# DIE HOLOMORPHENTHEORIE FÜR GRUPPEN UND RINGE

Von

LADISLAUS RÉDEI (Szeged), korrespondierendem Mitglied der Akademie

## § 1. Einleitung

Die verschiedenen Zweige der Algebra haben sich mehr oder weniger voneinander unabhängig entwickelt und eine zielbewußte Tätigkeit zur Vereinheitlichung der begrifflich zusammengehörenden Teile ist erst in der neueren Zeit bemerkbar, aber man hat in dieser Beziehung gewiß noch vieles zu tun. Ein wichtiges Mittel dieser Vereinheitlichung besteht im Ausbau von analogen Theorien auf den verschiedenen Forschungsgebieten.

In unserer Arbeit wird es sich um eine neue gruppen-ringtheoretische Analogie handeln, die zwischen der schon fertigen *Holomorphentheorie für Gruppen* und einer erst hier aufzustellenden *Holomorphentheorie für Ringe* besteht. Dabei verstehen wir unter „Holomorphentheorie für Gruppen" denjenigen Teil der Gruppentheorie, der sich vor allem auf die zwei, bekanntlich eng zusammenhängenden Begriffe „charakteristische Untergruppen" und „Holomorph" einer Gruppe, ferner auf den mit diesen ebenfalls eng zusammenhängenden Begriff „vollständige Gruppe" bezieht. Entsprechend werden auch in der „Holomorphentheorie" für Ringe die drei analogen Begriffe auftreten. Die ersten zwei dieser Begriffe werden wir ähnlich *charakteristische Unterringe* bzw. *Holomorphe*[1] eines Ringes nennen (ihre Definition erfolgt später). Es wird eine Überraschung, daß als zum dritten der erwähnten gruppentheoretischen Begriffe, nämlich zur „vollständigen Gruppe" analoger ringtheoretischer Begriff der „Ring mit Einselement" auftreten wird.[2]

[1] Die Mehrzahl „Holomorphe" ist kein Druckfehler! Es wird sich nämlich herausstellen, daß ein Ring im Gegensatz zur Einzigkeit des Holomorphes einer Gruppe im allgemeinen mehrere Holomorphe hat. Diese Mehrheit liegt — wie wir sehen werden — völlig in der Natur und ist etwa dem Umstand zuzuschreiben, daß der Begriff des Ringes mehr zusammengesetzt ist als der der Gruppe.

[2] Die Ringe mit Einselement haben von jeher eine bevorzugte Rolle unter allen Ringen gespielt (z. B. in der Teilbarkeitslehre, Idealtheorie, linearen Algebra usw.). Freilich findet diese Bevorzugung eine formale Erklärung im Umstand, daß die Anwesenheit des Einselementes beträchtliche rechnerische Vereinfachungen nach sich zieht. Demgegenüber erblicken wir in der obigen Analogie sozusagen den *inneren Grund* für die bevorzugte Stellung der Ringe mit Einselement. Diese sollten wir fortan eigentlich auch „vollständige Ringe" nennen, was wir trotzdem nicht tun werden, raten aber dem Leser, überall statt „Ring mit Einselement" auch „vollständigen Ring" zu verstehen.

Gleich wollen wir noch folgendes erwähnen. Bekanntlich spielen in allen Teilen der Algebra gewisse Abbildungen, nämlich der Homo-, Iso-, Auto-, Endo-, Meromorphismus, eine Führerrolle. Als ein wichtiges Ergebnis unserer Untersuchungen wird sich zu diesen fünf Begriffen (ausschließlich für Ringe) ein sechster, nicht minder wichtiger gesellen. Dieser wird gewisse Paare von Abbildungen eines Ringes in sich bedeuten, ein solches Paar von Abbildungen werden wir einen *Doppelhomothetismus* nennen. Die Doppelhomothetismen spielen, wie wir sehen werden, nicht nur in der Holomorphentheorie, sondern auch in anderen Fragen bezüglich Ringe eine Rolle, und bilden, wie unglaublich das auch lautet, ein Analogon zu den Automorphismen einer Gruppe.

Nachdem wir hiermit kurz über den Inhalt unserer Arbeit berichtet haben, wollen wir zur vorherigen Beleuchtung der erst im § 2 beginnenden Untersuchungen einiges über die Analogien zwischen gruppen- und ringtheoretischen Begriffen bemerken.[3] Dementsprechend kann der übrige Teil dieser etwas langen Einleitung flüchtig gelesen werden.

$\Gamma$ und $\mathrm{P}$ bezeichnen durchgehend eine Gruppe bzw. einen Ring.

$\mathrm{P}^+$ bezeichnet den Modul von $\mathrm{P}$, d. h. den durch die Elemente von $\mathrm{P}$ gebildeten Modul.

$A \therefore B$ bezeichnet, daß $A, B$ zwei analoge Begriffe sind, von denen $A$ gruppentheoretisch, $B$ ringtheoretisch ist.

Eine der wichtigsten Analogien solcher Art ist

(1) Homomorphismus von $\Gamma \therefore$ Homomorphismus von $\mathrm{P}$.

Mit dieser hängt

(2) Faktorgruppe von $\Gamma \therefore$ Faktorring[4] von $\mathrm{P}$

eng zusammen, da links im wesentlichen (d. h. von Isomorphie abgesehen) die sämtlichen homomorphen Bilder von $\Gamma$, rechts die von $\mathrm{P}$ stehen.

Kraft (2) gilt die ebenfalls sehr starke Analogie

(3) Normalteiler von $\Gamma \therefore$ Ideal von $\mathrm{P}$,

da die Faktorgruppen und Faktorringe auf bekannte Weise durch die Normalteiler bzw. Ideale angebbar sind.

Die Analogie

(4) Untergruppe von $\Gamma \therefore$ Unterring von $\mathrm{P}$,

ist weniger stark, da statt ihrer oft die eine oder andere der (allerdings

[3] Es ist freilich stets eine Geschmackssache, ob man und in welchem Grade gewisse Begriffe als analog betrachtet. Wenn wir deshalb über Analogien sprechen und eventuell auch ihren Grad mit „genau, stark, schwach" usw. bezeichnen, so soll das stets nur eine *Auffassung* bedeuten.

[4] Wir sagen „Faktorring" statt „Restklassenring".

schwächeren) Analogien

(5) Untergruppe von $\Gamma$ .˙. Untermodul von P,

(6) Untergruppe von $\Gamma$ .˙. einseitiges Ideal von P

zu Kraft tritt, ferner kommt in gewissen Untersuchungen mehr die ebenfalls schwache Analogie

(7) Normalteiler von $\Gamma$ .˙. einseitiges Ideal von P

(statt (6)) zur Geltung.

Dem Anschein nach ist

(8) Automorphismus von $\Gamma$ .˙. Automorphismus von P

eine ähnlich starke Analogie wie (1). Wenn man aber (3) beachtet, und bedenkt, daß sich die Normalteiler von $\Gamma$ als die gegenüber gewissen (nämlich den inneren) Automorphismen von $\Gamma$ zulässigen Untergruppen charakterisieren lassen, dagegen eine entsprechende Charakterisierung der Ideale von P durch Automorphismen unmöglich ist,[5] so fühlt man sich gezwungen, die Analogie (8) abzulehnen. Eine andere „Schwäche" der Analogie (8) ist, daß bekanntlich eine Gruppe mit mehr als zwei Elementen stets auch nichtidentische Automorphismen hat, wogegen es viele Ringe mit nur einem (dem identischen) Automorphismus gibt.[6] Schon aus diesem Grunde kann die rechte Seite von (8) nicht die ähnlich wichtige Rolle spielen wie die linke Seite, und man weiß auch aus Erfahrungen, daß — im Gegensatz zur fortwährenden Anwendung der Automorphismen in der Gruppentheorie — die Automorphismen eines Ringes sehr selten zu Wort kommen.[7] Nicht weniger entscheidendes gegen die Analogie (8) ist endlich, daß die Automorphismen von $\Gamma$ eine Gruppe bilden, wogegen die Automorphismen von P keinen Ring bilden: wegen des ersteren existiert die „Schreiersche Erweiterung von $\Gamma$ mit seiner vollen Automorphismengruppe", wegen des letzteren fehlt ein analoger Begriff für P, der ebenfalls durch P und seine volle Automorphismengruppe bestimmt wäre.[8]

[5] Die inneren Automorphismen einer Gruppe haben innerhalb der Automorphismen eines Ringes ohne Einselement überhaupt keine Analoga. (Hierauf kommen wir bald zurück.)

[6] Z. B. hat der Ring $I$ der ganzen Zahlen nur den identischen Automorphismus. Betrachten wir ferner den Polynomring $I[x]$. Selbst dieser hat bekanntlich unendlich viele Automorphismen, und zwar lassen sich seine sämtlichen Automorphismen durch $x \rightarrow x + c$ und $x \rightarrow -x + c$ angeben ($c \in I$). Bezeichnet aber $f(x)\,(\in I[x])$ ein Polynom, wofür alle $\pm f(\pm x + c)$ verschieden sind, so hat der Ring $f(x)\,I[x]$ offenbar nur den identischen Automorphismus. Ähnlich beschaffen ist auch der Ring $\{f^{-1}(x), I[x]\}$. — Wie hier so auch später bezeichnet $\{\cdots\}$ die durch die eingeklammerten Elemente erzeugte (algebraische) Struktur.

[7] In (allerdings wenigen) Spezialfällen, so vor allem für gewisse Körper und Schiefkörper sind jedoch die Automorphismen überaus wichtig, wie z. B. in der Theorie von Galois. Durch solche Sonderheiten wird jedoch das oben Gesagte nicht beeinflußt.

[8] Diesen jetzt noch fehlenden analogen Begriff werden wir später dennoch finden.

Dagegen spielen die Endomorphismen des Moduls eines Ringes eine ähnlich oftmalige Rolle in der Ringtheorie wie die Automorphismen einer Gruppe in der Gruppentheorie. Deshalb kann

(9) Automorphismus von $\Gamma$ .·. Endomorphismus von $\mathsf{P}^+$

einigermaßen als ein Ersatz für die nach vorigem sehr schwache Analogie (8) angesehen werden. Allerdings ist auch (9) für eine schwache Analogie zu halten schon aus dem Grunde, daß im allgemeinen in die rechte Seite von (9) die in $\mathsf{P}$ definierte Multiplikation gar nicht eingeht.

In Spezialfällen geschieht das doch, denn die Abbildungen

$$\varrho \to \alpha\varrho,\ \varrho \to \varrho\alpha \qquad (\varrho \in \mathsf{P}) \tag{10}$$

definieren für jedes $\alpha(\in \mathsf{P})$ zwei Endomorphismen von $\mathsf{P}^+$. Diese nennen wir nach BOURBAKI [1][9] den durch $\alpha$ induzierten *inneren Links-* bzw. *Rechtshomothetismus* von $\mathsf{P}$.[10] Beide nennen wir kurz auch *innere Homothetismen.* Dann gilt der „Teil"[11]

(11) innerer Automorphismus von $\Gamma$ .·. innerer Homothetismus von $\mathsf{P}$

der schwachen Analogie (9) für eine starke Analogie. In der Tat ist (11) mit (3) gut verträglich, denn einerseits sind die Normalteiler von $\Gamma$ (wie schon erwähnt) die gegenüber allen inneren Automorphismen von $\Gamma$ zulässigen Untergruppen, andererseits sind die Ideale von $\mathsf{P}$ ähnlich die gegenüber allen inneren Homothetismen von $\mathsf{P}$ zulässigen Unterringe. (Vgl. [5].)

Damit beenden wir auch schon die Aufzählung der im wesentlichen bekannten Analogien zwischen gruppen- und ringtheoretischen Grundbegriffen, deren Zahl man noch vermehren könnte, aber für unseren Zweck, das spätere zu beleuchten, genügt das bisherige.

Jetzt wollen wir kurz einige neue Untersuchungen erwähnen, in denen Analogien zwischen Gruppen- und Ringtheorie ausgebaut wurden.

