ÜBER DIE FEUERBACHSCHEN KUGELN MEHRDIMENSIONALER ORTHOZENTRISCHER SIMPLEXE

Von

G. HAJÓS (Budapest), korrespondierendem Mitglied der Akademie

E. EGERVÁRY[1] hat für $(n-1)$-dimensionale orthozentrische Simplexe Σ in Verallgemeinerung der bekannten zwei- und dreidimensionalen Fälle die Folge $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ Feuerbachscher Kugeln eingeführt, unter welchen Φ_k die Schwerpunkte und die Orthozentren aller $(k-1)$-dimensionalen Teilsimplexe von Σ enthält. Ist $k=2$, so ist dabei als Orthozentrum einer Kante die orthogonale Projektion des Orthozentrums von Σ auf die Kante zu verstehen. Ist $k=1$, so erhält man die Umkugel Φ_1 des Simplexes; ist $k=n$, so bedeutet Φ_n die Thaleskugel über die Verbindungsstrecke des Schwerpunktes und des Orthozentrums von Σ.

E. EGERVÁRY hat bei seiner Untersuchung auf Σ bezogene baryzentrische Koordinaten benutzt und u. a. bewiesen, daß die Folge der Feuerbachschen Kugeln einem Kugelbüschel zugehört; daß ihre Mittelpunkte $C_1, C_2, \ldots, C_n$ auf der durch das Orthozentrum O und den Schwerpunkt S bestimmten Eulerschen Geraden liegen und

$$OC_k : OS = n : 2k$$

ist; daß weiter für ihre Halbmesser $r_1, r_2, \ldots, r_n$ eine Relation

$$(2kr_k)^2 = a(n-2k)^2 + b$$

mit Konstanten a und b besteht, woraus insbesondere für die Halbmesser komplementärer Feuerbachscher Kugeln die Relation

$$kr_k = (n-k)\,r_{n-k}$$

folgt; daß ferner, wenn O_{n-k} das Orthozentrum eines $(n-k-1)$-dimensionalen Teilsimplexes bedeutet und O'_k durch

$$OO'_k : OO_{n-k} = (n-k) : k$$

auf der Geraden OO_{n-k} bestimmt ist, dann O'_k auf Φ_k liegt; daß endlich bei einem orthozentrischen Punktsystem von $n+1$ Punkten [im $(n-1)$-dimen-

[1] E. EGERVÁRY, On orthocentric simplexes, *Acta. Scient. Math. Szeged.*, **9** (1940), pp. 218—226; On the Feuerbach-spheres of an orthocentric simplex, *Acta Math. Hung.*, **1** (1950), pp. 5—15.

sionalen Raume] die Kugeln Φ_k aller enthaltenen Simplexe nur bei $2k=n+1$ gleiche Halbmesser besitzen.

Das Ziel vorliegender Arbeit ist, die erwähnten Resultate mit Hilfe elementarer Vektorrechnung zu beweisen. Die anzuwendende Methode entstand aus einer von T. SZELE[2] gegebenen vektorarithmetischen Behandlung des Feuerbachschen Kreises in der Ebene. Unsere Überlegungen werden auch gewisse Ergänzungen der erwähnten Resultate liefern.

1. Wir bezeichnen die Scheitelpunkte des $(n-1)$-dimensionalen $(n>2)$ orthozentrischen Simplexes Σ mit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und ihre aus dem Orthozentrum O auslaufenden Ortsvektoren mit $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Laut der Definition ist der Vektor $\mathbf{a}_i$ auf alle nicht aus A_i auslaufenden Kanten orthogonal, also

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{a}_j-\mathbf{a}_k)=0 \qquad (j, k \neq i),$$

woraus folgt, daß

$$\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j=c \qquad (i\neq j;\ i,j=1,2,\ldots,n)$$

eine von der Wahl der Indizes i, j unabhängige Konstante ist. Daraus folgt unmittelbar der

HILFSSATZ. Ist $|\varepsilon_1|=|\varepsilon_2|=\cdots=|\varepsilon_n|=1$, so bleibt die Länge des Vektors

$$\varepsilon_1\mathbf{a}_1+\varepsilon_2\mathbf{a}_2+\cdots+\varepsilon_n\mathbf{a}_n$$

unverändert, wenn die Koeffizienten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ permutiert werden.

Das Quadrat dieses Vektors ist nämlich

$$\sum_i \mathbf{a}_i^2+2c\sum_{i\neq j}\varepsilon_i\varepsilon_j,$$

welcher Ausdruck tatsächlich keine Änderung unter einer Permutation der Zahlen ε_i erleidet. Um spätere Rechnung zu erleichtern, bemerken wir schon hier, daß für $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots=\varepsilon_k=-1,\ \varepsilon_{k+1}=\cdots=\varepsilon_n=1$

$$2\sum_{i\neq j}\varepsilon_i\varepsilon_j=(n-2k)^2-n$$

ist.

