleibende Matrix N—1-ter Ordnung gleich der Inversen derjenigen Minormatrix von $\mathbf{A}$ *ist, welche durch Tilgung der j-ten Spalte und der i-ten Zeile entsteht.*[2]

BEWEIS. Werden die Elemente der Inversen durch ihre wohlbekannten Ausdrücke A_{ij}/A ersetzt, wo $A=\operatorname{Det}\mathbf{A}$ und A_{ij} das algebraische Komplement von a_{ji} bedeutet, so erhalten die Elemente der Matrix (10) die folgende Form:

$$\frac{A_{pq}}{A}-\frac{A_{pi}A_{jq}}{AA_{ji}}=\frac{A_{ji}A_{pq}-A_{pi}A_{jq}}{AA_{ji}}.$$

Die im Zähler vorkommende Determinante zweiter Ordnung ist aber nach einem Satz von JACOBI ([5], S. 61) gleich dem Produkt $AA_{ji,pq}$, wo $A_{ji,pq}$ die zu den Indexpaaren ij, qp gehörige Unterdeterminante $N-2$-ter Ordnung von $\mathbf{A}$ bedeutet. Das allgemeine Element von (10) ist also

$$\frac{A_{ji,pq}}{A_{ji}},$$

d. h. genau das zum Indexpaar pq gehörige Element von $\mathbf{A}_{ij}^{-1}$. Q. e. d.

Aus diesem Ergebnis folgt, daß die Hinzunahme einer neuen Bedingung $x_{rs}=0$ zu den schon vorhandenen Randbedingungen dadurch berücksichtigt werden kann, daß man die Inverse der ursprünglichen Matrix einer rangvermindernden Operation unterwirft. Werden mehrere, z. B. k neue derartige Randbedingungen vorgeschrieben, so kann man diese neuen Randbedingungen durch die sukzessive Ausführung von k Operationen von der Form (10) berücksichtigen.

Im folgenden Abschnitt soll noch gezeigt werden, daß die k neuen Rand-

[2] *Bemerkung des Redakteurs.* Dasselbe Resultat haben, unabhängig von E. EGERVÁRY, P. RÓZSA und N. SIEBER erhalten. (S. П. Рожа, О применении клеточных матриц в механике корпускулярных систем, Усп. Мат. Наук., 14 (1959), вып. 4 (88), S. 207—211; H. STENKER und N. SIEBER, Ein Reduktionssatz über Umkehrmatrizen und seine Anwendung auf ein Beispiel aus der Statik, *Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar,* 6 (1958/59), H. 2, S. 105—117.)

bedingungen auch durch eine einzige, „mehrfache" rangvermindernde Operation berücksichtigt werden können, wobei allerdings die Inversion einer Matrix k-ter Ordnung ausgeführt werden muß.

IV. Berücksichtigung einer mehrfachen Modifikation der Randbedingungen

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß das Ergebnis $\mathbf{A}_\varkappa$ von $\varkappa$ sukzessiv ausgeführten einfachen rangvermindernden Operationen (9) auch durch die folgende „mehrfache" rangvermindernde Operation gewonnen werden kann:

(11) $$\mathbf{A}_\varkappa = \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{U}_\varkappa(\mathbf{V}'_\varkappa \mathbf{A}\mathbf{U}_\varkappa)^{-1}\mathbf{V}'_\varkappa \mathbf{A}.$$

Hier ist

$$\mathbf{U}_\varkappa = [\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_\varkappa], \quad \mathbf{V}'_\varkappa = \begin{bmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \mathbf{v}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}'_\varkappa \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{V}'_\varkappa \mathbf{A}\mathbf{U}_\varkappa| \neq 0.$$

Nehmen wir an, daß (11) schon für $\varkappa = 1, 2, \ldots, k$ bewiesen ist. Dann erhalten wir durch Ausführung einer $k+1$-ten rangvermindernden Operation

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A}_k - \frac{\mathbf{A}_k \mathbf{u}_{k+1} \mathbf{v}'_{k+1} \mathbf{A}_k}{\mathbf{v}'_{k+1} \mathbf{A}_k \mathbf{u}_{k+1}}.$$

