KREISÜBERDECKUNGEN DER HYPERBOLISCHEN EBENE

Von

L. FEJES TÓTH (Veszprém)

(*Vorgelegt von* G. HAJÓS)

In einer vorigen Arbeit[1] habe ich das Problem der dichtesten Kreislagerung auf Flächen konstanter Krümmung behandelt. Der vorliegende Aufsatz ist dem dualen Problem, nämlich dem Problem der dünnsten Kreisüberdeckung gewidmet.

Bekanntlich[2] ist die Dichte[3] eines Systems von kongruenten, die euklidische Ebene vollständig überdeckenden Kreisen

$$D \geqq \frac{2\pi}{\sqrt{27}} = 1{,}209\ldots.$$

Gleichheit wird in demjenigen Fall erreicht, wenn jeder Kreis durch die übrigen in den Ecken eines regulären Sechsecks geschnitten wird. Wir werden zeigen, daß in der hyperbolischen Ebene

$$D \geqq \frac{\sqrt{12}}{\pi} = 1{,}1026\ldots \tag{1}$$

gilt.[4] Die rechtsstehende Schranke läßt sich durch keine größere ersetzen. Dieses Resultat wird sich als Korollar einer allgemeinen Ungleichung ergeben, die auch gewisse frühere, bezüglich der Kreisüberdeckungen der Kugel erhaltene Ergebnisse[5] umfaßt und bei deren Formulierung unter einer Kugel der Krümmung k dem Vorzeichen von k entsprechend entweder eine gewöhnliche Kugelfläche vom Radius $1/\sqrt{k}$, oder die euklidische Ebene, oder die hyperbolische Ebene vom Parameter $\sqrt{-k}$ verstanden wird.

[1] Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 4 (1953), S. 103—110.

[2] Vgl. L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1953).

[3] Vgl. die unter [1] angeführte Arbeit.

[4] Im Sonderfall, daß jeder Flächenteil höchstens zweifach bedeckt ist, fand diese Ungleichung kurz vorher J. MOLNÁR.

[5] S. das unter [2] zitierte Werk.

Wird die Kugel der Krümmung k durch wenigstens drei kongruente Kreise vom Radius r überdeckt, so ist die Überdeckungsdichte

$$(2)\qquad D \geqq d(A) = \frac{\sqrt{12}\,\operatorname{ctg}\frac{\pi}{A} - 6}{A-6}; \quad d(6) = \lim_{A\to 6} d(A) = \frac{2\pi}{\sqrt{27}},$$

wobei A durch

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{A} = \sqrt{3}\cos\sqrt{k}\,r$$

definiert wird.

Schlagen wir um die Ecken eines regulären Dreiecks $\bar{\Delta}$ vom Umkreisradius r je einen Kreis vom Radius r, so ist $d(A)$ nichts anderes als die Dichte dieser Kreise in $\bar{\Delta}$ (Abb. 1). Ein Winkel von $\bar{\Delta}$ beträgt $2\pi/A$, sodaß A sich als die „Anzahl" derjenigen mit $\bar{\Delta}$ kongruenten Dreiecke interpretieren läßt, die sich um einen Punkt anlegen lassen. Es gilt den drei Fällen $k \gtreqless 0$ entsprechend $A \lesseqgtr 6$.

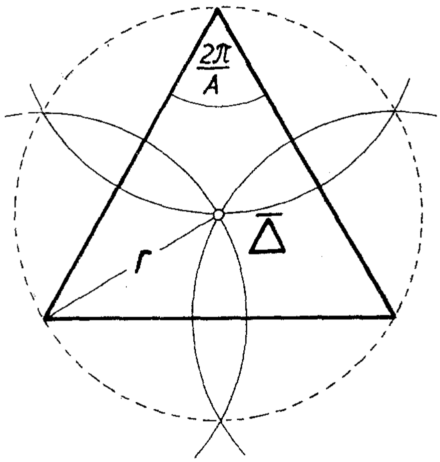

Abb. 1

Die Ungleichung (2) läßt sich für ganzzahlige Werte von $A \geqq 2$ nicht verbessern. Gleichheit besteht für das System der Flächenumkreise eines regulären Dreikantnetzes mit A-seitigen Flächen.

Es läßt sich zeigen, daß $d(A)$ mit wachsendem A ständig abnehmend dem Grenzwert $\sqrt{12}/\pi$ zustrebt (Abb. 2), sodaß D im Einklang mit (1) oberhalb dieses Grenzwertes bleibt. Werden aber zur Überdeckung auch Grenzkreise zugelassen, so kann in (1) auch Gleichheit zutreffen. Abb. 3 stellt die „absolut" dünnste Kreisüberdeckung der hyperbolischen Ebene im Poincaréschen Modell dar.

Wir können voraussetzen, daß die Kreismittelpunkte keinen Häufungspunkt besitzen, da sonst dem Kreissystem eine unendliche Dichte zugeschrieben werden könnte. Wir betrachten dasjenige, auf die Kreismittelpunkte aufgespannte Dreiecksnetz, das dadurch charakterisiert ist, daß die Dreiecksumkreise keine Ecken des Netzes in ihrem Inneren enthalten[6] (Abb. 4).

