ÜBER EINE LÖSUNGSMETHODE GEWISSER FUNKTIONALGLEICHUNGEN

Von

I. FENYŐ (Budapest)

(*Vorgelegt von* A. RÉNYI)

Jüngst hat J. ACZÉL[1] eine allgemeine Methode zur Lösung gewisser Funktionalgleichungen mitgeteilt, welche die Lösung einer sehr weiten Klasse von Gleichungen liefert. Außer dieser verfügen wir auch über eine andere allgemeine Methode, die im wesentlichen darin besteht, daß durch Bildung geeigneter partieller Ableitungen die Funktionalgleichung in eine Differentialgleichung oder in ein Differentialgleichungssystem übergeführt wird. Diese Methode ist in den meisten Fällen sehr einfach, sie kann aber bloß dann benützt werden, wenn wir die Funktionalgleichung in der Klasse der genügend oft differenzierbaren Funktionen suchen, und die in der zu lösenden Gleichung auftretenden gegebenen Funktionen auch genügend oft differenzierbar sind.

Das Ziel dieser Arbeit ist zu zeigen, daß mittels der Theorie der Distributionen die Methode der Überführung von Funktionalgleichungen in Differentialgleichungen unter äußerst geringen Voraussetzungen leicht durchführbar ist. Wir werden im allgemeinen gar nicht die Funktionenlösungen, sondern die Distributionenlösungen der Funktionalgleichung bestimmen. Wollen wir doch von Funktionenlösungen sprechen, so erhalten wir die Existenz der Lösung in der Klasse der integrierbaren Funktionen.

Im folgenden werden wir die einfachsten Tatsachen der Distributionentheorie in der durch L. SCHWARTZ ausgearbeiteten Form benützen. Auch die Bezeichnungen und die Nomenklatur sind diejenigen, welche L. SCHWARTZ in seiner Monographie (*Théorie des Distributions*. I (Paris, 1950), II (Paris, 1951)) eingeführt hat.[2]

Wir schicken einige Begriffe und Definitionen voraus.

[1] J. ACZÉL, Grundriß einer allgemeinen Behandlung von einigen Funktionalgleichungstypen, *Publ. Math. Debrecen*, **3** (1953), S. 119—132.

[2] Im folgenden wollen wir dieses Werk unter der Bezeichnung L. SCH. I bzw. L. SCH. II zitieren.

§ 1

DEFINITION 1. Es sei T eine beliebige, in einem Bereich von R^2 definierte Distribution und $u(x)\in D_x$ eine festgehaltene Funktion. Wir werden unter *linksseitigem multiplikativem Produkt von u und T eine* in R^1 definierte und mit $(u)T$ bezeichnete Distribution verstehen, welche folgendermaßen definiert ist:

$$(u)T(\varphi)=T[u(x)\varphi(y)] \qquad (\varphi(y)\in D_y). \tag{1.1}$$

Daß $(u)T$ wahrlich eine Distribution ist, ist trivial.

Ganz analog definieren wir das *rechtsseitige multiplikative Produkt* von T mit einer beliebigen Funktion $v(y)$ aus der Funktionenklasse D_y.

Im besonderen Fall, wenn T das direkte Produkt von R und S ist (wo R und S Distributionen in R^1 sind), ist das linksseitige multiplikative Produkt von $v(x)\in D_x$ und $R\times S$ die folgende Distribution:

$$(v)R\times S=R(v)\cdot S. \tag{1.2}$$

Sie ist also die Distribution S multipliziert mit der Zahl $R(v)$.

DEFINITION 2. Es sei T eine Distribution in einem Bereich von R^1, α und β sind reelle oder komplexe, von Null verschiedene Zahlen. Unter $T_{\alpha x+\beta y}$ wollen wir folgende, in R^2 definierte Distribution verstehen:

$$T_{\alpha x+\beta y}(\varphi)=\beta^{-1}T\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z;\beta^{-1}t-\alpha\beta^{-1}z)\,dz\right]=\alpha^{-1}T\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha^{-1}t-\beta\alpha^{-1}z;z)\,dz\right]$$

$$(\varphi(x,y)\in D_{xy}). \tag{1.3}$$

Wenn $\varphi\in D_{xy}$, so ist $\psi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(z;\beta^{-1}t-\alpha\beta^{-1}z)\,dz\in D_t$, und konvergiert die Folge $\varphi_j(x,y)$ nebst allen partiellen Ableitungen gleichmäßig gegen 0, so konvergiert auch die Folge $\psi_j(t)$ nebst allen Ableitungen gleichmäßig gegen 0. Daraus folgt, daß das unter (1.3) definierte lineare und homogene Funktional wahrlich eine Distribution ist. Ist der Träger von T der Bereich $\mathfrak{M}$, so ist der Träger von $T_{\alpha x+\beta y}$ die durch die Relation $\alpha x+\beta y\in\mathfrak{M}$ definierte Menge.[3]