Wird jetzt hier der Ausdruck (11) von $\mathbf{A}_k$ substituiert, so folgt

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{U}_k(\mathbf{V}'_k \mathbf{A}\mathbf{U}_k)^{-1}\mathbf{V}'_k \mathbf{A} - \frac{\{\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{U}_k(\mathbf{V}'_k \mathbf{A}\mathbf{U}_k)^{-1}\mathbf{V}'_k \mathbf{A}\}\mathbf{u}_{k+1}\mathbf{v}'_{k+1}\{\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{U}_k(\mathbf{V}'_k \mathbf{A}\mathbf{U}_k)^{-1}\mathbf{V}'_k \mathbf{A}\}}{\mathbf{v}'_{k+1}\{\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{U}_k(\mathbf{V}'_k \mathbf{A}\mathbf{U}_k)^{-1}\mathbf{V}'_k \mathbf{A}\}\mathbf{u}_{k+1}}.$$

Wir werden zeigen, daß die Formel (11) für $\varkappa = k+1$ zu demselben Ergebnis führt. Wir schreiben zuerst $\mathbf{U}_{k+1}$ und $\mathbf{V}'_{k+1}$ als partitionierte Matrizen:

$$\mathbf{U}_{k+1} = [\mathbf{U}_k \, \mathbf{u}_{k+1}], \quad \mathbf{V}'_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}'_k \\ \mathbf{v}'_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}'_{k+1}\mathbf{A}\mathbf{U}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}'_k \mathbf{A}\mathbf{U}_k & \mathbf{V}'_k \mathbf{A}\mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{v}'_{k+1}\mathbf{A}\mathbf{U}_k & \mathbf{v}'_{k+1}\mathbf{A}\mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Werden diese Ausdrücke in (11) substituiert, so erhält die Formel (11) für $\varkappa = k+1$ folgende Form:

(12) $$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{A} - \mathbf{A}[\mathbf{U}_k \, \mathbf{u}_{k+1}] \begin{bmatrix} \mathbf{V}'_k \mathbf{A}\mathbf{U}_k & \mathbf{V}'_k \mathbf{A}\mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{v}'_{k+1}\mathbf{A}\mathbf{U}_k & \mathbf{v}'_{k+1}\mathbf{A}\mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}'_k \\ \mathbf{v}'_{k+1} \end{bmatrix} \mathbf{A}.$$

Durch Anwendung einer bekannten Formel für die Inversion einer partitionierten Matrix bekommt man hieraus

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}'_k\mathbf{A}\mathbf{U}_k & \mathbf{V}'_k\mathbf{A}\mathbf{u}_{k+1} \\ \mathbf{v}'_{k+1}\mathbf{A}\mathbf{U}_k & \mathbf{v}'_{k+1}\mathbf{A}\mathbf{u}_{k+1} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{V}'_k\mathbf{A}\mathbf{U}_k)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{\mathbf{v}'_{k+1}\{\mathbf{A}-\mathbf{A}\mathbf{U}_k(\mathbf{V}'_k\mathbf{A}\mathbf{U}_k)^{-1}\mathbf{V}'_k\mathbf{A}\}\mathbf{u}_{k+1}} \begin{bmatrix} (\mathbf{V}'_k\mathbf{A}\mathbf{U}_k)^{-1}\mathbf{V}'_k\mathbf{A}\mathbf{u}_{k+1} \\ -1 \end{bmatrix} [\mathbf{v}'_{k+1}\mathbf{A}\mathbf{U}_k(\mathbf{V}'_k\mathbf{A}\mathbf{U}_k)^{-1} \quad -1]$$

Wird dieses Ergebnis in (12) eingesetzt, so erkennt man unmittelbar, daß beide Ausdrücke für $\mathbf{A}_{k+1}$ übereinstimmen. Damit haben wir die Gültigkeit von (11) durch Induktion bewiesen.

Wir schreiben jetzt die Inverse der symmetrischen, positiv-definiten Matrix $\mathbf{L}$ in der Form

$$\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N] = \begin{bmatrix} \mathbf{r}'_1 \\ \vdots \\ \mathbf{r}'_N \end{bmatrix} = [r_{ij}] \qquad (i, j = 1, 2, \dots, N),$$

und stellen uns die Aufgabe, die Inverse der Hauptminormatrix $N-k$-ter Ordnung, welche aus $\mathbf{L}$ durch Tilgung der i_1-ten, i_2-ten, $\dots$, i_k-ten Zeilen und Spalten entsteht, mit Hilfe von $\mathbf{L}^{-1}$ zu berechnen. Zu diesem Zwecke setzen wir in der allgemeinen Formel (11)