Wir werden nur von O auslaufende Ortsvektoren benutzen und die Schreibweise $A=\mathbf{a}$ gebrauchen, wenn $\mathbf{a}$ der Ortsvektor von A ist. Mit λA bezeichnen wir den Punkt vom Ortsvektor $\lambda\mathbf{a}$.

2. Sei $k=1,2,\ldots,n-1$. Wir betrachten die Schwerpunkte der $(k-1)$-dimensionalen Teilsimplexe von Σ. Einer von diesen ist

$$S_k=\frac{1}{k}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_k).$$

Alle diese Schwerpunkte liegen auf einer um

$$C_k=\frac{1}{2k}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n)$$

[2] T. SZELE, Elemi geometriai problémák megoldása vektorokkal, *A középiskolai matematikatanítás kérdései* (Budapest, 1950), pp. 75—93.

geschlagenen Kugel Φ_k, denn die Länge des aus C_k in S_k führenden Vektors

$$\frac{1}{2k}(-\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2-\cdots-\mathbf{a}_k+\mathbf{a}_{k+1}+\cdots+\mathbf{a}_n)$$

bleibt nach dem Hilfssatz bei Permutation der Indizes unverändert.

Wir betrachten weiter die Schwerpunkte S_{n-k} der $(n-k-1)$-dimensionalen Teilsimplexe und behaupten, daß die Punkte S_k und $\frac{n-k}{k}S_{n-k}$ paarweise diametral gegenüber einander auf Φ_k liegen. Ist nämlich einer der Punkte S_{n-k}

$$S_{n-k}=\frac{1}{n-k}(\mathbf{a}_{k+1}+\mathbf{a}_{k+2}+\cdots+\mathbf{a}_n),$$

also

$$\frac{n-k}{k}S_{n-k}=\frac{1}{k}(\mathbf{a}_{k+1}+\mathbf{a}_{k+2}+\cdots+\mathbf{a}_n),$$

so ist mit dem obigen S_k

$$S_k+\frac{n-k}{k}S_{n-k}=2C_k,$$

was eben unsere Behauptung beweist.

3. Sei O_k das Orthozentrum eines $(k-1)$-dimensionalen Teilsimplexes $A_1A_2\cdots A_k$. Sein $(k-1)$-dimensionaler Raum ist total orthogonal auf den $(n-k)$-dimensionalen, die Punkte $O, A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$ enthaltenden Raum. Da O_k gemeinsamer Punkt beider Räume ist, da ferner der eine Raum den Punkt S_k, der andere den Punkt $\frac{n-k}{k}S_{n-k}$ enthält, und beide genannten Punkte diametral gegenüber einander auf Φ_k liegen, liegt nach dem Thales'schen Satze auch O_k auf Φ_k.

Ähnliche Überlegung zeigt, daß auch die Punkte $\frac{n-k}{k}O_{n-k}$ auf Φ_k liegen, wobei O_{n-k} das Orthozentrum eines $(n-k-1)$-dimensionalen Teilsimplexes bezeichnet. Ist nämlich O_{n-k} das Orthozentrum des durch die Punkte $A_{k+1}, A_{k+2}, \ldots, A_n$ bestimmten Teilsimplexes, so ist $\frac{n-k}{k}O_{n-k}$ in beiden durch die Punkte $O, A_1, A_2, \ldots, A_k$, bzw. $\frac{n-k}{k}A_{k+1}, \frac{n-k}{k}A_{k+2}, \ldots, \frac{n-k}{k}A_n$ ausgespannten, total orthogonalen Räumen enthalten. Da aber der eine der ganannten Räume den Punkt S_k, der andere den Punkt $\frac{n-k}{k}S_{n-k}$ enthält, liegt $\frac{n-k}{k}O_{n-k}$ nach dem Thales'schen Satze auf Φ_k.[3]

[3] Mit Hilfe der in der Einleitung über r_k und r_{n-k} erwähnten Formel folgt einfach, daß die Kugeln Φ_k und Φ_{n-k} samt allen ihren oben erwähnten Punkten homothetisch bezüglich des Punktes O liegen.

4. Im Falle $k=n$ kann von der um

$$C_n=\frac{1}{2n}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n)$$

geschlagenen, den Schwerpunkt S von Σ enthaltenden Kugel Φ_n nur behauptet werden, daß sie auch das Orthozentrum O von Σ enthält und daß S und O diametral gegenüber einander auf ihr liegen. Das folgt nämlich unmittelbar aus $S=2C_n$. Somit ergibt sich die orthozentroidale Kugel Φ_n von Σ als Abschließung der Folge von Feuerbachschen Kugeln.