Wir bilden die partiellen Ableitungen von $T_{\alpha x+\beta y}$:

$$\frac{\partial T_{\alpha x+\beta y}}{\partial x}(\varphi)=-T_{\alpha x+\beta y}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right]=-\alpha^{-1}T\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\varphi(\alpha^{-1}t-\beta\alpha^{-1}z;\,z)\,dz\right]=$$

$$=-T\left[\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha^{-1}t-\beta\alpha^{-1}z;z)\,dz\right]=\alpha T'_{\alpha x+\beta y}(\varphi)\qquad(\varphi\in D_{xy}). \tag{1.4}$$

[3] Im Spezialfall, wenn $T(f)=\int f(x)a(x)\,dx$ ist, so ist $T_{\alpha x+\beta y}(\varphi(x,y))=\iint\varphi(x,y)\,a(\alpha x+\beta y)\,dx\,dy$.

Ebenso erhalten wir die folgende Relation:

$$\frac{\partial T_{\alpha x+\beta y}}{\partial y} = \beta T'_{\alpha x+\beta y}. \tag{1.5}$$

Ist $\alpha = \beta = 1$ bzw. $\alpha = 1$, $\beta = -1$, so wird aus (1.4) und (1.5)

$$\frac{\partial T_{x+y}}{\partial x} = \frac{\partial T_{x+y}}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial T_{x-y}}{\partial x} = -\frac{\partial T_{x-y}}{\partial y}. \tag{1.6}$$

DEFINITION 3. Wir betrachten die Distributionen $S_1, S_2, \ldots, S_n$ als linear unabhängig, falls es eine Funktion $\varphi \in D$ gibt, so daß die mit ihr gebildete „Wronskische Determinante" von Null verschieden ist, d. h

$$\begin{vmatrix} S_1(\varphi) & S_2(\varphi) \ldots & S_n(\varphi) \\ S_1'(\varphi) & S_2'(\varphi) \ldots & S_n'(\varphi) \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ S_1^{(n-1)}(\varphi) & S_2^{(n-1)}(\varphi) \ldots & S_n^{(n-1)}(\varphi) \end{vmatrix} \neq 0.^{4} \tag{1.7}$$

DEFINITION 4. Es seien S und T zwei, in einem Bereich von R^1 definierte Distributionen. Ihre *direkte Summe* ist eine in R^2 definierte und mit $S \dotplus T$ bezeichnete Distribution folgendermaßen definiert:

$$(S \dotplus T)(\varphi) = S\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\,dy\right] + T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\,dx\right] \qquad (\varphi \in D_{xy}). \tag{1.8}$$

Es bedarf keines Beweises, daß das unter (1.8), im Funktionenraum D_{xy} definierte lineare und homogene Funktional eine Distribution ist. Sie besitzt folgende Eigenschaft:

$$\frac{\partial^2 (S \dotplus T)}{\partial x\, \partial y} = 0. \tag{1.9}$$

BEWEIS.

$$\frac{\partial (S \dotplus T)}{\partial x}(\varphi) = -(S \dotplus T)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = -S\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy\right] - T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy\right] =$$

$$= -S\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy\right] \qquad (\varphi(x, y) \in D_{xy}),$$

denn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = [\varphi(x, y)]_{y=-\infty}^{y=+\infty} \equiv 0.$$

[4] Existieren n Zahlen so, daß $c_1 S_1 + c_2 S_2 + \ldots + c_n S_n \equiv 0$ (mindestens ein $c_i \neq 0$) ist, so ist die Determinante (1.7) gewiß gleich 0 und umgekehrt. Ob die Gültigkeit der Relation (1.7) notwendig für die lineare Unabhängigkeit der Distributionen (im Sinn $c_1 S_1 \dotplus \ldots \dotplus c_n S_n = S \not\equiv 0$) ist, ist eine offene Frage.

Die rechte Seite ist aber unabhängig von y,[5] und deshalb ist die Behauptung (1.9) richtig.