EVERETT [3] hat die Schreiersche Erweiterungstheorie für Ringe aufgestellt.[12] Diese zwei analogen Theorien (die Schreiersche und Everettsche) beruhen völlig auf der Analogie (3) und bilden einen äußerst wichtigen Teil der Gruppen- bzw. Ringtheorie.

[9] Mit [ ] verweisen wir an das Literaturverzeichnis am Schluß unserer Arbeit.

[10] Selbst BOURBAKI verwendet die Benennungen „homothétie à gauche" bzw. „à droite". Hiernach hätten wir „Homothetie" statt „Homothetismus" sagen sollen, uns gefällt aber die Verwendung von „-ismus" wegen der Ähnlichkeit mit Homo-, Iso-, Automorphismus usw.

[11] Wir nennen (11) in dem Sinne einen Teil von (9), daß beide Seiten von (11) einen Spezialfall der zwei Seiten von (9) bilden.

[12] Bezüglich der Grundlagen der Schreierschen Erweiterungstheorie für Gruppen und Ringe halten wir uns stets an RÉDEI [6]. — Gleichförmigkeitshalber werden wir über Schreiersche statt Everettsche Erweiterungsringe sprechen, ferner sagen wir statt „Schreiersche Erweiterungsgruppe" und „Schreierscher Erweiterungsring" in beiden Fällen kurz „Schreiersche Erweiterung", wenn daraus kein Mißverständnis entstehen kann.

FUCHS [4] hat den wichtigen Begriff der Frattinischen Untergruppe auf den Fall von Gruppen mit Operatoren übertragen und gezeigt, daß im Fall eines P mit Einselement das Jacobsonsche Radikal von P mit der Frattinischen Untergruppe von $P^+$ übereinstimmt, wenn man die inneren Rechtshomothetismen von P als Operatoren von $P^+$ deutet.

RÉDEI [9], [10] hat zwei verschiedene ringtheoretische Analoga der Hamiltonschen Gruppen untersucht (die zweite dieser Untersuchungen noch nicht beendet).[13]

Mit den letzten zwei Beispielen sind wir von unserem eigentlichen Gegenstand abgewichen, aber wir kommen jetzt darauf zurück. Und zwar wollen wir statt der schwachen Analogie (8) unter Beibehaltung der linken Seite und passender Veränderung der rechten Seite eine starke Analogie aufstellen. Dabei wollen wir an die vorige Bemerkung anknüpfen, daß (11) eine starke Analogie ist. Deshalb beabsichtigen wir (11) so zu „erweitern", daß hierdurch die gewünschte Analogie entsteht, was auf eine „richtige" Verallgemeinerung der rechten Seite von (11) ankommt. Nun liegt diese Verallgemeinerung auf der Hand, so daß man in (10) das Element $\alpha(\in P)$ durch ein Element $a$ eines Oberringes $\bar{P}$ von P ersetzt, das man aber der Bedingung unterwirft, daß alle Produkte $a\varrho, \varrho a$ in P liegen, damit auf diese Weise wirklich Abbildungen von P in sich entstehen. Da die gesagte Bedingung bedeutet, daß der Ring P als Ideal in $\bar{P}$ enthalten, d. h. $\bar{P}$ eine Schreiersche Erweiterung von P ist, so greifen wir zur folgenden Definition:

Ist $a$ ein Element einer Schreierschen Erweiterung von P, so nennen wir die zwei Abbildungen

$$\varrho \to a\varrho, \varrho \to \varrho a \qquad (\varrho \in P) \tag{12}$$

den durch $a$ induzierten *Links-* bzw. *Rechtshomothetismus* von P.[14] Beide nennen wir kurz auch *Homothetismen*. Es ist klar, daß die inneren Homothetismen wirklich Spezialfälle der Homothetismen sind. Einen Homothetismus von P, der kein innerer ist, nennen wir einen *äußeren Links-* bzw. *Rechtshomothetismus* von P.[15]

[13] Bekanntlich nennt man eine Gruppe Hamiltonisch, wenn alle Untergruppen normal sind. Auf Grund der Analogie (3) und der Analogien (4), (5), (6) lassen sich drei verschiedene ringtheoretische Analoga definieren, von denen die ersten zwei von RÉDEI [10], [9] „Vollidealringe im weiteren Sinn" bzw. „Vollidealringe" genannt wurden.

[14] Die Möglichkeit nach weiterer Verallgemeinerung liegt vor, so daß man in den zwei Abbildungen (12) nur voraussetzt, daß $a$ ein Element eines Oberringes von P ist, der P als Links-, bzw. Rechtsideal enthält.

[15] BOURBAKI [1] spricht über „homothétie externe" in wesentlich anderem Sinne. Nur ungern geraten wir durch unsere obige Definition der Homothetismen mit der Definition der „homothétie externe" von BOURBAKI in einen Konflikt, trotzdem können wir auf die Benennung „Homothetismus" der obigen Abbildungen nicht verzichten. Wir haben hierzu zwei Gründe. Der eine ist, daß wir in *unseren* Homothetismen die natürlichste Verallge-

Ferner nennen wir das (geordnete) System der zwei Homothetismen (12) den durch $a$ induzierten *Doppelhomothetismus* von P.[16] Gehört dabei $a$ in P, so sprechen wir von einem *inneren Doppelhomothetismus* von P, dagegen verstehen wir unter einem *äußeren Doppelhomothetismus* von P einen solchen, der kein innerer ist.

Wie oben schon gesagt wurde, werden für uns die Doppelhomothetismen von großer Wichtigkeit sein. Diesbezüglich bemerken wir vor allem, daß an Stelle von (11) sich die noch stärkere Analogie

(13) innerer Automorphismus von $\Gamma$ .·. innerer Doppelhomothetismus von P

für viel nützlicher erweisen wird. Einerseits gilt nämlich das über (11) bemerkte offenbar auch für (13). Andererseits bilden die inneren Doppelhomothetismen von P — wie wir sehen werden — nach einfachen Rechnungsregeln einen Ring, der sich als genaues Analogon der Gruppe der inneren Automorphismen von $\Gamma$ betrachten lassen wird. (Eine der letzteren ähnliche Bemerkung gilt für (11) nicht.)

Ferner besteht als eine „Fortsetzung" von (13) die unseres Erachtens sehr starke Analogie

(14) Automorphismus von $\Gamma$ .·. Doppelhomothetismus von P,

die wir auch schon oben angemeldet haben; diese mag an Stelle der sehr schwachen Analogie (8), undzwar mit viel mehr Recht als (9), für richtig hingenommen werden. Die eigentliche Rechtfertigung dieser Auffassung wird durch unsere späteren Betrachtungen geliefert, hier beschränken wir uns diesbezüglich auf einige kurze Bemerkungen.

Bekanntlich gewinnt man alle Automorphismen von $\Gamma$ und nur diese als durch die Elemente $a$ der Schreierschen Erweiterungen von $\Gamma$ gelieferten Abbildungen

$$\varrho \to a^{-1}\varrho a \qquad (\varrho \in \Gamma).$$

Die Analogie zwischen dieser Definition und der der Doppelhomothetismen ist auffallend.

Im Gegensatz zu den über die Automorphismen von P gesagten (vgl. auch [6]) gibt es im Fall $P \neq 0$ stets mindestens zwei Doppelhomothetismen von P.

meinerung der inneren Homothetismen erblicken. Der zweite ist, daß unseres Wissens die Benennung „homothétie externe" (im Sinne von BOURBAKI) sich bisher wenig in der Literatur verbreitet hat. [Wir können auch noch einen dritten Grund aufführen. Die Algebra entlehnt nämlich den Begriff „Homothetie" von der Geometrie in der man unter Homothetie (bis auf Translation) eine Punkttransformation $x \to cx$ ($c$ reell) des $n$-dimensionalen Euklidischen Raumes versteht ($x$ bezeichnet den Ortsvektor des Punktes), die also im wesentlichen in der Verwendung eines „Ähnlichkeitsfaktors" bedeutet, wie auch unser Homothetismus, wogegen ähnliches für die „homothetie externe" von BOURBAKI nicht gilt.]

[16] Ein Doppelhomothetismus besteht also aus einem Links- und einem Rechtshomothetismus, die aber nicht beliebig sind, sondern beide durch *ein* Element induziert werden können, wie das oben unzweideutig gesagt wurde.

Unter diesen kommen nämlich der *triviale* und der *identische Doppelhomothetismus* stets vor; so nennen wir die beiden Spezialfälle, wo alle Bildelemente $a\varrho, \varrho a$ gleich 0 (Fall $a=0$ von (12)) bzw. gleich $\varrho$ sind.[17]

Die Doppelhomothetismen (ähnlich wie die inneren) werden sich nach einfachen Regeln addieren und multiplizieren lassen. Wohl bildet dann die Menge aller Doppelhomothetismen von P im allgemeinen keinen Ring, dagegen wird diese Menge gewisse Ringe enthalten, die die ähnliche Rolle im Zusammenhang mit P spielen, wie die volle Automorphismengruppe von $\Gamma$, weshalb sie als (genaue) ringtheoretische Analoga dieser Gruppe angesehen werden können. Die gesagten Ringe werden wir verwenden um mit ihnen gewisse Schreiersche Erweiterungen von P zu bilden, worauf wir schon in[8] angespielt haben; diese Erweiterungsringe werden die Holomorphe von P sein.

Endlich werde bemerkt, daß die charakteristischen Untergruppen und -ringe ähnlich mit der Analogie (14) zusammenhängen werden, wie auch die Normalteiler und Ideale mit der Analogie (11) (oder (13)) im schon bemerkten Zusammenhang stehen.

Übrigens werden wir im § 2 bei (30) bis (33) die Definition (12) der Doppelhomothetismen durch eine mehr explizite ersetzen.

Unsere Arbeit, was noch übrig ist, gliedert sich so:

Im § 2 machen wir einige Vorbereitungen.

Im § 3 stellen wir die im wesentlichen bekannten Grundlagen der Holomorphentheorie für Gruppen in einer zu unseren Zwecken geeigneten Form zusammen.

Im § 4 erfolgt die Begründung der analogen Theorie für Ringe.

Im § 5 untersuchen wir als Spezialfall die Ringe mit Einselement (als Analogon zu den vollständigen Gruppen).

Im § 6 beschäftigen wir uns mit einigen weiteren Spezialfällen.

Obwohl es sich hauptsächlich um die Theorie der Ringe handeln wird, so werden wir doch auch in der Gruppentheorie wenig neues erzielen.[18]

## § 2. Vorbereitungen

Neben den im § 1 eingeführten Bezeichnungen $\Gamma$, P, $\mathrm{P}^+$ führen wir die folgenden, ebenfalls durchgängigen Bezeichnungen ein:

[17] Das letztere ist auch ein möglicher Fall, der nämlich so entsteht, daß man für $a$ in (12) das Einselement einer passenden Schreierschen Erweiterung von P nimmt, die bekanntlich stets existiert. Gleich bemerken wir, daß der triviale Doppelhomothetismus von P stets ein innerer, dagegen der identische dann und nur dann ein innerer ist, wenn P ein Einselement enthält.

[18] Das Hauptproblem dieser Arbeit, eine Holomorphentheorie für Ringe zu schaffen, tauchte mir während einer Besprechung mit meinem Aspiranten, Herrn O. Steinfeld, auf. Er und die Herren L. Fuchs, G. Pollák, J. Szendrei, Prof. L. Kalmár haben mit ihren nützlichen Bemerkungen zur endgültigen Abfassung meiner Arbeit beigetan, weshalb ich ihnen herzlichst danke.

$\alpha, \beta, \ldots$ bezeichnen beliebige Elemente von $\Gamma$ bzw. P, je nachdem von Gruppen oder Ringen die Rede ist. Insbesondere bezeichnet $\varepsilon$ das Einselement von $\Gamma$ oder P, letzteres natürlich nur dann, wenn P ein Ring mit Einselement ist. Die Null in P wird mit 0 bezeichnet.