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{e}_{i_1}, \ \mathbf{u}_2 = \mathbf{e}_{i_2}, \dots, \ \mathbf{u}_k = \mathbf{e}_{i_k},$$
$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{e}'_{i_1}, \ \mathbf{v}'_2 = \mathbf{e}'_{i_2}, \dots, \ \mathbf{v}'_k = \mathbf{e}'_{i_k}.$$

Dann wird

$$\mathbf{R}\mathbf{U}_k = [\mathbf{r}_{i_1}\mathbf{r}_{i_2} \dots \mathbf{r}_{i_k}], \qquad \mathbf{V}'_k\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}'_{i_1} \\ \mathbf{r}'_{i_2} \\ \vdots \\ \mathbf{r}'_{i_k} \end{bmatrix},$$

und

$$\mathbf{V}'_k\mathbf{R}\mathbf{U}_k = \begin{bmatrix} r_{i_1i_1} & \dots & r_{i_1i_k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ r_{i_ki_1} & \dots & r_{i_ki_k} \end{bmatrix}$$

ist invertierbar.

Wird jetzt die k-fache rangvermindernde Operation

$$\mathbf{R} - [\mathbf{r}_{i_1} \dots \mathbf{r}_{i_k}] \begin{bmatrix} r_{i_1i_1} & \dots & r_{i\, i_k} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ r_{i_ki_1} & \dots & r_{i_ki_k} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}'_{i_1} \\ \vdots \\ \mathbf{r}'_{i_k} \end{bmatrix}$$

ausgeführt, so ergibt sich eine Matrix, deren i_1-, i_2-, $\dots$, i_k-te Zeilen und Spalten aus lauter 0-en bestehen. Diejenige Matrix $N-k$-ter Ordnung, welche nach Tilgung dieser 0-Zeilen und 0-Spalten übrigbleibt, ist nichts anderes als die gesuchte Inverse der oben ausgewählten Hauptminormatrix.

Auf diese Weise haben wir ein Verfahren gefunden, welche die Berücksichtigung von k neuen Randbedingungen durch eine einzige und explizite matrizentechnische Operation gestattet.

V. Beispiele

Wir betrachten jetzt ein quadratisches Netz mit den 9 inneren Knotenpunkten und mit den Randpunkten

$$P_{ij} \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Bei verschwindenden Randwerten und bei lexikographischer Anordnung hat das Poissonsche Differenzengleichungssystem folgende Form:

$$\begin{array}{l} 4x_{11} - x_{12} \qquad - x_{21} \qquad\qquad\qquad = p_{11}, \\ -x_{11} + 4x_{12} - x_{13} \qquad - x_{22} \qquad\qquad = p_{12}, \\ \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad - x_{23} \quad - x_{32} + 4x_{33} = p_{33}. \end{array}$$

Wird die Koeffizientenmatrix $\mathbf{L}$ 9-ter Ordnung dieses Gleichungssystems gemäß den Ausführungen des Abschnittes I folgendermaßen partitioniert:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{E} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{K} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{E} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

so erhält man aus der Formel (4)

$$\text{(13)} \quad \mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} T_2(\mathbf{K})\, T_0(\mathbf{K})\, T_3(\mathbf{K})^{-1} & T_1(\mathbf{K})\, T_0(\mathbf{K})\, T_3(\mathbf{K})^{-1} & T_0(\mathbf{K})^2\, T_3(\mathbf{K})^{-1} \\ T_1(\mathbf{K})\, T_0(\mathbf{K})\, T_3(\mathbf{K})^{-1} & T_1(\mathbf{K})^2\, T_3(\mathbf{K})^{-1} & T_0(\mathbf{K})\, T_1(\mathbf{K})\, T_3(\mathbf{K})^{-1} \\ T_0(\mathbf{K})^2\, T_3(\mathbf{K})^{-1} & T_0(\mathbf{K})\, T_1(\mathbf{K})\, T_3(\mathbf{K})^{-1} & T_0(\mathbf{K})\, T_2(\mathbf{K})\, T_3(\mathbf{K})^{-1} \end{bmatrix}.$$