DEFINITON 5. Betrachten wir diejenigen, zur Funktionenklasse D_{xy} gehörenden Funktionen, deren Träger keinen gemeinsamen Punkt mit der X und Y Achse haben. Die Klasse dieser Funktionen sei mit G_{xy} bezeichnet. Es ist $G_{xy} \subset D_{xy}$. Betrachten wir die in einem Bereich von R^1 definierte Distribution T. Wir bilden aus ihr folgende, durch T_{xy} bezeichnete und in R^2 bestimmte Distribution folgendermaßen:

$$T_{xy}(\varphi) = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u, tu^{-1})u^{-1}du\right] = -T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(tu^{-1}, u)u^{-1}du\right] \tag{1.10}$$
$$(\varphi(x, y) \in G_{xy}).$$

Die Funktion $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(n, tu^{-1})u^{-1}du$ $\left(\text{und auch } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(tu^{-1}, u)u^{-1}du\right)$ gehört gewiß der Funktionenklasse D_t, daher ist (1.10) eine Distribution. Wir werden folgende Eigenschaften dieser Distribution benützen:

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = y T'_{xy} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = x T'_{xy}. \tag{1.11}$$

Um dies einzusehen, haben wir einerseits:

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x}(\varphi) = -T_{xy}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x}\varphi\left(\frac{t}{u}, u\right)u^{-1}dt\right] = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\varphi(tu^{-1}, u)du\right].$$
$$(\varphi(x, y) \in G_{xy}).$$

Anderseits ist

$$y T'_{xy}(\varphi) = T'_{xy}[\varphi(x, y)y] = -T'\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(tu^{-1}, u)u\,u^{-1}du\right] =$$
$$= T\left[\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(tu^{-1}, u)du\right],$$

und damit ist unsere Behauptung bewiesen. Die zweite Identität von (1.11) kann man in analoger Weise verifizieren.

DEFINITION 6. Es sei T wieder eine Distribution in R^1 und α eine beliebige, von 0 verschiedene reelle oder komplexe Zahl. Unter der *Kontraktion*

[5] L. SCH. I, S. 55.

von der Größe α der Distribution T verstehen wir eine mit $\varkappa_\alpha T$ bezeichnete Distribution R^1, deren Definition die folgende ist:

(1. 12) $$\varkappa_\alpha T(\varphi) = \alpha^{-1} T[\varphi(t\alpha^{-1})] \qquad (\varphi(t) \in D_t).$$

Die Ableitung von $\varkappa_\alpha T$ läßt sich folgendermaßen bilden:

(1. 13) $$(\varkappa_\alpha T)' = \alpha \varkappa_\alpha T'.$$

Das ist fast selbstverständig, denn gilt $\varphi \in D$, so haben wir

$$(\varkappa_\alpha T)'(\varphi) = -(\varkappa_\alpha T)(\varphi') = -\alpha^{-1} T[\varphi'(\alpha^{-1}t)] = T'[\varphi(\alpha^{-1}t)] = \alpha(\varkappa_\alpha T')(\varphi).$$

§ 2

Als erstes Beispiel sei folgende, durch T. LEVI-CIVITA[6] und P. STÄCKEL[7] gelöste Funktionalgleichung diskutiert:

(2. 1) $$f(x+y) = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu(x) Y_\nu(y),$$

wo f, X_ν, Y_ν unbekannte Funktionen sind. Diese Gleichung wurde von LEVI-CIVITA und STÄCKEL unter Voraussetzung der Differenzierbarkeit dieser gelöst. Wir wollen jetzt f, X_ν, Y_ν als *unbekannte Distributionen* auffassen, und statt (2. 1) folgende Distributionengleichung betrachten:

(2. 2) $$f_{x+y} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times Y_\nu .$$

Setzen wir voraus, daß die Y_ν linear unabhängig sind. Derivieren wir beide Seiten von (2. 2), so erhalten wir gemäß einem Satz von L. SCHWARTZ[8]

$$\frac{\partial f_{x+y}}{\partial x} = \sum_{\nu=1}^{n} X'_\nu \times Y_\nu \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f_{x+y}}{\partial y} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times Y'_\nu .$$

Daraus folgt aber wegen (1. 6):

$$\sum_{\nu=1}^{n} X'_\nu \times Y_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times Y'_\nu .$$

Differenzieren wir diese Gleichung $(n-1)$-mal, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

(2. 3) $$\sum_{\nu=1}^{n} X'_\nu \times Y_\nu^{(p)} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times Y_\nu^{(p+1)} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

[6] T. LEVI-CIVITA, Sulla funzioni che ammettono una formula d'addizione del tipo $f(x+y) = \sum_1^n X_\nu(x) Y_\nu(y)$, *Atti della Reale Acc. dei Lincei*, **22** (1913), S. 181—183.