$\Gamma_*, \mathrm{P}_*$ bezeichnen das Zentrum von $\Gamma$ bzw. den Annullator von P; unter dem letzteren verstehen wir das Ideal derjenigen $\nu$, für die $\nu \mathrm{P} = \mathrm{P}\nu = 0$ gilt. Die ähnlichen Bezeichnungen $\Gamma_*, \mathrm{P}_*$ verwenden wir deshalb, weil sich

(15) $$(\Gamma_* =) \text{ Zentrum von } \Gamma \;.\!\cdot\!.\; (\mathrm{P}_* =) \text{ Annullator von } \mathrm{P}$$

(im Zusammenhang mit (14)) als eine starke Analogie erweisen wird.[19]

$\alpha_*$ bezeichnet das durch $\alpha$ repräsentierte Element der Faktorgruppe $\Gamma/\Gamma_*$ bzw. des Faktorringes $\mathrm{P}/\mathrm{P}_*$, d. h. die Klasse $\alpha\Gamma_*$ bzw. $\alpha + \mathrm{P}_*$.

$X < Y$ bezeichnet, daß entweder $X, Y$ Gruppen sind und $X$ Untergruppe von $Y$ ist, oder sie Ringe sind und $X$ Unterring von $Y$ ist.

$X \lhd Y$ bezeichnet, daß $X < Y$ gilt und dabei $X$ normal[20] in $Y$ ist.

$X \blacktriangleleft Y$ bezeichnet, daß $X < Y$ gilt und dabei $X$ charakteristisch[21] in $Y$ ist.

$a, b, \ldots$ bezeichnen entweder Abbildungen von $\Gamma$ in sich oder (geordnete) Paare von Abbildungen, kurz *Doppelabbildungen* von P in sich; genau gesprochen verstehen wir unter einer Doppelabbildung von P in sich das System von zwei Abbildungen von P in sich, die wir als den *ersten* bzw. *zweiten Bestandteil* der Doppelabbildung unterscheiden.

$e$ bezeichnet insbesondere die identische Abbildung von $\Gamma$, bzw. die (aus zwei identischen Abbildungen bestehende) *identische Doppelabbildung* von P, je nachdem von $\Gamma$ oder von P die Rede ist.

Für eine beliebige Abbildung $a$ von $\Gamma$ in sich bezeichnen wir mit $\alpha^a$ das entsprechende Bild von $\alpha$. Dann ist $a$ gleich der Abbildung $\alpha \to \alpha^a$. In der Menge dieser Abbildungen definieren wir das Produkt $ab$ als dasjenige Element der Menge, wofür

(16) $$\alpha^{ab} = (\alpha^a)^b$$

gilt.

Für eine beliebige Doppelabbildung $a$ von P in sich bezeichnen wir mit $a\alpha, \alpha a$ die entsprechenden zwei Bilder von $\alpha$, so daß dann $a$ aus den zwei Abbildungen $\alpha \to a\alpha, \alpha \to \alpha a$ besteht (in *dieser* Reihenfolge). In der Menge dieser Doppelabbildungen definieren wir die Summe $a + b$ und das Produkt

[19] Dagegen ist
$$\text{Zentrum von } \Gamma \;.\!\cdot\!.\; \text{Zentrum von } \mathrm{P}$$
eine sehr schwache Analogie zu nennen.

[20] Einen Unterring nennen wir normal, wenn er ein Ideal ist. Die Bezeichnung „$X \lhd Y$" läßt sich auch so erklären, daß $Y$ eine Schreiersche Erweiterung von X ist (mit beliebiger Faktorstruktur $Y/X$).

[21] Wir definieren „charakteristisch" erst in den §§ 3, 4, weshalb das Zeichen „$\blacktriangleleft$" vorläufig noch nicht verwendet wird.

$ab$ als dasjenige Element der Menge, wofür

(17) $$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha, \quad \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b,$$

(18) $$ab\alpha = a(b\alpha), \quad \alpha ab = (\alpha a)b$$

gelten.[22]

Für Teilmengen $H$ von $\Gamma$ bzw. $\mathrm{P}$ definieren wir die Bilder $H^{\alpha}$ und $\alpha H$, $H\alpha$ wie üblich als die Menge der entsprechenden Bilder der Elemente.

Von was für eine Menge $M$ von Abbildungen von $\Gamma$ oder Doppelabbildungen von $\mathrm{P}$ in sich die Rede sein wird, so werden wir eine Teilmenge $H$ von $\Gamma$ bzw. $\mathrm{P}$ *zulässig* nennen, wenn $H^{\alpha} \subseteq H$ bzw. $\alpha H, H\alpha \subset H$ $(\alpha \in M)$ gilt.

Übrigens werden wir unter allen Abbildungen von $\Gamma$ in sich nur die Automorphismen von $\Gamma$ in Betracht ziehen. Diese bilden auf Grund der durch (16) definierten Multiplikation eine Gruppe, die *volle Automorphismengruppe* von $\Gamma$. Ihre Untergruppen nennen wir schlechthin die Automorphismengruppen von $\Gamma$.

Ferner werden wir unter allen Doppelabbildungen von $\mathrm{P}$ in sich nur diejenigen betrachten, die aus zwei Endomorphismen von $\mathrm{P}^{+}$ bestehen; diese nennen wir die *Doppelendomorphismen* von $\mathrm{P}^{+}$. Hiervon bilden die Doppelhomothetismen von $\mathrm{P}$ nach der Definition (12) offenbar einen Spezialfall. Nur dieser Spezialfall wird uns später interessieren, aber wir haben auch auf den allgemeinen Fall einen Blick zu werfen.

Zu diesem Zweck bezeichnen wir einen Augenblick mit $R$ den vollen Endomorphismenring von $\mathrm{P}^{+}$. Das ist, wie üblich, so gemeint, daß man insbesondere das Produkt $AB$ von zwei Elementen von $R$ durch $AB\alpha = A(B\alpha)$ definiert. Mit $R'$ bezeichnen wir den zu $R$ inversen Ring, der nämlich aus $R$ so entsteht, daß man von der Multiplikation $AB$ auf die „inverse Multiplikation" $BA$ übergeht. Dann ersieht man aus (17), (18) sofort, daß die sämtlichen Doppelendomorphismen von $\mathrm{P}^{+}$ einen Ring bilden, den wir den *vollen Doppelendomorphismenring* von $\mathrm{P}^{+}$ nennen, und zwar daß dieser die direkte Summe des vollen Endomorphismenringes von $\mathrm{P}^{+}$ und des hierzu inversen Ringes ist.[23] Alle später aufzutretenden Doppelhomothetismenringe von $\mathrm{P}$, was wir hier ein für allemal schon im voraus bemerken wollen, werden lauter Unterringe des vollen Doppelendomorphismenringes von $\mathrm{P}^{+}$ sein. Nur mit solchen Unterringen dieses Ringes werden wir es zu tun haben.

Wir setzen noch unsere Vorbereitungen fort, wobei wir nunmehr zwei Fälle unterscheiden.

[22] Wenn wir etwa $ab\alpha\beta$ oder $\alpha\beta ab$ schreiben, so meinen wir damit $(ab)(\alpha\beta)$ bzw. $(\alpha\beta)(ab)$. Ähnlich ist die linke Seite der Gleichungen (18) zu verstehen.

[23] Man bemerke, daß der Begriff des vollen Doppelendomorphismenringes von $\mathrm{P}^{+}$ nicht von der in $\mathrm{P}$ gültigen Multiplikation abhängt (also für jeden Modul statt $\mathrm{P}^{+}$ einen Sinn hat).

**Fall $\Gamma$:**

Ist $A$ eine (nicht notwendig die volle) Automorphismengruppe von $\Gamma$, so definieren wir in der Menge aller Paare

(19) $$(a, \alpha) \qquad (a \in A, \alpha \in \Gamma)$$

das Produkt

(20) $$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha^b \beta).$$

So entsteht wegen (16) eine Gruppe mit dem Einselement $(e, \varepsilon)$, die wir mit

(21) $$A \bullet \Gamma$$

bezeichnen. Diese Gruppe ist nämlich (vgl. RÉDEI [6] Korollar 1 von Satz 1, S. 260) eine faktorenfreie (also zerfallende) Schreiersche Erweiterung von $\Gamma$ mit $A$, die wir deshalb kurz die *$A$ zugehörige zerfallende Erweiterung* von $\Gamma$ nennen.[24] In dieser bilden die Elemente $(e, \alpha)$ einen mit $\Gamma$ isomorphen Normalteiler, demgemäß wir die übliche Einbettung $(e, \alpha) \to \alpha$ stets ausgeführt denken, wodurch

(22) $$\Gamma \lhd (A \bullet \Gamma)$$

in Erfüllung geht.

Ist $A$ insbesondere eine *innere Automorphismengruppe* (d. h. eine Gruppe von inneren Automorphismen) von $\Gamma$, so können wir der Gruppe (21) eine mehr explizite Form geben. Zu diesem Zweck betrachten wir den durch $\alpha$ induzierten inneren Automorphismus

(23) $$\varrho \to \alpha^{-1} \varrho \alpha$$

von $\Gamma$. Dieser hängt nur von der Klasse $\alpha_* = \alpha \Gamma_*$ ab, weshalb wir ihn dieser Klasse $\alpha_*$ zuordnen können. Diese Zuordnung ist auch rückwärts eindeutig. Hiernach dürfen wir (23) den „Automorphismus $\alpha_*$" nennen und diesen ebenfalls mit $\alpha_*$ bezeichnen, woraus kein Mißverständnis entstehen wird. Dann gilt

(24) $$\varrho^{\alpha_*} = \alpha^{-1} \varrho \alpha,$$

ferner ist auch die (16) entsprechende Bedingung $\varrho^{\alpha_* \beta_*} = (\varrho^{\alpha_*})^{\beta_*}$ erfüllt. Folglich ist die gesagte Zuordnung ein Isomorphismus zwischen $\Gamma/\Gamma_*$ und der *vollen inneren Automorphismengruppe* (d. h. der Gruppe aller inneren Automorphismen) von $\Gamma$, weshalb wir die letztere nach Identifizierung der entsprechenden Elemente einfach mit $\Gamma/\Gamma_*$ bezeichnen dürfen. Also läßt sich obiges $A$ als eine beliebige Untergruppe von $\Gamma/\Gamma_*$ annehmen. Dann besteht $A \bullet \Gamma$ aus den Elementen

(25) $$(\alpha_*, \beta) \qquad (\alpha_* \in A \subseteq (\Gamma/\Gamma_*), \beta \in \Gamma)$$

[24] Man beachte, daß es im allgemeinen mehrere, wesentlich verschiedene zerfallende Schreiersche Erweiterungen von $\Gamma$ mit $A$ gibt, denn es gehört unter anderem auch das direkte Produkt von $A$ und $\Gamma$ darunter, daß aber die Gruppe (21) durch $A$ und $\Gamma$ eindeutig bestimmt ist.

und als Produktregel gilt nach (20), (24)

$$(26)\qquad (\alpha_*, \beta)(\gamma_*, \delta) = (\alpha_*\gamma_*, \gamma^{-1}\alpha\gamma\delta),$$

wobei man rechts für $\gamma$ einen beliebigen Repräsentanten der Klasse $\gamma_*$ einzusetzen hat.

Wenn dabei $\Gamma$ *zentrumlos* ist (d. h. $\Gamma_* = \varepsilon$ gilt), so dürfen wir $\Gamma/\Gamma_* = \Gamma$, $\alpha_* = \alpha$ schreiben. Entsprechend lassen sich jetzt nach (25), (26) die Elemente der Gruppe $A \bullet \Gamma$ und die Produktregel in ihr durch

$$(27)\qquad (\alpha, \beta) \qquad (\alpha \in A \subseteq \Gamma, \beta \in \Gamma),$$

$$(28)\qquad (\alpha, \beta)(\gamma, \delta) = (\alpha\gamma, \gamma^{-1}\beta\gamma\delta)$$

angeben.