Aus der Rekursionsformel (2) folgt

$$T_0(\mathbf{K}) = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_1(\mathbf{K}) = \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$T_2(\mathbf{K}) = \mathbf{K}^2 - \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 16 & -8 & 1 \\ -8 & 17 & -8 \\ 1 & -8 & 16 \end{bmatrix}, \quad T_3(\mathbf{K}) = \mathbf{K}^3 - 2\mathbf{K} = 4 \begin{bmatrix} 17 & -12 & 3 \\ -12 & 20 & -12 \\ 3 & -12 & 17 \end{bmatrix},$$

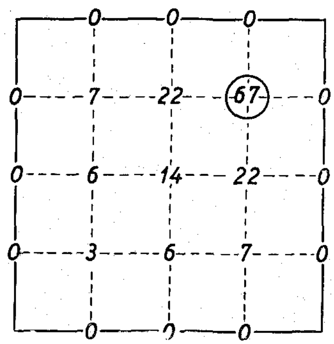
$$T_3(\mathbf{K})^{-1} = \frac{1}{224} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 6 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Substituiert man diese Matrizen in (13), so ergibt sich

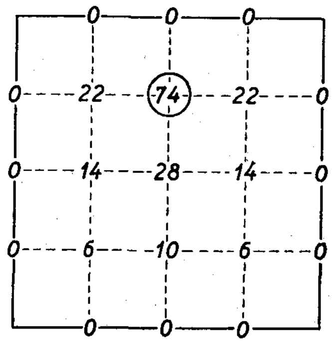
$$\mathbf{R}=\mathbf{L}^{-1}=\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 16 & -8 & 1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & 17 & -8 & -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & 16 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & -1 & 0 & 17 & -8 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -8 & 18 & -8 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 1 & -8 & 17 & 0 & -1 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 16 & -8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & -1 & -8 & 17 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & -8 & 16 \end{array}\right] \cdot \times \frac{\begin{bmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 6 & 10 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}}{224} =$$

$$=\frac{1}{224}\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 67 & 22 & 7 & 22 & 14 & 6 & 7 & 6 & 3 \\ 22 & 74 & 22 & 14 & 28 & 14 & 6 & 10 & 6 \\ 7 & 22 & 67 & 6 & 14 & 22 & 3 & 6 & 7 \\ \hline 22 & 14 & 6 & 74 & 28 & 10 & 22 & 14 & 6 \\ 14 & 28 & 14 & 28 & 84 & 28 & 14 & 28 & 14 \\ 6 & 14 & 22 & 10 & 28 & 74 & 6 & 14 & 22 \\ \hline 7 & 6 & 3 & 22 & 14 & 6 & 67 & 22 & 7 \\ 6 & 10 & 6 & 14 & 28 & 14 & 22 & 74 & 22 \\ 3 & 6 & 7 & 6 & 14 & 22 & 7 & 22 & 67 \end{array}\right].$$

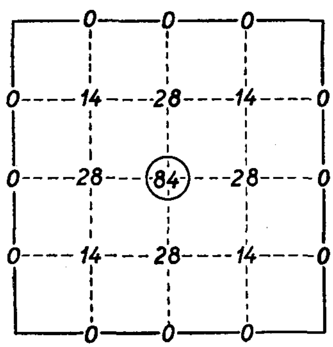
Dieses Ergebnis läßt sich am besten veranschaulichen, wenn man von der lexikographischen Anordnung der Knotenpunkte zur natürlichen quadratischen Anordnung zurückkehrt. So erkennt man, daß die Wertsysteme der Unbekannten, welche aus den ersten, dritten, siebten und neunten Zeilen (oder Spalten) von $\mathbf{L}^{-1}$ entstehen, Spiegelbilder von einander sind, und zwar erhält man aus der dritten Zeile (nach Weglassen des gemeinsamen Faktors 1/224):



Die zweite Zeile ergibt das Wertsystem



(aus der vierten, sechsten, achten Zeile erhält man die Spiegelbilder dieser Verteilung). Die fünfte Zeile (welche mechanisch der Belastung des Fadennetzes in seinem Mittelpunkt entspricht) ergibt das Wertsystem



Jetzt soll die neue Randbedingung $x_{11} = 0$ hinzugenommen werden, das bedeutet, daß der Knotenpunkt P_{11} festgehalten wird. Zum Laplaceschen Operator, welcher den modifizierten Randbedingungen entspricht, gehört die quadratische Minormatrix $\mathbf{L}^*$ 8-ter Ordnung, welche aus $\mathbf{L}$ durch Tilgung der ersten Zeile und ersten Spalte entsteht. Die Inverse dieser Minormatrix läßt sich aus $\mathbf{L}^{-1}$ nach Abschnitt IV mit Hilfe der rangvermindernden Operation