[7] P. STÄCKEL, Sulla equazione funzionale, *Atti della Reale Acc. dei Lincei*, **22** (1913), S. 392—393.

[8] L. SCH. I, S. 111, Théorème VII.

Es sei nun die Funktion $\psi_0(y) \in D_y$ so gewählt, daß die „Wronskische Determinante“ von Null verschieden ist (siehe Definition 3 und (1. 7)). Bilden wir das rechtsseitige multiplikative Produkt beider Seiten von (2. 3) mit $\psi_0(y)$, so gelangen wir gemäß (1. 2) zum folgenden Differentialgleichungssystem:

$$\sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu^{(p)}(\psi_0) X_\nu' = \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu^{(p+1)}(\psi_0) X_\nu \qquad (p=0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Wegen der Voraussetzung über die Y_ν und ψ_0 ist dieses System mit dem folgenden äquivalent:

(2. 4) $$X_i' = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} X_k \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Die Koeffizienten A_{ik} sind reelle oder komplexe Zahlen. Dieses Gleichungssystem hat bekanntlich[9] keine andere Lösung als unendlich oft differenzierbare Funktionen. Ebenso kann man beweisen, daß auch die Y_ν nur Funktionen sein können. Dann muß aber wegen (2. 2) auch f_{x+y}, folglich auch f eine unendlich oft differenzierbare Funktion sein. Nach Feststellung dieser Tatsache kann man dem Verfahren von Levi-Civita oder von Stäckel folgen, und die Lösungsfunktionen — unter anderen — durch Lösung von (2. 4) bestimmen.

Die klassische Funktionalgleichung

(2. 5) $$f_{x+y} = f \times f$$

ist Spezialfall von (2. 2). Sie hat nach unserem Satz keine anderen Lösungen als Funktionen.

Ein weiterer Spezialfall von (2. 2) ist das folgende Funktionalgleichungssystem, welches von Osgood[10] untersucht wurde:

$$S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y), \qquad C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y).$$

Osgood behauptete, daß die allgemeinen Lösungen im Bereich der stetigen Funktionen die folgenden Funktionen sind: $S(x) = e^{\alpha x}\sin \mu x$, $C(x) = e^{\alpha x}\cos \mu x$. Auch im Bereich der Distributionen liefern obige Funktionen die allgemeine Lösung des Systems.

B. Kerékjártó stellte die Frage:[11] welche stetigen Lösungen besitzt folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
f_{11}(x+y) &= f_{11}(x)f_{11}(y) + f_{12}(x)f_{21}(y),\\
f_{12}(x+y) &= f_{11}(x)f_{12}(y) + f_{12}(x)f_{22}(y),\\
f_{21}(x+y) &= f_{21}(x)f_{11}(y) + f_{22}(x)f_{21}(y),\\
f_{22}(x+y) &= f_{21}(x)f_{12}(y) + f_{22}(x)f_{22}(y).
\end{aligned}$$

[9] L. Sch. I, S. 139.

[10] W. T. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie. I* (1912), S. 582.

[11] B. Kerékjártó, Aufgabe 4, *Mat. Fiz. Lapok,* **48** (1941), S. 369.

F. KÁRTESZI und F. ZIGÁNY[12] bewiesen, daß die Lösung des Kerékjártóschen Systems auf die Lösung des Osgoodschen Systems und auf die Lösung der Funktionalgleichungen (2. 5), (1. 3) ($\alpha_1 = \alpha_2 = 1$) zurückgeführt werden kann. Da aber diese als allgemeinste Distributionenlösung unendlich oft differenzierbare Funktionen besitzen, so kann das Kerékjártósche System auch keine anderen Lösungen haben.

§ 3

Als zweites Beispiel betrachten wir die folgende Funktionalgleichung:

$$f(\alpha_1 x + \alpha_2 y) = X(x) + Y(y). \tag{3. 1}$$

Diese enthält als Spezialfall die von J. ACZÉL[13] gelöste Funktionalgleichung, falls $X = \beta_1 f(x) + p_1(x)$ und $Y = \beta_2 f(y) + p_2(y) + p_0$ ist.