Gleich zeigen wir, daß $A \bullet \Gamma$ in diesem Fall ein direktes Produkt ist:

$$(29)\qquad A \bullet \Gamma \approx A \otimes \Gamma,$$

wobei „$\approx$", „$\otimes$" die Isomorphie bzw. das direkte Produkt bezeichnet. Zu diesem Zweck nehme man die Permutation

$$(\alpha, \beta) \to \Pi(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha\beta)$$

der Elemente von $A \bullet \Gamma$ zu Hilfe und gehe von (28) auf die neue Multiplikation

$$(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) = \Pi(\Pi^{-1}(\alpha, \beta)\Pi^{-1}(\gamma, \delta))$$

über. Die rechte Seite ist wegen $\Pi^{-1}(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha^{-1}\beta)$ und (28) gleich

$$\Pi((\alpha, \alpha^{-1}\beta)(\gamma, \gamma^{-1}\delta)) = \Pi(\alpha\gamma, \gamma^{-1}\alpha^{-1}\beta\delta) = (\alpha\gamma, \beta\delta).$$

Hieraus folgt (vgl. RÉDEI [8] § 2) die Richtigkeit von (29).

## Fall P:

Wir wollen hier die den vorigen analogen Vorbereitungen schaffen. Zu diesem Zwecke verfahren wir am bequemsten so, daß wir vorläufig die Definition (12) der Doppelhomothetismen außer acht lassen und statt deren von der folgenden Definition ausgehen, von der wir aber später unten zeigen werden, daß diese mit der vorigen äquivalent ist.[25]

Unter einem Doppelhomothetismus von P verstehen wir eine Doppelabbildung $a$ von P in sich mit den Eigenschaften:

$$(30)\qquad a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta, \quad (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a,$$

$$(31)\qquad a\alpha\beta = (a\alpha)\beta, \quad \alpha\beta a = \alpha(\beta a),$$

$$(32)\qquad (\alpha a)\beta = \alpha(a\beta),$$

$$(33)\qquad (a\alpha)a = a(\alpha a).$$

[25] Diese „zweite" Definition entspricht mehr der üblichen Definition der Automorphismen von $\Gamma$ und ist mehr explizit, dagegen begrifflich weniger einfach als die „erste" Definition (12).

Wegen (30) ist jeder Doppelhomothetismus von P ein Doppelendomorphismus von $P^+$. Entsprechend werden wir unter einem Ring von Doppelhomothetismen von P stets solche Unterringe des vollen Doppelendomorphismenringes von $P^+$ verstehen, die aus Doppelhomothetismen von P bestehen. Nun bilden die sämtlichen Doppelhomothetismen von P, wie im § 1 schon erwähnt, im allgemeinen keinen Ring. Das werden wir erst im § 6 mit einem Beispiel zeigen (eilig ist es nicht). Dagegen zeigen wir hier zu einer ersten Orientierung folgendes:

Für zwei Doppelhomothetismen $a, b$ von P ist $a+b$ dann und nur dann ebenfalls ein Doppelhomothetismus von P, wenn die Bedingung

$$(a\alpha)b+(b\alpha)a=a(\alpha b)+b(\alpha a) \tag{34}$$

erfüllt ist.

Wir wissen nämlich, daß $a+b$ jedenfalls ein Doppelendomorphismus von $P^+$, also (30) für $a+b$ statt $a$ erfüllt ist. Auch ist wegen (17) klar, daß (31), (32) mit $a$ und $b$ zusammen auch für $a+b$ erfüllt sind. Damit also $a+b$ ein Doppelhomothetismus von P ist, ist notwendig und hinreichend, daß (33) für $a+b$ statt $a$ erfüllt ist. Diese Bedingung lautet so:

$$((a+b)\alpha)(a+b)=(a+b)(\alpha(a+b)).$$

Dies läßt sich wegen (33) und der ähnlichen Gleichung für $b$ statt $a$, ferner wegen (17) in (34) umformen, womit die Behauptung bewiesen ist.

Nun wird aber das eben gewonnene Kriterium (34) außer acht bleiben, denn wir werden es (glücklicherweise) auf einmal nur mit solchen Doppelhomothetismen $a, b$ von P zu tun haben, für die die Bedingung

$$(a\alpha)b=a(\alpha b), \quad (b\alpha)a=b(\alpha a) \tag{35}$$

erfüllt ist; zwei Doppelhomothetismen $a, b$ von P mit dieser Eigenschaft (35) nennen wir *befreundet.*[26] Ferner verstehen wir unter einer *Menge* oder einem *Ring von befreundeten Doppelhomothetismen* von P eine Menge bzw. einen Ring von paarweise befreundeten Doppelhomothetismen von P. Uns werden in der Hauptsache (aus der Menge aller Doppelhomothetismen von P) nur die Ringe von befreundeten Doppelhomothetismen von P interessieren. Über diese einen Überblick zu verschaffen ist unser nächster Zweck.

Da (35) für $a=b$ in (33) übergeht, so sehen wir vor allem, daß jeder Doppelhomothetismus von P mit sich selbst befreundet ist, d. h. für sich eine Menge von befreundeten Doppelhomothetismen von P bildet. Das bedeutet insbesondere die Existenz der Mengen von befreundeten Doppelhomothetismen von P.

[26] Die Bedeutung obiger Definition liegt darin, daß — wie wir später zeigen werden — zwei Doppelhomothetismen von P dann und nur dann befreundet sind, wenn sie durch zwei Elemente induziert werden, die in *eine* Schreiersche Erweiterung von P gehören. — Da (34) eine Folgerung aus (35) ist, so gilt nach obigem jedenfalls, daß die Summe $a+b$ zweier befreundeter Doppelhomothetismen $a, b$ von P auch ein Doppelhomothetismus ist. Dieses Resultat wird durch die späteren weit überholt.

Es ist wichtig, daß *jede Menge von befreundeten Doppelhomothetismen von* P *in einer ebensolchen maximalen*[27] *Menge enthalten ist.*

Ist nämlich $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ eine (unendliche) Kette von Mengen von befreundeten Doppelhomothetismen von P, so ist offenbar auch die Vereinigungsmenge von $M_1, M_2, \ldots$ eine Menge von befreundeten Doppelhomothetismen von P. Hieraus folgt nach dem Lemma von KURATOWSKI-ZORN die Richtigkeit der Behauptung.

Wir zeigen ferner, daß *der durch eine Menge $M$ von befreundeten Doppelhomothetismen von* P *erzeugte Ring $\{M\}$ stets ein Ring von befreundeten Doppelhomothetismen von* P *ist.*

Zunächst ist nämlich $\{M\}$, wie wir wissen, ein Unterring des vollen Doppelendomorphismenringes von $P^+$. Zum Beweis der übrigen Behauptung wollen wir eine Eigenschaft einer beliebigen Menge $M'$ von Doppelendomorphismen von $P^+$ *permanent* nennen, wenn diese Eigenschaft auch der Menge der Elemente des Ringes $\{M'\}$ zukommt. Es folgt aus (17), (18) mit Induktion, daß die über alle Elemente bzw. alle Elementpaare $a, b$ unserer Menge $M$ vorausgesetzten Bedingungen (31), (32), (35)[28] lauter permanente Eigenschaften von $M$ ausdrücken. Das beendet den Beweis unserer Behauptung.

Jede maximale Menge von befreundeten Doppelhomothetismen von P bildet einen Ring; diese Ringe nennen wir die *maximalen Ringe von befreundeten Doppelhomothetismen von* P.

Ist nämlich $M$ eine maximale Menge von befreundeten Doppelhomothetismen von P, so ist $\{M\}$ nach vorigem ein Ring von befreundeten Doppelhomothetismen von P. Da dabei $M \subseteq \{M\}$ gilt, so folgt aus der Maximaleigenschaft von $M$ die Gleichung $M = \{M\}$, also die Richtigkeit der Behauptung.

Aus obigem folgt nunmehr auch, daß *jeder Ring* (und sogar überhaupt jede Menge) *von befreundeten Doppelhomothetismen von* P *in mindestens einem ebensolchen maximalen Ring enthalten ist.*

Betrachten wir nunmehr einen beliebigen (nicht notwendig maximalen) Ring $D$ von befreundeten Doppelhomothetismen von P. Wir wiederholen, daß das nach (17), (18), (30), (31), (32), (35)[28] folgendes bedeutet: $D$ ist ein Ring von Doppelabbildungen von P in sich mit den Eigenschaften

$$a(\alpha+\beta) = a\alpha + a\beta, \quad (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a, \tag{36}$$

$$(a+b)\alpha = a\alpha + b\alpha, \quad \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b, \tag{37}$$

$$a\alpha\beta = (a\alpha)\beta, \quad \alpha\beta a = \alpha(\beta a), \tag{38}$$

$$ab\alpha = a(b\alpha), \quad \alpha ab = (\alpha a)b, \tag{39}$$

$$(\alpha a)\beta = \alpha(a\beta), \tag{40}$$

$$(a\alpha)b = a(\alpha b) \tag{41}$$

für alle $a, b \in D$ und $\alpha, \beta \in$ P.

[27] „Maximal" wird stets im üblichen mengentheoretischen Sinne gebraucht.

[28] Man braucht (33) nicht zu nennen, da dies in (35) enthalten ist.

Für jeden dieser Ringe $D$ definieren wir in der Menge aller Paare

(42) $$(a, \alpha) \qquad (a \in D, \alpha \in \mathrm{P})$$

die zwei Verknüpfungen (Summe und Produkt)

(43) $$(a, \alpha)+(b, \beta)=(a+b, \alpha+\beta), \quad (a, \alpha)(b, \beta)=(ab, \alpha b+a\beta+\alpha\beta).$$

So entsteht nach RÉDEI [6] Satz 4 nebst Korollar[29] eine faktorenfreie (also zerfallende) Schreiersche Erweiterung von $\mathrm{P}$ mit $D$, die wir mit

(44) $$D \bullet \mathrm{P}$$

bezeichnen und die *$D$ zugehörige zerfallende Erweiterung von* $\mathrm{P}$ nennen.[30] In diesem Ring bilden die Elemente $(0, \alpha)$ ein mit $\mathrm{P}$ isomorphes Ideal, demgemäß wir die Einbettung $(0, \alpha) \to \alpha$ stets ausgeführt denken, wodurch

(45) $$\mathrm{P} \lhd (D \bullet \mathrm{P})$$

in Erfüllung geht.[31]

Hier schalten wir den Beweis ein, daß die für die Doppelhomothetismen bei (12) bzw. (30) bis (33) angegebenen zwei Definitionen äquivalent sind. Diese Definitionen unterscheiden wir kurz als erste bzw. zweite Definition.

Zum Beweis bezeichne $a$ zuerst einen Doppelhomothetismus von $\mathrm{P}$ im Sinne der ersten Definition. Das bedeutet nach (12), daß es einen Ring $\overline{\mathrm{P}}$ mit $\mathrm{P} \lhd \overline{\mathrm{P}}$ und ein Element $\bar{a}$ in ihm gibt, so daß

(46) $$a\alpha=\bar{a}\alpha, \quad \alpha a=\alpha\bar{a}$$

gelten. (Die rechten Seiten bedeuten gewöhnliche Produkte im Ring $\overline{\mathrm{P}}$.) Nun sind (30) bis (33) für $\bar{a}$ statt $a$ trivial erfüllt. Folglich ist $a$ eine Doppelabbildung von $\mathrm{P}$ in sich, für die wegen (46) die Gleichungen (30) bis (33) ebenfalls erfüllt sind, somit ist $a$ ein Doppelhomothetismus von $\mathrm{P}$ auch im Sinne der zweiten Definition.