(10) bestimmen:

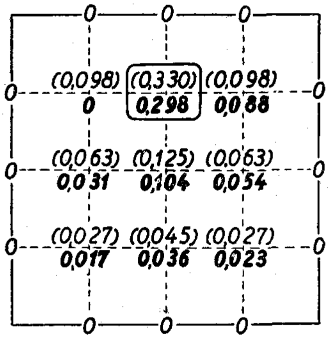
$$\mathbf{L}^{*(-1)} = \mathbf{R} - \frac{\mathbf{r}_{11}\mathbf{r}_{11}'}{r_{11,11}} = \mathbf{R} - \frac{1}{67\cdot 224}\begin{bmatrix} 67 \\ 22 \\ 7 \\ 22 \\ 14 \\ 6 \\ 7 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}[67\ 22\ 7\ 22\ 14\ 6\ 7\ 6\ 3] =$$

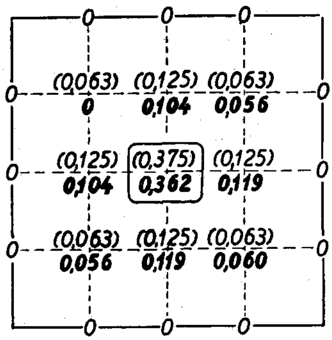
$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0{,}299 & 0{,}098 & 0{,}031 & 0{,}098 & 0{,}063 & 0{,}027 & 0{,}031 & 0{,}027 & 0{,}013 \\
0{,}098 & 0{,}330 & 0{,}098 & 0{,}063 & 0{,}125 & 0{,}063 & 0{,}027 & 0{,}045 & 0{,}027 \\
0{,}031 & 0{,}098 & 0{,}299 & 0{,}027 & 0{,}063 & 0{,}098 & 0{,}013 & 0{,}027 & 0{,}031 \\
\hline
0{,}098 & 0{,}063 & 0{,}027 & 0{,}330 & 0{,}125 & 0{,}045 & 0{,}098 & 0{,}063 & 0{,}027 \\
0{,}063 & 0{,}125 & 0{,}063 & 0{,}125 & 0{,}375 & 0{,}125 & 0{,}063 & 0{,}125 & 0{,}063 \\
0{,}027 & 0{,}063 & 0{,}098 & 0{,}045 & 0{,}125 & 0{,}330 & 0{,}027 & 0{,}063 & 0{,}098 \\
\hline
0{,}031 & 0{,}027 & 0{,}013 & 0{,}098 & 0{,}063 & 0{,}027 & 0{,}299 & 0{,}098 & 0{,}031 \\
0{,}027 & 0{,}045 & 0{,}027 & 0{,}063 & 0{,}125 & 0{,}063 & 0{,}098 & 0{,}330 & 0{,}098 \\
0{,}013 & 0{,}027 & 0{,}031 & 0{,}027 & 0{,}063 & 0{,}098 & 0{,}031 & 0{,}098 & 0{,}299
\end{array}\right] -$$