Wir bilden statt (3. 1) die Distributionen-Funktionalgleichung

$$f_{\alpha_1 x + \alpha_2 y} = X \dotplus Y. \tag{3. 2}$$

Wir erhalten nach (1. 4) und (1. 8):

$$\alpha_1 f'_{\alpha_1 x + \alpha_2 y} = X'.$$

Diese ist aber von y unabhängig. In ganz ähnlicher Weise ist die Distribution $f'_{\alpha_1 x + \alpha_2 y}$ wegen

$$\alpha_2 f'_{\alpha_1 x + \alpha_2 y} = Y'$$

auch von y unabhängig, d. h. $f'_{\alpha_1 x + \alpha_2 y}$ ist mit einer Konstante identisch. Daraus folgt, daß auch f' eine Konstante ist. Denn hat die Funktion $\psi(t) \in D$ die Form $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\alpha_1^{-1} t - \alpha_1^{-1} \alpha_2 z; z) dz$, so liefert f wegen (1. 3) immer denselben Wert. Ist $\psi\ (\in D)$ nicht von der geschilderten Form, dann kann man immer eine Folge von Funktionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \ldots$ ($\psi_n \in D$) finden,[14] deren Glieder vom Faltungstypus, also in angegebener Form schreibbar sind und deren gleichmäßiger Limes ψ ist. Für jedes Glied dieser Folge gibt f denselben Wert; da f ein stetiges Funktional ist, liefert es auch für ψ diesen gemeinen Wert.

Nun ist f' eine Konstante, und daher f eine Funktion von der Form $ax + b$. Es sind nun X' und Y' auch Konstanten, also X und Y lineare Funktionen.

[12] F. KÁRTESZI und F. ZIGÁNY, Lösung der Aufgabe 4, *Mat. Fiz. Lapok*, **49** (1942), S. 292—296.

[13] J. ACZÉL, Über eine Klasse von Funktionalgleichungen, *Comm. Math. Helv.*, **21** (1948), S. 247—252.

[14] L. SCH. I, S. 22, Théorème I.

In analoger Weise kann man die Funktionalgleichung

$$(3.3) \qquad f(\alpha x+\beta y+\gamma)=\alpha f(x)+\beta f(y)+\gamma$$

lösen, welche in der Lösungsmethode der allgemeineren Gleichung

$$f(\alpha x+\beta y+\gamma)=\Phi[f(x), f(y)]$$

eine wichtige Rolle spielt, denn sie kann auf (3. 3) zurückgeführt werden (Φ ist eine stetige, in beiden Argumenten streng monotone Funktion).[15]

Noch allgemeiner ist die folgende Gleichung:

$$f(\alpha x+\beta y+\gamma)=X(x)+Y(y),$$

wo f, X und Y unbekannte Funktionen sind. Die entsprechende Distributionengleichung lautet folgendermaßen:[16]

$$\tau_\gamma f_{\alpha x+\beta y} \doteq X \dotplus Y.$$

Die Lösungsmethode dieser ist die wörtliche Wiederholung des vorigen Lösungsprozesses.

Etwas schneller gelangen wir zum Ziel, falls wir nicht die Distributionenlösungen, sondern die integrierbaren Funktionenlösungen von (3. 1) suchen. Die zu den Funktionen $f(t)$ und $X(x)$ gehörigen Distributionen seien f und X, y sei ein beliebiger festgehaltener Wert. Dann kann man statt (3. 1) folgendes schreiben:

$$\tau_{\alpha_2 y}(\varkappa_{\alpha_1} f)=X+Y(y).$$

Bilden wir an beiden Seiten die Distributionenableitung:

$$\tau_{\alpha_2 y}(\varkappa_{\alpha_1} f)'=X'.$$

Die rechte Seite hängt von y nicht ab, d. h. ist $(\varkappa_{\alpha_1} f)'$ gegen jede Translation invariant, also ist sie eine Konstante.[17] Das ist gemäß Definition 6 damit gleichbedeutend, daß f' auch eine Konstante ist. Damit ist alles erledigt.

§ 4

Die von G. VAN DER LYN[18] gelöste Funktionalgleichung lautet folgendermaßen:

$$(4.1) \qquad f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y).$$

[15] J. ACZÉL, Sur une équation fonctionnelle, *Publ. de l'Inst. Math. de l'Ac. Serbe des Sciences*, **2** (1948), S. 257—262.

[16] τ ist der Translationsoperator. Siehe L. SCH. I, S. 55.

[17] L. SCH. I, S. 56.

[18] G. VAN DER LYN, Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y)$, *Mathematica (Cluj)*, **16** (1939), S. 91—96. — *Bemerkung bei der Korrektur.* Herr ACZÉL machte mich aufmerksam, daß diese Funktionalgleichung nicht von G. VAN DER LYN, sondern von W. H. WILSON (*Bull. Amer. Math. Soc.*, **26** (1920), S. 300—312) zuerst behandelt wurde.