Umgekehrt bezeichne jetzt $a$ einen Doppelhomothetismus wie eben gesagt. Dann ist $a$ in einem maximalen Ring $D$ von befreundeten Doppelhomothetismen von $\mathrm{P}$ enthalten. (Übrigens würden wir auch mit dem Ring $\{a\}$ statt $D$ auskommen.) Wir nehmen den Ring (44) zu Hilfe, in dem wir jetzt aber die Einbettung $(0, \alpha) \to \alpha$ vorläufig nicht ausführen. In diesem Ring bilden die Elemente $(0, \alpha)$ ein Ideal $\mathrm{P}_1$. Hiernach induziert das Element $(a, 0)$ von (44) einen Doppelhomothetismus von $\mathrm{P}_1$ im Sinne der ersten Definition,

[29] Wir berichtigen einen augenscheinlichen Fehler im oben zitierten Korollar, und zwar sind dort die Bedingungen (56) bis (60) noch mit
$$ab\gamma=a(b\gamma), \quad \alpha bc=(\alpha b)c$$
zu ergänzen.

[30] Mutatis mutandis gilt[24] auch hierfür.

[31] Schon aus obigem ersieht man die Bedeutung der Doppelhomothetismen insbesondere im Zusammenhang mit der Schreierschen Erweiterungstheorie. Im wesentlichen sind die Doppelhomothetismen (ohne diese Benennung) auch schon in RÉDEI [7] Satz 2 aufgetreten.

dessen zwei Bestandteile nach (12) die Abbildungen

$$(0, \varrho) \to (a, 0)(0, \varrho), \quad (0, \varrho) \to (0, \varrho)(a, 0)$$

sind. Hierfür läßt sich nach $(43_2)$

$$(0, \varrho) \to (0, a\varrho), \quad (0, \varrho) \to (0, \varrho a)$$

schreiben. Dies geht nach der Einbettung eben in (12) über, womit wir gezeigt haben, daß $a$ ein Doppelhomothetismus von P auch im Sinne der ersten Definition ist. Damit haben wir die Äquivalenz beider Definitionen der Doppelhomothetismen ausgewiesen.

Es ist nach (36) bis (41) klar, daß die sämtlichen inneren Doppelhomothetismen von P einen Ring von befreundeten Doppelhomothetismen von P bilden, den wir kurz den *vollen inneren Doppelhomothetismenring* von P nennen.

Ist $D$ insbesondere ein *innerer Doppelhomothetismenring* von P, worunter wir einen beliebigen Unterring des vorher genannten Ringes verstehen, so können wir dem Ring (44) eine mehr explizite Form geben. Zu diesem Zweck betrachten wir den durch $\alpha$ induzierten (inneren) Doppelhomothetismus von P, der also aus den zwei Abbildungen

$$\varrho \to \alpha\varrho, \quad \varrho \to \varrho\alpha \tag{47}$$

besteht. Dieser hängt offenbar nur von der Klasse $\alpha_* = \alpha + \mathrm{P}_*$ ab, weshalb wir ihn dieser Klasse $\alpha_*$ zuordnen können. Diese Zuordnung ist auch rückwärts eindeutig. Hiernach dürfen wir (47) den „Doppelhomothetismus $\alpha_*$“ nennen und diesen ebenfalls mit $\alpha_*$ bezeichnen. Dann gilt

$$\alpha_*\varrho = \alpha\varrho, \quad \varrho\alpha_* = \varrho\alpha. \tag{48}$$

Dabei ist die gesagte Zuordnung ein Isomorphismus zwischen $\mathrm{P}/\mathrm{P}_*$ und dem vollen inneren Doppelhomothetismenring von P, weshalb wir den letzteren nach Identifizierung der entsprechenden Elemente einfach mit $\mathrm{P}/\mathrm{P}_*$ bezeichnen dürfen. Also läßt sich obiges $D$ als ein beliebiger Unterring von $\mathrm{P}/\mathrm{P}_*$ annehmen. Dann besteht $D \bullet \mathrm{P}$ aus den Elementen

$$(\alpha_*, \beta) \qquad (\alpha_* \in D \subseteqq (\mathrm{P}/\mathrm{P}_*), \beta \in \mathrm{P}) \tag{49}$$

und als Verknüpfungsregeln gelten nach (43), (48)

$$(\alpha_*, \beta) + (\gamma_*, \delta) = (\alpha_* + \gamma_*, \beta + \delta), \quad (\alpha_*, \beta)(\gamma_*, \delta) = (\alpha_*\gamma_*, \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta), \tag{50}$$

wobei auf der rechten Seite der zweiten Gleichung beliebige Repräsentanten $\alpha, \gamma$ der Klasse $\alpha_*$ bzw. $\gamma_*$ zu nehmen sind.

Wenn dabei P *annullatorfrei* ist (d. h. $\mathrm{P}_* = 0$ gilt), so dürfen wir $\mathrm{P}/\mathrm{P}_* = \mathrm{P}$, $\alpha_* = \alpha$ schreiben. Entsprechend lassen sich jetzt nach (49), (50) die Elemente des Ringes $D \bullet \mathrm{P}$ und die Verknüpfungsregeln in ihm durch

$$(\alpha, \beta) \qquad (\alpha \in D \subseteqq \mathrm{P}, \beta \in \mathrm{P}), \tag{51}$$

$$(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta), \quad (\alpha, \beta)(\gamma, \delta) = (\alpha\gamma, \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta) \tag{52}$$

angeben.

Gleich zeigen wir, daß $D \bullet \mathrm{P}$ in diesem Fall eine direkte Summe ist:[32]

(53) $$D \bullet \mathrm{P} \approx D \oplus \mathrm{P},$$

wobei „$\oplus$“ die direkte Summe bezeichnet. Zu diesem Zweck nehme man die Permutation

$$(\alpha, \beta) \to \Pi(\alpha, \beta) = (\alpha, \alpha + \beta)$$

der Elemente von $D \bullet \mathrm{P}$ zu Hilfe und gehe von $(52_2)$ auf die neue Multiplikation

$$(\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta) = \Pi(\Pi^{-1}(\alpha, \beta)\Pi^{-1}(\gamma, \delta))$$

über. Die rechte Seite ist wegen $\Pi^{-1}(\alpha, \beta) = (\alpha, -\alpha + \beta)$ und $(52_2)$ gleich

$$\Pi((\alpha, -\alpha + \beta)(\gamma, -\gamma + \delta)) = \Pi(\alpha\gamma, -\alpha\gamma + \beta\delta) = (\alpha\gamma, \beta\delta).$$

Da ferner $(52_1)$ gegenüber der ähnlichen „Transformation“ invariant bleibt, so folgt (vgl. RÉDEI [8] § 2) die Richtigkeit von (53).

## § 3. Die Grundlagen der Holomorphentheorie für Gruppen

Wir stellen hier die bekannten grundlegenden Definitionen und Sätze bezüglich der charakteristischen Untergruppen und des Holomorphes einer Gruppe zusammen.

DEFINITION $1_0$. *Eine Untergruppe $\Gamma'$ der Gruppe $\Gamma$ nennen wir charakteristisch, wenn $\Gamma'$ in allen Schreierschen Erweiterungen von $\Gamma$ normal ist.* (In Zeichen: $\Gamma' \blacktriangleleft \Gamma$ bedeutet, daß $\Gamma' < \Gamma$ gilt und aus $\Gamma \lhd \bar{\Gamma}$ stets $\Gamma' \lhd \bar{\Gamma}$ folgt.)

SATZ $1_0$. (Erstes Kriterium für die charakteristischen Untergruppen.) *Eine Untergruppe $\Gamma'$ der Gruppe $\Gamma$ ist dann und nur dann charakteristisch, wenn $\Gamma'$ gegenüber allen Automorphismen von $\Gamma$ zulässig[33] ist.*

DEFINITION $2_0$. *Unter dem Holomorph der Gruppe $\Gamma$ verstehen wir die der vollen Automorphismengruppe $A$ von $\Gamma$ zugehörige zerfallende Erweiterung $A \bullet \Gamma$ von $\Gamma$.*[34]

[32] Darauf hat mich Herr J. SZENDREI aufmerksam gemacht und erst so wurde ich auch auf (29) aufmerksam.

[33] D. h. $\Gamma'^a \subseteq \Gamma'$ für alle Automorphismen $a$ von $\Gamma$. Da auch $a^{-1}$ ein Automorphismus von $\Gamma$ ist, so bedeutet diese Bedingung, daß $\Gamma'^a = \Gamma'$ für alle $a$ gilt, d. h. $\Gamma'$ gegenüber allen Automorphismen von $\Gamma$ (sogar) invariant ist. Man darf also wegen Satz $1_0$ auch diese Eigenschaft als Definition zum Ausgang nehmen, wie das in der Literatur üblich ist, und dann gilt Definition $1_0$ als Satz. Die von uns vorgenommene Vertauschung von Definition und Satz ist also durchaus gestattet und wird sich im § 4 lohnen.

[34] Man pflegt das Holomorph von $\Gamma$ als eine Permutationsgruppe der Elemente von $\Gamma$ zu definieren (vgl. ZASSENHAUS [16] S. 46), aber der Leser sieht leicht, daß beide Definitionen im wesentlichen übereinstimmen. Obige Definition ist begrifflich einfacher und scheint uns zu allen Zwecken geeigneter zu sein als die althergebrachte. Mit ihr sind wir in der Literatur nicht begegnet, aber nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn L. FUCHS hat er sie auch entdeckt. — Erst nach der Abfassung unserer Arbeit wurden wir einer der obigen ähnlichen Definition des Holomorphes der Gruppe in der folgenden Arbeit gewahr: W. H. MILLS, On the nonisomorphism of certain holomorphs, *Transactions of the Amer. Math. Soc.*, **74** (1953), S. 428—443.

Satz $2_0$. (Zweites Kriterium für die charakteristischen Untergruppen.) *Eine Untergruppe $\Gamma'$ der Gruppe $\Gamma$ ist dann und nur dann charakteristisch, wenn $\Gamma'$ im Holomorph von $\Gamma$ normal ist.*

Für den Beweis der Sätze $1_0, 2_0$ verweisen wir auf die Lehrbücher.

## § 4. Die Grundlagen der Holomorphentheorie für Ringe

Ähnlich zur Definition $1_0$ definieren wir, wie folgt:[35]

Definition 1. *Einen Unterring $\mathrm{P}'$ des Ringes $\mathrm{P}$ nennen wir charakteristisch, wenn $\mathrm{P}'$ in allen Schreierschen Erweiterungen von $\mathrm{P}$ normal (d. h. ein Ideal) ist.* (In Zeichen: $\mathrm{P}' \blacktriangleleft \mathrm{P}$ bedeutet, daß $\mathrm{P}' < \mathrm{P}$ gilt und aus $\mathrm{P} \lhd \bar{\mathrm{P}}$ stets $\mathrm{P}' \lhd \bar{\mathrm{P}}$ folgt.)

Bemerkung. Hiernach sind die charakteristischen Unterringe lauter Ideale, wie auch die charakteristischen Untergruppen lauter Normalteiler sind. Diese Analogie war von einer trefflichen Begriffsbildung auch mit Recht zu erwarten, da — wie bemerkt — Normalteiler und Ideale durchaus analoge Begriffe sind. Hätten wir aber an die im Satz $1_0$ enthaltene Eigenschaft der charakteristischen Untergruppen angeknüpft (mit der man diese — wie in[33] erwähnt — zu definieren pflegt), so wären wir zu denjenigen Unterringen von $\mathrm{P}$ gekommen, die gegenüber allen Automorphismen von $\mathrm{P}$ zulässig, also (vgl. den Anfang von[33]) invariant sind. Nun bilden zwar diese „invarianten Unterringe“ einen bekanntlich sehr wichtigen Begriff, doch ist dieser keineswegs als das Analogon zu den charakteristischen Untergruppen anzusehen, schon aus dem Grunde, daß die invarianten Unterringe keine Ideale zu sein brauchen. Das erklärt, warum wir uns bei obiger Definition 1 entschlossen haben. Aus diesen Auseinandersetzungen sieht man auch, daß die gruppen-ringtheoretischen Analogien nicht immer etwas selbstverständliches, sondern oft ziemlich verborgen sind.