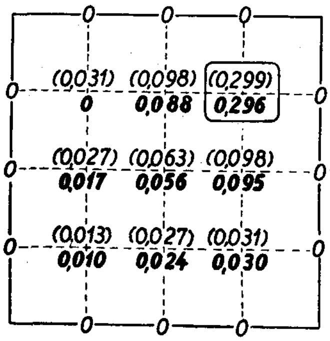
$$- \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0{,}299 & 0{,}098 & 0{,}031 & 0{,}098 & 0{,}063 & 0{,}027 & 0{,}031 & 0{,}027 & 0{,}013 \\
0{,}098 & 0{,}032 & 0{,}010 & 0{,}032 & 0{,}021 & 0{,}009 & 0{,}010 & 0{,}009 & 0{,}004 \\
0{,}031 & 0{,}010 & 0{,}003 & 0{,}010 & 0{,}007 & 0{,}003 & 0{,}003 & 0{,}003 & 0{,}001 \\
\hline
0{,}098 & 0{,}032 & 0{,}010 & 0{,}032 & 0{,}021 & 0{,}009 & 0{,}010 & 0{,}009 & 0{,}004 \\
0{,}063 & 0{,}021 & 0{,}007 & 0{,}021 & 0{,}013 & 0{,}006 & 0{,}007 & 0{,}006 & 0{,}003 \\
0{,}027 & 0{,}009 & 0{,}003 & 0{,}009 & 0{,}006 & 0{,}002 & 0{,}003 & 0{,}002 & 0{,}001 \\
\hline
0{,}031 & 0{,}010 & 0{,}003 & 0{,}010 & 0{,}007 & 0{,}003 & 0{,}003 & 0{,}003 & 0{,}001 \\
0{,}027 & 0{,}009 & 0{,}003 & 0{,}009 & 0{,}006 & 0{,}002 & 0{,}003 & 0{,}002 & 0{,}001 \\
0{,}013 & 0{,}004 & 0{,}001 & 0{,}004 & 0{,}003 & 0{,}001 & 0{,}001 & 0{,}001 & 0{,}001
\end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}298 & 0{,}088 & 0{,}031 & 0{,}104 & 0{,}054 & 0{,}017 & 0{,}036 & 0{,}023 \\
0 & 0{,}088 & 0{,}296 & 0{,}017 & 0{,}056 & 0{,}095 & 0{,}010 & 0{,}024 & 0{,}030 \\
\hline
0 & 0{,}031 & 0{,}017 & 0{,}298 & 0{,}104 & 0{,}036 & 0{,}088 & 0{,}054 & 0{,}023 \\
0 & 0{,}104 & 0{,}056 & 0{,}104 & 0{,}362 & 0{,}119 & 0{,}056 & 0{,}119 & 0{,}060 \\
0 & 0{,}054 & 0{,}095 & 0{,}036 & 0{,}119 & 0{,}328 & 0{,}024 & 0{,}061 & 0{,}097 \\
\hline
0 & 0{,}017 & 0{,}010 & 0{,}088 & 0{,}056 & 0{,}024 & 0{,}296 & 0{,}095 & 0{,}030 \\
0 & 0{,}036 & 0{,}024 & 0{,}054 & 0{,}119 & 0{,}061 & 0{,}095 & 0{,}328 & 0{,}097 \\
0 & 0{,}023 & 0{,}030 & 0{,}023 & 0{,}060 & 0{,}097 & 0{,}030 & 0{,}097 & 0{,}298
\end{array}\right].$$

Wenn man von der lexikographischen Anordnung der Knotenpunkte wieder zur natürlichen quadratischen Anordnung zurückkehrt, so erhält man aus der zweiten, dritten bzw. fünften Zeile die folgenden Wertsysteme (die in Klammern stehenden Werte gehören zu den ursprünglichen Randbedingungen; der Einfluß der modifizierten Randbedingung ist deutlich zu bemerken):







Das vorgeführte Beispiel war geeignet, die einzelnen Operationen zu illustrieren, konnte jedoch wegen der kleinen Ordnungszahlen der darin vorkommenden Matrizen kaum einen Einblick in die praktische Anwendbarkeit der Methode bieten. Deshalb wollen wir hier noch zum Schluß einen Überblick der Rechnungen geben, welche notwendig sind, wenn man ein hinreichend detailliertes Bild des gesuchten funktionalen Zusammenhanges sich verschaffen will.

Nehmen wir an, daß wir die Poissonsche Differenzengleichung für ein L-förmiges Gebiet lösen wollen (Fig. 1), welches 75 innere Knotenpunkte enthält. Die direkte Inversion einer Matrix 75-ter Ordnung ist schon eine Rechenaufgabe, welche auch die Fähigkeit vieler Rechenautomaten übertrifft. Unsere Methode erlaubt es, die gesuchte Inverse mit Hilfe einer Rechenmaschine, welche rationale Matrixoperationen bis zur Ordnung 10 ausführen kann (z. B. des Types Pegasus der Firme Ferranti), ohne Schwierigkeiten zu berechnen.