Die entsprechende Distributionengleichung ist

$$f_{x+y}+f_{x-y}=2f\times g \tag{4. 2}$$

(siehe Definition 2). Aus ihr folgt wegen (1. 4) und (1. 5)

$$\frac{\partial f_{x+y}}{\partial x}+\frac{\partial f_{x-y}}{\partial x}=2f'\times g, \tag{4. 3}$$

$$\frac{\partial f_{x+y}}{\partial y}+\frac{\partial f_{x-y}}{\partial y}=2f\times g'. \tag{4. 4}$$

Durch Addition und Substraktion von (4. 3) und (4. 4) erhalten wir wegen (1. 6) folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{\partial f_{x+y}}{\partial x}=f'\times g+f\times g', \tag{4. 5}$$

$$\frac{\partial f_{x-y}}{\partial x}=f'\times g-f\times g'. \tag{4. 6}$$

Nun sei $\varphi(x)\in D_x$ eine Funktion, für welche $f(\varphi)\neq 0$. Wir halten sie fest und bilden das linksseitige multiplikative Produkt von (4. 5) und (4. 6) mit

$$(\varphi)\frac{\partial f_{x+y}}{\partial x}=f'(\varphi)g+f(\varphi)g', \tag{4. 7}$$

$$(\varphi)\frac{\partial f_{x-y}}{\partial x}=f'(\varphi)g-f(\varphi)g'. \tag{4. 8}$$

Nun bilden wir die „zum Nullpunkt symmetrischen Distributionen" der in (4. 8) betrachteten Distributionen:[19]

$$(\varphi)\overline{\frac{\partial f_{x-y}}{\partial x}}^{\vee}=f'(\varphi)\check{g}-f(\varphi)\check{g}'. \tag{4. 9}$$

Es is leicht einzusehen, daß

$$(\varphi)\overline{\frac{\partial f_{x-y}}{\partial x}}^{\vee}=(\varphi)\frac{\partial f_{x+y}}{\partial x}.$$

Denn ist $\psi(y)\in D_y$, so ist wegen der Definition der Operation folgendes gültig:

$$(\varphi)\overline{\frac{\partial f_{x-y}}{\partial x}}^{\vee}(\psi)=(\varphi)\frac{\partial f_{x-y}}{\partial x}(\check{\psi})=f\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(u)\psi[-(u-t)]\,du\right]=$$

$$=f\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(u)\psi(t-u)\,du\right]=(\varphi)\frac{\partial f_{x+y}}{\partial x}(\psi).$$

[19] L. Sch. II, S. 23.

Schreiben wir also statt (4.9)

$$(\varphi)\frac{\partial f_{x+y}}{\partial x}=f'(\varphi)\check{g}-f(\varphi)\check{g}'.$$

Das gibt aber mit (4.7) folgendes:

$$f(\varphi)(g+\check{g}')+f'(\varphi)(g-\check{g})=0.$$

Bemerken wir nun: falls $\psi(y)\in D$, so ist

$$\check{g}'(\psi)=g'(\check{\psi})=-g((\check{\psi})')=g(\check{\psi}')=-(\check{g})'(\psi),$$

also $\check{g}'=-(\check{g})'$; dadurch gelangen wir zur Differentialgleichung

$$f(\varphi)(g-\check{g})'+f'(\varphi)(g-\check{g})=0.$$

Das ist in $h=g-\check{g}$ eine homogene Gleichung, welche keine anderen Lösungen als Funktionen hat. Nun ist g eine beliebig oft differenzierbare Funktion und wegen (4.7) auch f eine solche Funktion. Das bedeutet, daß die betrachtete Gleichung keine anderen Lösungen als die von VAN DER LYN angegebene besitzt.