Satz 1. (Erstes Kriterium für die charakteristischen Unterringe.) *Ein Unterring $\mathrm{P}'$ des Ringes $\mathrm{P}$ ist dann und nur dann charakteristisch, wenn $\mathrm{P}'$ gegenüber allen Doppelhomothetismen von $\mathrm{P}$ zulässig[36] ist.*

Bemerkung. Durch die augenscheinliche Analogie der Sätze $1_0$, 1 wurde auch die Analogie (14) wiederholt bekräftigt.

Zum Beweis von Satz 1 betrachten wir einen charakteristischen Unterring $\mathrm{P}'$ und einen Doppelhomothetismus $a$ von $\mathrm{P}$. Letzterer wird wegen der Äquivalenz beider Definitionen der Doppelhomothetismen durch ein Element

[35] Analoge gruppen- und ringtheoretische Definitionen oder Sätze werden in der ganzen Arbeit mit $1_0, 2_0, \ldots$ bzw. $1, 2, \ldots$ numeriert.

[36] D. h. $a\mathrm{P}', \mathrm{P}'a \subseteq \mathrm{P}$ für alle Doppelhomothetismen $a$ von $\mathrm{P}$.

$\bar{a}$ einer Schreierschen Erweiterung $\bar{\mathrm{P}}$ von $\mathrm{P}$ induziert. Wegen der Definition 1 gilt $\mathrm{P}' \lhd \bar{\mathrm{P}}$, also ist

$$\bar{a}\mathrm{P}', \mathrm{P}'\bar{a} \subseteq \mathrm{P}'. \tag{54}$$

Hierfür läßt sich

$$a\mathrm{P}', \mathrm{P}'a \subseteq \mathrm{P}' \tag{55}$$

schreiben, womit wir „nur dann" bewiesen haben.

Um auch „dann" zu beweisen, nehmen wir (55) für ein $\mathrm{P}'(<\mathrm{P})$ und für alle Doppelhomothetismen $a$ von $\mathrm{P}$ an. Wir betrachten ein $\bar{\mathrm{P}}$ mit $\mathrm{P} \lhd \mathrm{P}$. Da jedes Element $\bar{a}$ von $\bar{\mathrm{P}}$ einen Doppelhomothetismus von $\mathrm{P}$ induziert, so folgt aus (55) das Bestehen von (54). Dies bedeutet das Bestehen von $\mathrm{P}' \lhd \bar{\mathrm{P}}$. Somit haben wir Satz 1 bewiesen.

Ähnlich zur Definition $2_0$ definieren wir, wie folgt:

DEFINITION 2. *Unter den Holomorphen des Ringes* $\mathrm{P}$ *verstehen wir die den maximalen Ringen $D$ von befreundeten Doppelhomothetismen von* $\mathrm{P}$ *zugehörigen zerfallenden Erweiterungen* $D \bullet \mathrm{P}$ *von* $\mathrm{P}$.

BEMERKUNG. Die Benennung „Holomorphe des Ringes" ist auch durch den folgenden Satz 2 rechtfertigt, der das Analogon zum Satz $2_0$ bildet. Die Bildung eines Holomorphes $D \bullet \mathrm{P}$ aus $\mathrm{P}$ und $D$ geschieht nach (43) sehr einfach. Will man also alle Holomorphe von $\mathrm{P}$ kennen, so kommt das auf die Bestimmung der sämtlichen maximalen Ringen $D$ von befreundeten Doppelhomothetismen von $\mathrm{P}$ an. Diese Frage für spezielle Ringe $\mathrm{P}$ zu untersuchen ist eine würdige und schwierige Aufgabe, mit der wir uns noch kaum beschäftigt haben. (Für den sehr einfachen Fall von „$\mathrm{P}$ mit Einselement" s. Satz 3.) Für den allgemeinen Fall bemerken wir folgendes. Aus (35) folgt sofort, daß zwei Doppelhomothetismen von $\mathrm{P}$ befreundet sind, wenn mindestens der eine ein innerer oder der identische ist. Bezeichne $D_0(\approx \mathrm{P}/\mathrm{P}_*)$ den vollen inneren Doppelhomothetismenring von $\mathrm{P}$ und $e$ (wie immer) den identischen Doppelhomothetismus von $\mathrm{P}$. (Wir wissen, daß $e$ nicht in $D_0$ gehört, wenn $\mathrm{P}$ kein Einselement hat.) Nach dem Gesagten muß $\{e, D_0\}$ in allen $D$ enthalten sein, und sogar echt enthalten, wenn es außerhalb von $\{e, D_0\}$ noch mindestens einen Doppelhomothetismus von $\mathrm{P}$ gibt. Ferner gilt offenbar: Dann und nur dann gibt es mehr als ein $D$ (d. h. mehr als ein Holomorph von $\mathrm{P}$), wenn $\mathrm{P}$ zwei (äußere) Doppelhomothetismen hat, die nichtbefreundet sind. Wir bemerken auch: Aus $e \in D$ und (43) folgt, daß jedes Holomorph von $\mathrm{P}$ das Einselement $(e, 0)$ hat.

SATZ 2. (Zweites Kriterium für die charakteristischen Unterringe.) *Ein Unterring* $\mathrm{P}'$ *des Ringes* $\mathrm{P}$ *ist dann und nur dann charakteristisch, wenn* $\mathrm{P}'$ *in allen Holomorphen von* $\mathrm{P}$ *normal (d. h. ein Ideal) ist.*

„Nur dann" folgt sofort aus den Definitionen 1,2.

Um auch „dann“ zu beweisen, nehmen wir das Erfülltsein der im Satz 2 genannten Bedingung an und betrachten einen Doppelhomothetismus $a$ von $\mathrm{P}$. Nach § 2 ist $a$ in einem maximalen Ring $D$ von befreundeten Doppelhomothetismen von $\mathrm{P}$ enthalten. Nach der Annahme enthält das Holomorph $D \bullet \mathrm{P}$ den Unterring $\mathrm{P}'$ als Ideal. Andererseits induziert das Element $(a, 0)$ von $D \bullet \mathrm{P}$, wie wir gesehen haben, eben den Doppelhomothetismus $a$, woraus (55) folgt. Nach Satz 1 ist also $\mathrm{P}' \blacktriangleleft \mathrm{P}$, womit Satz 2 bewiesen ist.

## § 5. Vollständige Gruppen. Ringe mit Einselement

Die im vorigen entwickelte Analogie zwischen Gruppen- und Ringtheorie läßt sich noch weiter ausbauen. So werden wir hier sehen, daß die Ringe mit Einselement sich zu den vollständigen Gruppen[37] analog verhalten.

SATZ $3_0$. *Eine Gruppe ist dann und nur dann vollständig, wenn sie ein direkter Faktor in allen ihren Schreierschen Erweiterungen ist. Wenn eine Gruppe ein direkter Faktor in ihrem Holomorph ist, so ist sie vollständig oder das direkte Produkt einer vollständigen Gruppe und einer Gruppe zweiter Ordnung.*

BEMERKUNG. Die Behauptung „nur dann“ ist bekannt (s. SPEISER [11] Satz 110, wo nur die endlichen Gruppen betrachtet werden). Die Behauptung „dann“ ist im wesentlichen ein Satz von BAER [1]. Die zweite Hälfte von Satz $3_0$ ist unseres Wissens neu. Wir werden Satz $3_0$ sehr leicht im ganzen Umfange beweisen.

SATZ 3. *Ein Ring hat dann und nur dann ein Einselement, wenn er ein direkter Summand in allen seinen Schreierschen Erweiterungen ist. Die Ringe mit Einselement lassen sich auch dadurch charakterisieren, daß sie nur innere Doppelhomothetismen haben.*[38] *Folglich sind ihre sämtlichen Ideale charakteristich, ferner haben sie nur ein Holomorph.*[39] *Umgekehrt wenn ein Ring ein direkter Summand in seinem irgendwelchen Holomorph ist, so ist er ein Ring mit Einselement* (folglich hat er nur ein Holomorph).[40]

[37] Bekanntlich nennt man eine Gruppe vollständig, wenn sie nur innere Automorphismen hat und ohne Zentrum ist (vgl. SPEISER [11], S. 125). Eine vollständige Gruppe ist also isomorph mit ihrer vollen Automorphismengruppe.

[38] Da ein Ring mit Einselement auch annullatorfrei ist, so induzieren seine Elemente lauter verschiedene Doppelhomothetismen, folglich ist er isomorph mit seinem „vollen Doppelhomothetismenring“ (vgl. den Schluß von [37]). — Im allgemeinen, wenn die sämtlichen Doppelhomothetismen von $\mathrm{P}$ einen Ring bilden, so können wir diesen den vollen Doppelhomothetismenring von $\mathrm{P}$ nennen. Dieser kann natürlich auch dann existieren, wenn $\mathrm{P}$ kein Einselement hat.

[39] Das Holomorph von einem Ring $\mathrm{P}$ mit Einselement läßt sich einfach als $\mathrm{P} \bullet \mathrm{P}$ angeben (s. Fall $D = \mathrm{P}$ von (51), (52)).

[40] Ausführlicher gesprochen: Hat ein Ring kein Einselement, so ist er in keinem Holomorph von ihm ein direkter Summand. Hat er das Einselement, so hat er nur ein Holomorph und ist ein direkter Summand in diesem.

Die Behauptung „dann“ ist eine Folgerung aus der letzten Behauptung des Satzes. Die Behauptung „nur dann“ war in einem Spezialfall schon TSCHEBOTAREFF [15] bekannt.[40a] Nach dem Anfang der Sätze $3_0$, 3 sind die vollständigen Gruppen und die Ringe mit Einselement als genaue Analoga voneinander anzusehen. Es is merkwürdig, daß Satz 3 im ganzen viel reichhaltiger ist als Satz $3_0$.[41] Selbst das im ersten Teil von Satz 3 gelöste Problem der Bestimmung der ringtheoretischen Analoga der vollständigen Gruppen hat schon früher SZENDREI [14] aufgeworfen und beantwortet.

BEWEIS VON SATZ $3_0$. Wir fangen es mit „nur dann“ an. Zu diesem Zweck betrachten wir eine vollständige Gruppe $\Gamma$ und eine Schreiersche Erweiterung $\bar{\Gamma}$ von ihr. Wir haben zu zeigen, daß $\Gamma$ als direkter Faktor in $\bar{\Gamma}$ enthalten ist. Wegen der Annahme ist für jedes Element $\bar{\alpha}$ von $\bar{\Gamma}$ die Abbildung

$$\varrho \to \bar{\alpha}^{-1}\varrho\bar{\alpha} \qquad (\varrho \in \Gamma)$$

ein innerer Automorphismus von $\Gamma$. Da ferner $\Gamma$ ohne Zentrum ist, so gibt es zu $\bar{\alpha}$ ein einziges Element $\bar{\alpha}'$ von $\Gamma$, das diesen Automorphismus induziert. Dann ist $\bar{\alpha}^{-1}\bar{\alpha}'$ mit allen Elementen von $\Gamma$ vertauschbar, folglich gibt es in jeder Klasse von $\bar{\Gamma}$ nach $\Gamma$ ein einziges, mit allen Elementen von $\Gamma$ vertauschbares Element. Diese Elemente bilden eine Untergruppe $\Gamma_0$ von $\bar{\Gamma}$, ferner ist $\Gamma_0$ ein Repräsentantensystem der Klassen nach $\Gamma$. Hiernach ist $\bar{\Gamma}$ das direkte Produkt von $\bar{\Gamma}$ und $\Gamma_0$, womit wir „nur dann“ bewiesen haben.