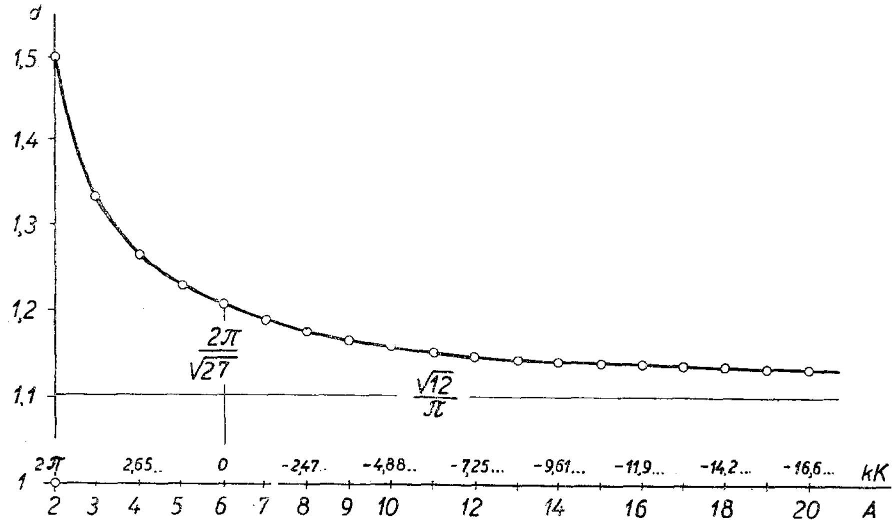

Abb. 2

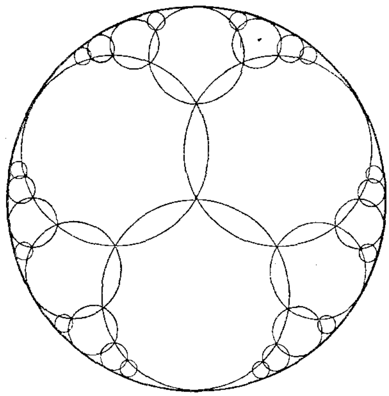

Abb. 3

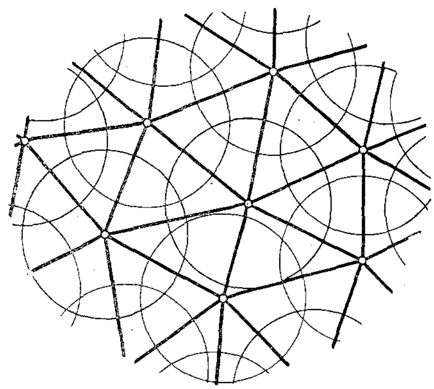

Abb. 4

Jeder Kreis wird durch die von seinem Mittelpunkt ausstrahlenden Kanten dieses Netzes in Kreisausschnitte zerlegt. Wir wollen bei der Berechnung der Dichte in einem Dreieck Δ die durch die Dreiecksseiten bestimmten drei Kreisausschnitte auch dann bei Δ in Betracht nehmen, wenn diese aus Δ herausragen. Wir denken also die eventuell herausragenden Kreisteile vom Kreis abgeschnitten und auf Δ gelegt. Nach einer anderen, mit der vorigen

[6] S. den unter [1] zitierten Aufsatz.

gleichbedeutenden Vorstellung können wir uns die „Massen" der Kreise auf konzentrische Kreisscheiben konzentriert denken, die in der Vereinigungsmenge der im betreffenden Kreismittelpunkt zusammentreffenden Dreiecke liegen. Dann ist die Dichte des Kreissystems in Δ

$$\frac{\sigma}{2\pi}K:\Delta,$$

wo σ die Winkelsumme von Δ und K den Inhalt eines Kreises bedeutet.[7]

Wir machen jetzt von der definierenden Eigenschaft des Netzes Gebrauch, nach der kein Kreismittelpunkt im Inneren des Umkreises von Δ liegt. Da andererseits der Umkreismittelpunkt sicher in einem Kreis unseres Systems enthalten ist, so läßt sich schließen, daß der Umkreisradius von Δ nie größer als r sein kann. Folglich gilt (nach einer wohlbekannten, in der sphärischen, euklidischen und hyperbolischen Geometrie gleichfalls gültigen Maximaleigenschaft des regulären Dreiecks)

$$\Delta \leqq \bar{\Delta}.$$

Wir haben daher mit Rücksicht auf $k\Delta = \sigma - \pi$

$$\frac{\sigma}{2\pi}K:\Delta = \frac{K}{2\pi}\left(k+\frac{\pi}{\Delta}\right) \geqq \frac{K}{2\pi}\left(k+\frac{\pi}{\bar{\Delta}}\right) = d(A).$$

Damit ist gezeigt, daß die Dichte des Kreissystems mit der obigen Vereinbarung in jedem Dreieck $\geqq d(A)$ ist.[8] Dasselbe gilt dann auch für die Überdeckungsdichte bezüglich der ganzen Kugel, wenn diese als irgendein Mittelwert der Dichten $\frac{\sigma}{2\pi}K:\Delta$ definiert wird.

(Eingegangen am 16. März 1953.)

[7] Δ und $\bar{\Delta}$ bezeichnen zugleich die Inhalte der Dreiecke.

[8] Diese Ungleichung gilt wahrscheinlich auch dann, wenn bei der Berechnung der Dichte in Δ nur die tatsächlich in Δ enthaltenen Kreisteile berücksichtigt werden. Jedenfalls läßt sich durch unsere Vereinbarung der Beweis dieser Vermutung ersparen.

ПОКРЫТИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ КРУГАМИ

Л. ФЕЕШ ТОТ (Веспрем)

(Резюме)

Автор даёт неравенство для плотности одинаковых кругов, покрывающих шар, эвклидовую или гиперболическую плоскость, откуда следует, что эта плотность во всех случаях $\geqq \frac{\sqrt{12}}{\pi}$. Равенство достигается для покрывающих гиперболическую плоскость орициклов, расположенных в определённом порядке.