§ 5

Zum Schluß betrachten wir die Gleichung

$$f(xy)=\sum_{\nu=1}^{n}X_\nu(x)Y_\nu(y). \tag{5.1}$$

Ihr entspricht die folgende Distributionen-Funktionalgleichung:

$$f_{xy}=\sum_{\nu=1}^{n}X_\nu\times Y_\nu,$$

wo f, X_ν, Y_ν unbekannte Distributionen sind. Wir setzen voraus, daß die Distributionen Y_ν unabhängig sind. Wegen (1.11) haben wir

$$yf'_{xy}=\sum_{\nu=1}^{n}X'_\nu\times Y_\nu \qquad \text{und} \qquad xf'_{xy}=\sum_{\nu=1}^{n}X_\nu\times Y'_\nu.$$

Bilden wir das multiplikative Produkt der ersten Gleichung mit x, der zweiten mit y, so ist

$$\sum_{\nu=1}^{n}xX'_\nu\times Y_\nu=\sum_{\nu=1}^{n}X_\nu\times yY'_\nu.$$

Wir derivieren beide Seiten nach y $(n-1)$-mal:

$$x\sum_{\nu=1}^{n}X'_\nu\times Y^{(p)}=\sum_{\nu=1}^{n}X_\nu\times(pY_\nu^{(p)}+yY_\nu^{(p+1)}) \qquad (p=0,1,2,\dots,n-1).$$

Wählen wir $\psi(y) \in D_y$ so, daß die „Wronskische Determinante" der Y_ν nicht verschwinde. So erhalten wir folgendes Differentialgleichungssystem:

$$x \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu^{(p)}(\psi) X_\nu' = \sum_{\nu=1}^{n} [p\, Y_\nu^{(p)}(\psi) + Y_\nu^{(p+1)}(y\,\psi)]\, X_\nu.$$

Wegen der Voraussetzung über die Y_ν ist dieses mit dem folgenden äquivalent:

(5. 2) $$x X_i' = \sum_{\nu=1}^{n} A_{i\nu} X_\nu \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dieses Gleichungssystem besitzt, wie bekannt, wegen der singulären Stelle $x = 0$ nicht nur Funktionen, sondern auch Distributionen als Lösungen.[20] Diese Distributionenlösungen können wir aber meiden. Denn beschränken wir den Definitionsbereich der unbekannten Distributionen auf einen solchen, für welchen $x \neq 0$, so ist (5. 2) ein homogenes Differentialgleichungssystem ohne singuläre Stelle, die Koeffizienten der X_ν sind unendlich oft differenzierbare Funktionen. Will man sie aber fortsetzen in solche Bereiche, welche Punkte der Koordinatenachsen enthalten, so treten solche Distributionen auf, welche die Derivierten der Dirac δ oder die „partie fini" von Hadamard gewisser Funktionen enthalten. Diese verschwinden in genügend „schmalen", mit den Achsen gemeinsame Punkte besitzenden Bereichen; denn f_{xy} ist nur für die Funktionen G_{xy} bestimmt, sie verschwinden aber in diesen Bereichen.

Ebenso gewinnt man, daß die Y_ν auch nur unendlich oft differenzierbare Funktionen sein können, und daher ist f auch eine solche Funktion. Damit ist alles erledigt.

Ist $n = 1$ und suchen wir die integrierbaren Funktionenlösungen der Gleichung

(5. 3) $$f(xy) = X(x) Y(y),$$

so können wir wieder etwas kürzer zum Ziel gelangen. y sei ein beliebiger Parameter ($y \neq 0$), f und X seien die zu den Funktionen $f(t)$ und $X(x)$ gehörigen Distributionen. So läßt sich (5. 3) auch folgenderweise schreiben:

$$\varkappa_y f = Y(y) X.$$

Daraus folgt (siehe (1. 13))

$$y \cdot \varkappa_y f'(\varphi) = Y(y) \cdot X(\varphi) \qquad (\varphi \in D_x)$$

oder

$$\frac{y}{Y(y)} \varkappa_y f'(\varphi) = X(\varphi),$$

[20] L. Sch. I, S. 130.

vorausgesetzt, daß $Y(y) \neq 0$ ist. Nun ist die rechte Seite dieser Gleichung von y unabhängig, d. h. f' gegen die Transformation $\frac{y}{Y(y)} \varkappa_y$ invariant. Daraus folgt

$$\frac{y}{Y(y)} \varkappa_y f' = \frac{1}{Y(1)} f' \qquad \text{oder} \qquad y \cdot \varkappa_y f' = \frac{Y(y)}{Y(1)} f'.$$

Nach Definition 6 und einem Satz von L. SCHWARTZ[21] ist aber $y \cdot \varkappa_y f'(\varphi)$ unendlich oft differenzierbar nach y in jedem Intervall, wo y nicht verschwindet. Das ist nur so möglich, falls $Y(y)$ auch eine solche Funktion ist. Damit ist das Problem gelöst.

Hier wurde vorausgesetzt, daß $Y(1) \neq 0$ ist. Falls $Y(1) = 0$ ist, so ergibt sich aus (5.3) $f(x) \equiv 0$. In diesem Fall gewinnen wir also bloß die triviale Lösung.