Jetzt beweisen wir die letzte Behauptung von Satz $3_0$. Hierzu nehmen wir an, daß eine Gruppe $\Gamma$ ein direkter Faktor in ihrem Holomorph $A \bullet \Gamma$ ist, wobei $A$ die volle Automorphismengruppe von $\Gamma$ bezeichnet. Nach (20) und RÉDEI [6] Satz 3 gibt es wegen der Annahme eine Abbildung

$$a \to a'$$

von $A$ in $\Gamma$, wofür

$$(ab)'^{-1}a'b' = \varepsilon, \quad a'^{-1}\varrho a' = \varrho^a \tag{56}$$

gilt. Aus $(56_2)$ folgt, daß $A$ aus lauter inneren Automorphismen von $\Gamma$ besteht. Dann läßt sich $A = \Gamma/\Gamma_*$ setzen, ferner folgt aus $(56_1)$

$$(\alpha_*\beta_*)' = \alpha_*'\beta_*', \quad \alpha_*'^{-1}\varrho\alpha_*' = \varrho^{\alpha_*}, \tag{57}$$

[40a] Erst nach der Abfassung dieser Arbeit bemerkten wir, daß die Behauptung „nur dann“ von Satz 3 in voller Allgemeinheit auch schon in der folgenden Arbeit vorkommt: B. BROWN and N. H. MCCOY, The maximal regular ideal of a ring, *Proceedings of the Amer. Math. Soc.*, 1 (1950), S. 165—171 (Lemma 3).

[41] Auch sonst benehmen sich die Ringe mit Einselement in mancher Hinsicht abweichend von den vollständigen Gruppen. Es ist z. B. trivial, daß jeder Ring eine Schreiersche Erweiterung mit Einselement hat, nach dem Schluß der Bemerkung nach Definition 2 gilt sogar, daß jedes Holomorph eines Ringes ein Ring mit Einselement ist, demgegenüber ist unseres Wissens unbekannt, ob jede Gruppe sich nach SCHREIER zu einer vollständigen Gruppe erweitern läßt.

wobei

$$\alpha_* \to \alpha'_*$$

eine Abbildung von $\Gamma/\Gamma_*$ in $\Gamma$ ist. Aus ($57_2$) und $\varrho^{\alpha_*} = \alpha^{-1}\varrho\alpha$ folgt, daß $\alpha'_*$ in die Klasse $\alpha_* = \alpha\Gamma_*$ gehört. Da ferner die $\alpha'_*$ wegen ($57_1$) eine Untergruppe $\Gamma'$ von $\Gamma$ bilden, so zerfällt $\Gamma$ in das Produkt $\Gamma'\Gamma_*$, worunter wir verstehen, daß sich jedes Element von $\Gamma$ eindeutig als ein Produkt $\varrho\sigma$ ($\varrho \in \Gamma', \sigma \in \Gamma_*$) schreiben läßt. Da aber $\Gamma_*$ das Zentrum von $\Gamma$ ist, so folgt hieraus

$$\Gamma = \Gamma' \otimes \Gamma_*,$$

ferner muß $\Gamma'$ zentrumlos sein. Hat ein direktes Produkt nur innere Automorphismen, wie das nach obigem für $\Gamma$ der Fall ist, so gilt ähnliches auch für die Faktoren. Hieraus folgt, daß $\Gamma'$ vollständig und $\Gamma_*$ (als Abelsche Gruppe) aus höchstens zwei Elementen besteht. Damit haben wir die letzte Behauptung von Satz $3_0$ bewiesen.

Aus Satz $3_0$ haben wir nur noch „dann" zu beweisen. Da das Holomorph eine Schreiersche Erweiterung ist, so genügt es folgendes zu beweisen: Ist eine Gruppe

$$\Gamma = \mathrm{A} \otimes \mathrm{B} \tag{58}$$

das direkte Produkt von zwei Untergruppen $\mathrm{A}, \mathrm{B}$, von denen $\mathrm{A}$ ($\neq \varepsilon$) Abelsch und endlich ist, so hat $\Gamma$ eine Schreiersche Erweiterung $\bar{\Gamma}$, in der $\Gamma$ kein direkter Faktor ist. Wir nehmen eine echte Obergruppe $\bar{\mathrm{A}}$ von $\mathrm{A}$, die keinen mit $\mathrm{A}$ isomorphen direkten Faktor enthält, und setzen

$$\bar{\Gamma} = \bar{\mathrm{A}} \otimes \mathrm{B}. \tag{59}$$

Dabei läßt sich $\Gamma < \bar{\Gamma}$ annehmen, und dann gilt sogar $\Gamma \lhd \bar{\Gamma}$. Es genügt zu zeigen, daß $\Gamma$ kein direkter Faktor in $\bar{\Gamma}$ ist. Wir nehmen an, daß $\Gamma$ ein direkter Faktor in $\bar{\Gamma}$ ist. Dann gilt wegen (58)

$$\bar{\Gamma} = \mathrm{A}_1 \otimes \mathrm{A} \otimes \mathrm{B} \tag{60}$$

mit einer Untergruppe $\mathrm{A}_1$ von $\bar{\Gamma}$. Aus (59), (60) folgt die Isomorphie[42]

$$\bar{\mathrm{A}} \approx \mathrm{A}_1 \otimes \mathrm{A}.$$

Dieser Widerspruch beendet den Beweis von Satz $3_0$.

Beweis von Satz 3. Wir fangen es mit der zweiten Behauptung an. Hierzu betrachten wir einen Ring $\mathrm{P}$ und nehmen zuerst an, daß $\mathrm{P}$ das Einselement $\varepsilon$ hat. Dann folgt aus (31) für jeden Doppelhomothetismus $a$ von $\mathrm{P}$:

$$a\varrho = a\varepsilon\varrho = (a\varepsilon)\varrho, \quad \varrho a = \varrho\varepsilon a = \varrho(\varepsilon a).$$

Andererseits gilt nach (32)

$$(\varepsilon a)\varepsilon = \varepsilon(a\varepsilon),$$

[42] Gilt nämlich $G = A \otimes B = A' \otimes B$, wobei $A, A', B$ Untergruppen der Gruppe $G$ sind, so gilt $A \approx A'$.

d. h. $a\varepsilon = \varepsilon a$. Hiernach ist $a$ gleich dem durch $a\varepsilon (= \varepsilon a)$ induzierten inneren Doppelhomothetismus von P.

Umgekehrt wenn P nur innere Doppelhomothetismen hat, so ist auch der identische ein solcher, woraus die Existenz eines Elementes $\alpha$ mit $\alpha\varrho = \varrho$, $\varrho\alpha = \varrho$ folgt. Dann ist $\alpha$ eben das Einselement von P. Somit haben wir die zweite Behauptung von Satz 3 bewiesen.

Die in der Mitte von Satz 3 erwähnten Folgerungen sind auch richtig, teils wegen Satz 1, teils weil die inneren Doppelhomothetismen paarweise befreundet sind.

Um die Behauptung „nur dann" von Satz 3 zu beweisen, nehmen wir im Ring P die Existenz des Einselementes $\varepsilon$ an und betrachten eine Schreiersche Erweiterung $\bar{\mathrm{P}}$ von P. Wir haben zu zeigen, daß P ein direkter Summand in $\bar{\mathrm{P}}$ ist. Für jedes Element $\bar{\alpha}$ von $\bar{\mathrm{P}}$ bilden die zwei Abbildungen

$$\varrho \to \bar{\alpha}\varrho, \quad \varrho \to \varrho\bar{\alpha}$$

einen Doppelhomothetismus von P. Folglich gibt es wegen der Annahme und des schon Bewiesenen ein $\alpha$ $(\in \mathrm{P})$ mit

$$\bar{\alpha}\varrho = \alpha\varrho, \quad \varrho\bar{\alpha} = \varrho\alpha. \tag{61}$$

Wegen der Annahme gilt auch $\mathrm{P}_* = 0$, folglich ist $\alpha$ eindeutig durch $\bar{\alpha}$ bestimmt. Schreibt man (61) in der form

$$(\bar{\alpha} - \alpha)\varrho = \varrho(\bar{\alpha} - \alpha) = 0,$$

so sieht man, daß

$$\bar{\alpha} = \alpha + \bar{\nu}$$

gilt, wobei $\bar{\nu} (\in \bar{\mathrm{P}})$ die Eigenschaft

$$\bar{\nu}\mathrm{P} = \mathrm{P}\bar{\nu} = 0 \tag{62}$$

hat. Die sämtlichen $\bar{\nu}$ mit der Eigenschaft (62) bilden ein Ideal $\mathfrak{n}$ von $\bar{\mathrm{P}}$ (den „Annullator von P in $\bar{\mathrm{P}}$"), das wegen der Annahme kein von 0 verschiedenes gemeinsames Element mit P hat. Wir haben gewonnen, daß $\bar{\mathrm{P}}$ die direkte Summe seiner Ideale P, $\mathfrak{n}$ ist, womit wir die Behauptung „nur dann" von Satz 3 bewiesen haben.

Um die letzte Behauptung von Satz 3 zu beweisen, betrachten wir einen Ring P und ein Holomorph $D \bullet \mathrm{P}$ von ihm, wobei $D$ ein maximaler Ring von befreundeten Doppelhomothetismen von P ist. Wir nehmen an, daß P als direkter Summand in $D \bullet \mathrm{P}$ enthalten ist, und dann haben wir zu beweisen, daß P das Einselement hat. Wegen der Annahme gibt es nach (43) und RÉDEI [6] Satz 6 eine Abbildung

$$a \to a'$$

von $D$ in P, wofür[43]

$$\left.\begin{aligned} a' + b' - (a+b)' = 0,\ a'b + ab' + a'b' - (ab)' = 0,\\ \alpha b + \alpha b' = 0,\ a\beta + a'\beta = 0, \end{aligned}\right\} \quad (a, b \in D;\ \alpha, \beta \in \mathrm{P}) \tag{63}$$

[43] Wir berichtigen den Druckfehler im zitierten Satz, wo nämlich in (74) für das erste $(ab)'$ richtig $(a+b)'$ stehen soll.

gelten. Aus ($63_{3,4}$) folgt, daß $D$ aus lauter inneren Doppelhomothetismen von $\mathsf{P}$ besteht. Da diese, wie erwähnt, mit jedem Doppelhomothetismus von $\mathsf{P}$ befreundet sind, so folgt aus der Maximaleigenschaft von $D$, daß $\mathsf{P}$ überhaupt nur innere Doppelhomothetismen haben kann. Nach dem oben bewiesenen Teil von Satz 3 bedeutet dies die Existenz des Einselementes in $\mathsf{P}$, womit wir die letzte Behauptung von Satz 3 bewiesen haben.

Da jedes Holomorph eine Schreiersche Erweiterung ist, so folgt hieraus auch schon die Behauptung „dann" von Satz 3, womit der Beweis dieses Satzes beendet ist.

## § 6. Weitere Anwendungen. Beispiele

Nach Satz 3 sind alle Ideale eines Ringes mit Einselement charakteristisch. Ein Gegenstück hierzu bildet ein neulich gefundener Satz von NAGATA [5],[44] der so lautet: Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal[45] in $\mathsf{P}$ und $\mathsf{P} \lhd \bar{\mathsf{P}}$, so gilt $\mathfrak{p} \lhd \bar{\mathsf{P}}$. Dieser Satz läßt sich nunmehr auch so aussprechen:

SATZ 4. *Die Primideale sind charakteristisch.*

Wir führen auf Grund von Satz 1 einen kurzen Beweis aus. Bezeichne $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathsf{P}$ und $a$ einen Doppelhomothetismus von $\mathsf{P}$. Im Fall $\mathfrak{p} = \mathsf{P}$ ist der Satz richtig, weshalb wir nur noch den Fall $\mathfrak{p} \neq \mathsf{P}$ zu betrachten brauchen. Wegen (32), ($31_1$) gilt $\mathsf{P}(a\mathfrak{p})$, $(a\mathfrak{p})\mathsf{P} \subseteqq \mathfrak{p}$, folglich gelten

$$\mathsf{P}(\mathfrak{p} + a\mathfrak{p}) \subseteqq \mathfrak{p}, \quad \mathfrak{p} + a\mathfrak{p} \lhd \mathsf{P}.$$

Aus diesen und der Annahme ergibt sich

$$\mathfrak{p} + a\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{p},$$

also $a\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{p}$. Ebenso folgt $\mathfrak{p}a \subseteq \mathfrak{p}$. Beide besagen nach Satz 1 die Richtigkeit von Satz 4.