Wir wollen zuerst die Laplacesche Operatormatrix invertieren, welche zum „einfassenden" quadratischen Gebiet mit $10\times 10=100$ inneren Knotenpunkten gehört. Zu diesem Zwecke muß man mit Hilfe der Rekursionsfor-

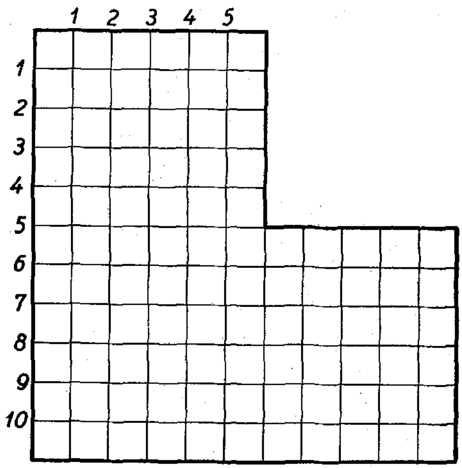


Fig. 1

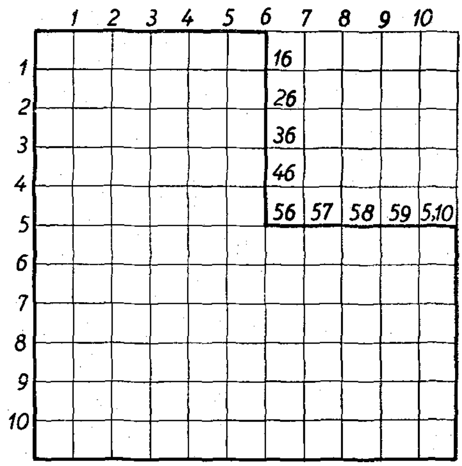


Fig. 2

meln (Abschnitt II, (2)) folgende Matrixpolynome der Matrix **K** 10-ter Ordnung berechnen:

$$T_0(\mathbf{K})=\mathbf{E},\ T_1(\mathbf{K})=\mathbf{K},\ldots,\ T_{11}(\mathbf{K}),$$

und dann die Matrix $T_{11}(\mathbf{K})$ 10-ter Ordnung invertieren. Im Besitze dieser Matrizen erhalten wir die 100 Blöcke von $\mathbf{L}^{-1}=\mathbf{R}$ nach Formel (4) durch einfache Matrixmultiplikationen (wegen der Zentrosymmetrie gibt es nur 30 verschiedene Blöcke). Das L-Gebiet in Fig. 1 entsteht aus dem quadratischen Gebiet in Fig. 2 durch Abtrennung eines Teilquadrates, d. h. durch Hinzunahme der neuen Randbedingungen

$$x_{16}=x_{26}=x_{36}=x_{46}=x_{56}=x_{57}=x_{58}=x_{59}=x_{5,10}=0.$$

Diese neun Randbedingungen können nach Abschnitt IV gleichzeitig durch eine neunfache rangvermindernde Operation berücksichtigt werden. Wird die Minormatrix von **R** (Ordnung 100×9), welche aus den Spalten mit den

Doppelindizes 16, 26, 36, 46, 56, 57, 58, 59, 5,10 besteht, mit $\mathbf{S}$, die quadratische nichtsinguläre Matrix 9-ter Ordnung, welche aus den gemeinsamen Elementen von $\mathbf{S}$ und $\mathbf{S}'$ besteht, mit $\mathbf{T}$ bezeichnet, so erhält man die Inverse $\mathbf{L}^{*(-1)}$ der zum L-Gebiet gehörigen Laplaceschen Operatormatrix aus folgender Formel:

$$\mathbf{L}^{*(-1)} = \mathbf{R} - \mathbf{S}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{S}'.$$

Die Berechnung von $\mathbf{T}^{-1}$ erfordert die Inversion einer Matrix 9-ter Ordnung, und man hat — um die oben angegebene Kapazität der Rechenmaschine nicht zu überschreiten — die Matrix $\mathbf{S}$ in 10 Teilmatrizen (Ordnung 10×9) zu partitionieren.

(Eingegangen am 30. Dezember 1959.)

Literaturverzeichnis

[1] E. Egerváry, On a lemma of Stieltjes on matrices, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1953/54), S. 99—103.

[2] E. Egerváry, On hypermatrices whose blocks are commutable in pairs and their application in lattice dynamics, *Acta Sci. Math. Szeged*, **15** (1953/54), S. 211—222.

[3] E. Egerváry, On rank-diminishing operations and their application to the solution of lineare quations, *Zeitschrift für angew. Math. und Phys.*, **11** (1960), S. 376—386.

[4] C. Stéphanos, Sur une extension du calcul des substitutions linéaires, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **6** (1900), S. 73—126.

[5] E. Pascal, *Repertorium der höheren Mathematik* (Leipzig, 1910).