Unsere zusammenfassende Behauptung ist also, daß die von uns betrachteten Funktionalgleichungen bloß durch mit unendlich oft differenzierbaren Funktionen identische Distributionen befriedigt werden können.[22]

(Eingegangen am 8. März 1956.)

[21] L. SCH. I, S. 104, Théorème V.

[22] *Nachträgliche Bemerkung.* Manche hier behandelte Funktionalgleichungen können durch geeignete Veränderlichentransformationen in einfachere und schon früher behandelte Gleichungen überführt werden. Unser Ziel war aber, die Anwendungsart der Methode zu illustrieren.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

И. Феньё (Будапешт)

(Резюме)

Цель работы—применение обобщенных функций Л. Шварца к решению функциональных уравнений. Основные определения и обозначения совпадают с теми, которые применял Л. Шварц в своей известной монографии. Исходя из них, работа дает следующие определения:

Определение 1. Пусть T определенная в некоторой области R^2 обобщенная функция и $u(x) \in D_x$. Тогда под левым мультипликативным произведением T с u понимается обозначаемая через $u(T)$ и определенная в R^2 такая обобщенная функция, что

$$(u)\, T(\varphi) = T[u(x), \varphi(y)] \qquad (\varphi(y) \in D_y).$$

Аналогично определяется правое мультипликативное произведение.

Определение 2. Пусть T определенная в некоторой области R^2 обобщенная функция, $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ любые числа. Тогда $T_{\alpha x+\beta y}$ есть определенная в R^2 следующим образом обобщенная функция:

$$T_{\alpha x+\beta y}(\varphi) = \frac{1}{\beta}\, T\left[\int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi\left(z, \frac{1}{\beta}\, t - \frac{\alpha}{\beta} z\right) dz\right] \qquad (\varphi(x, y) \in D_{xy}).$$

Она обладает тем свойством, что

$$\frac{\partial T_{\alpha x+\beta y}}{\partial x} = \alpha\, T'_{\alpha x+\beta y}.$$

Определение 3. Определенные в R^1 обобщенные функции $S_1, \ldots, S_n$ называются независимыми, если существует такая $\varphi \in D$, что

$$\det\left(S_i^k(\varphi)\right)_{i=1, \ldots, n}^{k=0, \ldots, n-1} \neq 0.$$

Определение 4. Пусть S и T определенные в R^1 обобщенные функции. Их прямая сумма есть определенная в R^2 и обозначенная через $S \dot{+} T$ такая определенная функция, что

$$(S \dot{+} T)(\varphi) = S\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\, dy\right] + T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x, y)\, dx\right] \qquad (\varphi(x, y) \in D_{xy}).$$

Имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 (S \dot{+} T)}{\partial x\, \partial y} = 0.$$

Определение 5. Пусть $G_{xy} \subset D_{xy}$ есть множество функций, опоры которых принадлежат множеству, дополнительному к осям координат. Если T некоторая обобщенная функция на R^1, из нее производится обобщенная функция T_{xy} на R^2 так, что

$$T_{xy}(\varphi) = T\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\left(u, \frac{t}{u}\right) \frac{1}{u}\, du\right] \qquad (\varphi(x, y) \in G_{xy}).$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} = y\, T'_{xy} \quad \text{и} \quad \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = x\, T'_{xy}.$$

Используя предыдущие определения, работа в качестве примера исследует следующие уравнения:

$$1^\circ \quad f_{x+y} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times Y_\nu,$$

где f, X_ν и Y_ν неизвестные обобщенные функции. Методом приведения к системе дифференциальных уравнений работа доказывает, что каждая обобщенная функция, решающая это уравнение, может быть отождествлена с бесконечно дифференцируемой обычной функцией.

$$2^\circ \quad \tau_\gamma f_{\alpha x+\beta y} = X \dot{+} Y.$$

Каждое решение и этого уравнения может быть отождествлено с бесконечно дифференцируемой обычной функцией.

$$3^\circ \quad f_{x+y} + f_{x-y} = 2f \times g$$

также имеет только решение, соответствующее бесконечно дифференцируемой функции.

Решения уравнения

$$4^\circ \quad f_{xy} = \sum_{\nu=1}^{n} X_\nu \times Y_\nu,$$

если их искать среди обобщенных функций, опора которых принадлежит множеству, дополнительному к осям координат, также могут быть отождествлены с обычными бесконечно дифференцируемыми функциями.