Merkwürdig an Satz 4 ist, daß er (nach unserer Ansicht) überhaupt kein gruppentheoretisches Analogon hat. Nach beiden Sätzen 3, 4 scheinen die charakteristischen Unterringe eine häufigere Erscheinung zu sein als die charakteristischen Untergruppen.

Gibt es überhaupt Ideale, die nicht charakteristisch sind? Diese Frage bejahen wir mit einem Beispiel. Bezeichne $p$ eine Primzahl, $I$ den Ring der ganzen Zahlen. Die Polynome

$$p^2 f(x) + pxg(x) \qquad (f(x), g(x) \in I[x])$$

[44] S. auch STEINFELD [12]. Auch diese Arbeit von STEINFELD, die ich schon im Manuskript kannte, hat dem Entstehen meiner „Holomorphentheorie für Ringe" beigetan.

[45] Wie das neuerdings üblich ist, verstehen wir unter einem Primideal eines beliebigen Ringes $\mathsf{P}$ ein solches Ideal $\mathfrak{p}$ von $\mathsf{P}$, wofür aus $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteqq \mathfrak{p}$ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd \mathsf{P})$ stets $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ folgt. Die „Primideale im alten Sinn" nennt man heute (vollständig oder) komplett; diese werden bekanntlich durch die Eigenschaft definiert, daß aus $\alpha\beta \in \mathfrak{p}$ stets $\alpha \in \mathfrak{p}$ oder $\beta \in \mathfrak{p}$ folgt. Die kompletten Primideale sind ein Spezialfall der Primideale und für kommutative Ringe fallen beide Begriffe zusammen.

und

$$p^2h(x)+pxk(x^2) \qquad (h(x), k(x) \in I[x])$$

bilden je einen Unterring P bzw. P' von $I[x]$. Für diese gilt $P' \lhd P$, $P \lhd I[x]$ offenbar, dagegen gilt $P' \lhd I[x]$ nicht mehr. Hiernach ist P' in der Tat ein Ideal in P, das kein charakteristischer Unterring ist.

Wir beweisen den folgenden merkwürdigen Satz, der ebenfalls kein gruppentheoretisches Analogon zu haben scheint:

SATZ 5. *Alle Holomorphe eines kommutativen nullteilerfreien Ringes sind kommutativ.* (Vgl. Satz 6.)

Bezeichne nämlich P einen solchen Ring. Für jeden Doppelhomothetismus $a$ von P gilt nach (32) $(\alpha a)\alpha = \alpha(a\alpha)$, woraus nach der Annahme zuerst $\alpha(\alpha a) = \alpha(a\alpha)$, dann

$$\alpha a = a\alpha \tag{64}$$

folgt. (Hiernach besteht jetzt jeder Doppelhomothetismus von P aus zwei gleichen Endomorphismen von $P^+$.) Sind nun $a, b$ zwei befreundete Doppelhomothetismen von P, so folgt aus (18), (64), (35)

$$ab\alpha = a(b\alpha) = a(\alpha b) = (a\alpha)b = b(a\alpha) = ba\alpha,$$

d. h.

$$ab = ba. \tag{65}$$

Da nach ($43_2$) die Elemente eines Holomorphes von P nach der Regel

$$(a, \alpha)(b, \beta) = (ab, \alpha b + a\beta + \alpha\beta)$$

multipliziert werden, woraus auch

$$(b, \beta)(a, \alpha) = (ba, \beta a + b\alpha + \beta\alpha)$$

folgt, so zeigen (64), (65) die Richtigkeit von Satz 5.

Beispiele für Ringe mit mehr als einem Holomorph bilden die Zeroringe.[46] Es gilt nämlich der folgende:

SATZ 6. *Ein Zeroring* P *hat dann und nur dann nur ein Holomorph, wenn der volle Endomorphismenring von* $P^+$ *kommutativ ist.*[47] *Hat er mehrere Holomorphe, so gibt es darunter auch nichtkommutative.*

Wir schicken folgendes voran. Wegen der Annahme gilt $\alpha\beta = 0$ unbeschränkt, also sind (31), (32) identisch erfüllt. Folglich stimmen jetzt nach (30), (33) die Doppelhomothetismen von P mit denjenigen Doppelendomorphismen von $P^+$ überein, die aus zwei vertauschbaren Endomorphismen von $P^+$ bestehen.

Ist nunmehr der volle Endomorphismenring von $P^+$ kommutativ, so ist die Bedingung (35) auch erfüllt. Das bedeutet, daß jetzt alle Doppelhomothe-

[46] Zeroring bedeutet einen Ring P mit $P^2 = 0$ (d. h. $P_* = P$).

[47] Das interessante Problem, wann der volle Endomorphismenring eines Moduls kommutativ ist, haben SZELE u. SZENDREI [13] unlängst in Angriff genommen und teilweise gelöst. Nach ihren Resultaten gibt es verhältnismäßig sehr wenig Moduln dieser Art.

tismen von $P$ paarweise befreundet sind, d. h. einen Ring bilden, der dann der einzige maximale Doppelhomothetismenring von $P$ ist, folglich hat $P$ nur ein Holomorph.

Ist dagegen der volle Endomorphismenring von $P^+$ nichtkommutativ, so betrachten wir zwei nichtvertauschbare Endomorphismen $A, B$ von $P^+$. Bezeichne $a, b$ (nach obiger Bemerkung) die zwei Doppelhomothetismen von $P$, so daß beide Bestandteile von $a$ gleich $A$ und die von $b$ gleich $B$ sind. Diese $a, b$ sind nach (35) nichtbefreundet, gehören somit in zwei verschiedene maximale Ringe von befreundeten Doppelhomothetismen von $P$. Da durch sie zwei verschiedene Holomorphe von $P$ bestimmt sind, so haben wir die erste Hälfte von Satz 6 bewiesen.

Wird zu den vorigen $A, B$ je ein trivialer Endomorphismus 0 von $P^+$ hinzugenommen, so entstehen offenbar zwei befreundete Doppelhomothetismen $a = (A, 0)$, $b = (B, 0)$ von $P$, für die $ab \neq ba$ gilt. Diese sind also in einem nichtkommutativen maximalen Ring von befreundeten Doppelhomothetismen von $P$ enthalten. Durch diesen ist ein nichtkommutatives Holomorph von $P$ bestimmt, womit wir den Beweis von Satz 6 beendet haben.

Wir bemerken, daß selbstverständlich sich der Begriff der charakteristischen Reihen auf die Ringe übertragen läßt. Und zwar verstehe man unter einer *charakteristischen Reihe von* $P$ jede nicht verfeinbare endliche Folge

$$P = P_0, P_1, \ldots, P_r = 0,$$

in der $P_{i+1}$ ein echter Unterring von $P_i$ $(i = 0, \ldots, r-1)$ ist und $P_i \blacktriangleleft P$ $(i = 0, \ldots, r)$ gilt. Im wesentlichen handelt es sich also um die Kompositionsreihen der (additiven) Gruppe $P^+$, wenn man dieser die sämtlichen Doppelhomothetismen von $P$ als Operatoren zuordnet. Entsprechend lassen sich die bekannten Sätze von SCHREIER und JORDAN—HÖLDER anwenden.

Als Ergänzung zu den im § 1 erwähnten Analogien schreiben wir noch die folgenden (sehr starken) Analogien hin, auf die wir während unserer Betrachtungen gestoßen sind:

charakteristische Untergruppe von $\Gamma$ .·. charakteristischer Unterring von $P$,
Holomorph von $\Gamma$ .·. Holomorphe von $P$,
vollständige Gruppe .·. Ring mit Einselement,
charakteristische Reihe von $\Gamma$ .·. charakteristische Reihe von $P$.

*(Eingegangen am 3. Februar 1954.)*

## Literaturverzeichnis

[1] R. Baer, Absolute retracts in group theory, *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), S. 501—506.

[2] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématique*, première partie, Livre II: *Algèbre*, Chap. I (Paris, 1942), S. 1—165.

[3] C. I. Everett, An extension theory for rings, *American Journal of Math.*, **64** (1942), S. 363—370.

[4] L. Fuchs, A remark on the Jacobson radical, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1952), S. 167—168.

[5] M. Nagata, On the theory of radicals in a ring, *Journal of the Math. Soc. of Japan*, **3** (1951), S. 330—344.

[6] L. Rédei, Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14** (1952), S. 252—273.

[7] L. Rédei, Über gewisse Ringkonstruktionen durch schiefes Produkt, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), S. 185—189.

[8] L. Rédei, Die Anwendung des schiefen Produktes in der Gruppentheorie, *Journal f d. reine u. angew. Math.*, **188** (1950), S. 201—227.

[9] L. Rédei, Die Vollidealringe, *Monatshefte f. Math.*, **56** (1952), S. 89—95.

[10] L. Rédei, Vollidealringe im weiteren Sinn, I, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **3** (1952), S. 243—268.

[11] A. Speiser, *Die Theorie der Gruppen*, dritte Aufl. (Berlin, 1937).

[12] O. Steinfeld, Über Idealquotienten und Primideale, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **4** (1953), S. 289—298.

[13] T. Szele and J. Szendrei, On abelian groups with commutative endomorphism ring, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **2** (1951), S. 309—323.

[14] J. Szendrei, On rings admitting only direct extensions, *Publicationes Math. (Debrecen)*, **3** (1954), S. 180—182.

[15] Н. Г. Чеботарёв, Введение в теорию алгебр (Москва—Ленинград, 1949).

[16] H. Zassenhaus, *Lehrbuch der Gruppentheorie* (Leipzig und Berlin, 1937).

# ТЕОРИЯ ГОЛОМОРФОВ ГРУПП И КОЛЕЦ

Л. РЭДЭИ (Сегед)

(Резюме)

Целью настоящей работы является перенесение теории голоморфов групп (под которой автор разумеет часть теории групп, изучающую характеристические подгруппы и голоморф группы) в теорию колец. Теория голоморфов колец может быть построено в тесной аналогии с теорией голоморфов групп. Автор определяет характеристические подкольца как подкольца, являющиеся идеалами во всяком шрейеровом (эвереттовом) расширении кольца. В противоположность теории групп кольцо вообще может иметь несколько голоморфов. Голоморфы являются некоторыми специальными шрейеровыми расширениями данного кольца. Эти шрейеровы расширения безфакторны, и сами факторкольца, при помощи которых расширение происходит, суть кольца, составленные из некоторых пар отображений данного кольца. Эти пары отображений называются автором двойными гомотетизмами. Определяются они так: Возьмем любой элемент из любого шрейерового расширения данного кольца, и перемножим этим (фиксированным) элементом справа и слева элементы данного кольца. Таким образом получаем два отображения кольца в себя (являющиеся, конечно, специальными эндоморфизмами аддитивной группы кольца). Такие пары отображений и суть двойные гомотетизмы. Двойные гомотетизмы можно складывать и умножать по простым правилам, однако множество всех двойных гомотетизмов данного кольца вообще говоря не образует кольцо. Тем не менее из множества всех двойных гомотетизмов можно выбирать некоторые „максимальные“ подмножества, образующие кольцо. Именно эти „максимальные кольца двойных гомотетизмов“ и играют при вышеупомянутых шрейеровых расширениях роль факторколец. Интересная особенность теории голоморфов колец заключается в том, что простые идеалы (в частности вполне простые идеалы) так же как и все идеалы колец с единицей характеристичны. Вообще оказывается, что кольца с единицей играют в теории колец роль точных аналогов совершенных групп. Так, например, справедлива следующая теорема: Кольца с единицей и только они суть кольца, допускающие только прямые шрейеровы расширения. Эта теорема аналогична известной теоретико группо-вой теореме о том, что совершенные группы и только они содержатся в качестве прямого множителя во всяком их шрейеровом расширении. На основе этой аналогии можно сказать, что кольца с единицей играют по существу роль „совершенных колец“.