5. Die Ortsvektoren der Mittelpunkte $C_1, C_2, \ldots, C_n$ zeigen, daß sie auf der die Punkte O und S verbindenden Eulerschen Geraden liegen und

$$C_k=\frac{n}{2k}S$$

ist. Bei ungerader Dimensionszahl ist also auch S selbst Mittelpunkt einer Feuerbachschen Kugel.

Für den Halbmesser r_k von Φ_k ergibt sich nach 1 und 2

$$r_k^2=\left[\frac{1}{2k}(-\mathbf{a}_1-\cdots-\mathbf{a}_k+\mathbf{a}_{k+1}+\cdots+\mathbf{a}_n)\right]^2=\frac{1}{4k^2}\left[\sum_i \mathbf{a}_i^2+c((n-2k)^2-n)\right],$$

womit wir die in der Einleitung erwähnte Formel erhalten haben. Diese Formel zeigt zugleich, daß r_k^2 ein quadratisches Polynom von $\frac{1}{k}$, also auch des Mittelpunktabstandes OC_k ist (mit von k unabhängigen Koeffizienten), daß also die Feuerbachschen Kugeln demselben Kugelbüschel zugehören.

6. Die Eulersche Gerade enthält auch

$$E=\frac{1}{n+1}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n),$$

den Schwerpunkt der Punkte $O, A_1, A_2, \ldots, A_n$. Wegen $C_k=\frac{n+1}{2k}E$ ergibt sich

$$EC_k : EO = 1 - OC_k : OE = 1-\frac{n+1}{2k}.$$

Wir betrachten nun das orthozentrische System der $n+1$ Punkte $O, A_1, A_2, \ldots, A_n$. Durch Weglassen eines von diesen erhält man n Punkte, die ein orthozentrisches Simplex bestimmen, dessen Orthozentrum der weggelassene Punkt ist. Nach den eben Bemerkten gehen die Eulerschen Geraden aller dieser $n+1$ Simplexe durch den Punkt E. Die zu diesen Simplexen gehörenden Punkte C_k bilden ein mit dem ursprünglichen orthozentrischen Punktsystem homothetisches Punktsystem. Das Zentrum dieser Homothetie ist E und das Homothetieverhältnis ist $1-\frac{n+1}{2k}$.

7. Um die Halbmesser aller vorkommenden Feuerbachschen Kugeln vergleichen zu können, führen wir die Quadratsumme aller Abstände der $n+1$ Punkte ein, welche Quadratsumme

$$q = \sum \mathbf{a}_i^2 + \sum (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)^2 = n \sum \mathbf{a}_i^2 - n(n-1)c$$

ausfällt. Somit ist nach 5

$$r_k^2 = \frac{1}{4k^2}\left[\frac{q}{n} + ((n-2k)^2 - 1)c\right].$$

Ist A_i der weggelassene Punkt, so tritt an Stelle von c der Ausdruck

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) = \mathbf{a}_i^2 - c.$$

Sind alle diese Ausdrücke gleich c, so ist

$$\cos(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = \frac{c}{|\mathbf{a}_i|\,|\mathbf{a}_j|} = \frac{1}{2}$$

und somit das Simplex Σ regelmäßig. Die Halbmesser der $n+1$ Kugeln Φ_k stimmen also für ein jedes k nur bei regelmäßigen Simplexen überein.

Ist Σ nicht regelmäßig, so sind die Halbmesser der $n+1$ Kugeln Φ_k nach der obigen Formel nur bei $k = \frac{n+1}{2}$ gleich, was nur bei gerader Dimensionszahl vorkommen kann. Ist $k = \frac{n+1}{2}$, so stimmen nicht nur die Halbmesser überein, sondern die Kugeln Φ_k selbst fallen auch zusammen, da in diesem Falle das oben erwähnte Homothetieverhältnis 0 ist.

(Eingegangen am 20. Dezember 1951.)

О ШАРАХ ФЕЙЕРБАХА МНОГОМЕРНЫХ ОРТОЦЕНТРИЧЕСКИХ СИМПЛЕКСОВ

Г. ГАЁШ (Будапешт)

(Р е з ю м е)

Э. Эгервари ввёл последовательность шаров Фейербаха $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ относительно $n-1$ мерных ортоцентрических симплексов. Шар содержит центры тяжести и ортоцентры $k-1$ мерных субсимплексов исходного симплекса. Э. Эгервари прн помощи барицентрических координат, относящихся к ортоцентрическому симплексу, определил распределение этих шаров относительно друг друга и доказал ряд характерных для них свойств.

Настоящая работа добывает эти же результаты векторарифметическим путём и несколько дополняет их.