ÜBER EIN PROBLEM VON K. ZARANKIEWICZ

Von

I. REIMAN (Budapest)

(*Vorgelegt von* P. TURÁN)

1. K. ZARANKIEWICZ stellte die folgende Frage: Es sei A_n eine Matrix mit n Zeilen und n Spalten, dessen Elemente nur 0-en und 1-er sind. Mindestens wieviel 1-er muß A_n enthalten, damit darin gewiß ein aus lauter 1-ern bestehender Minor zweiter Ordnung M_2 vorhanden sei [1].

Wir bezeichnen mit $k_2(n)$ die kleinste Zahl der 1-er, bei welcher A_n schon gewiß wenigstens einen Minor M_2 enthält. S. HARTMAN, J. MYCIELSKI und C. RYLL-NARDZEWSKI [2] haben

$$c_1 n^{4/3} < k_2(n) < c_2 n^{3/2}$$

bewiesen, wo c_1 und c_2 Konstanten sind. T. KŐVÁRI, VERA T. SÓS und P. TURÁN [3] haben

$$k_2(n) < 1 + 2n + [n^{3/2}] \tag{1.1}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_2(n)}{n^{3/2}} = 1$$

bewiesen.

Es sei $A_{n_1 n_2}$ eine Matrix mit n_1 Zeilen und n_2 Spalten, dessen Elemente nur 0-en und 1-er sind, und sei $k_2(n_1, n_2)$ die kleinste Anzahl der 1-er, bei welcher $A_{n_1 n_2}$ schon einen Minor M_2 enthalten muß. In [3] ist für $n_1 = p^2 + p$, $n_2 = p^2$ (p prim)

$$k_2(p^2+p, p^2) = p^2(p+1) + 1 \tag{1.2}$$

bewiesen werden.

Im folgenden beweisen wir unter Anwendung des in [3] benützten Gedankenganges, daß

$$k_2(n_1, n_2) \leqq \frac{1}{2}\left(n_1 + \sqrt{n_1^2 + 4n_1 n_2 (n_2 - 1)}\right) + 1 \tag{1.3}$$

ist, was bei $n_1 = n_2 = n$ in die Ungleichung

$$k_2(n) \leqq \frac{1}{2}\left(n + n\sqrt{4n-3}\right) + 1 \tag{1.4}$$

übergeht. Dies ist etwas genauer als (1.1). Mit Hilfe geometrischer Überlegungen geben wir schließlich unendlich viele solche Wertepaare (n_1, n_2) bzw. Werte n an, bei welchen in (1. 3) bzw. in (1. 4) Gleichheit zutrifft.

2. Zum Beweise von (1. 3) führen wir

$$s=\frac{1}{2}\left(n_1+\sqrt{n_1^2+4n_1n_2(n_2-1)}\right) \tag{2.1}$$

ein, das die Gleichung

$$(s-n_1)s=n_1n_2(n_2-1) \tag{2.2}$$

erfüllt. Wir bezeichnen durch l_ν die Anzahl der 1-er in der ν-ten Zeile von $A_{n_1n_2}$ und nehmen an, daß für die Anzahl der 1-er in $A_{n_1n_2}$ die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu > s \tag{2.3}$$

gilt. Wir beweisen, daß unter dieser Voraussetzung ein Minor M_2 aus $A_{n_1n_2}$ auswählbar ist.

Es seien $m_1, m_2, \ldots, m_{l_\nu}$ die Indizes der die 1-er der ν-ten Zeile enthaltenden Spalten. Aus diesen können $\binom{l_\nu}{2}$ Zahlenpaare ausgewählt werden. Die Gültigkeit der Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n_1}\binom{l_\nu}{2} > \binom{n_2}{2} \tag{2.4}$$

ist eine hinreichende Bedingung dafür, daß $A_{n_1n_2}$ einen Minor M_2 enthält. Für die nichtnegativen l_ν besteht die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu^2 \geqq \frac{1}{n_1}\left(\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu\right)^2,$$

und folglich ist

$$\sum_{\nu=1}^{n_1}\binom{l_\nu}{2} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu^2 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu \geqq \frac{1}{2n_1}\left(\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu.$$

Hieraus ergibt sich wegen (2. 3) und (2. 2)

$$\sum_{\nu=1}^{n_1}\binom{l_\nu}{2} \geqq \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu\left(\frac{1}{n_1}\sum_{\nu=1}^{n_1} l_\nu - 1\right) > \frac{s}{2}\cdot\frac{s-n_1}{n_1} = \frac{n_2(n_2-1)}{2} = \binom{n_2}{2},$$

womit wir (1. 3) bewiesen haben.

3. Wir nennen die Matrix $A_{n_1n_2}$ gesättigt, wenn aus ihr einerseits kein Minor M_2 auswählbar ist, andererseits aber dies ermöglicht wird, sobald man die Anzahl ihrer 1-er mit Eins vermehrt. Es ist offenbar, daß jede Matrix

$A_{n_1 n_2}$ gesättigt ist, aus der kein Minor M_2 auswählbar ist, und dabei die Anzahl ihrer 1-er gleich $[s]$ ist. Ist in einem solchen Falle s ganz, so gilt für das entsprechende Wertepaar (n_1, n_2) in (1. 3) das Gleichheitszeichen, d. h. es ist

$$k_2(n_1, n_2) = \frac{1}{2}\left(n_1 + \sqrt{n_1^2 + 4n_1 n_2(n_2 - 1)}\right) + 1. \tag{3. 1}$$

Um gesättigte Matrizen zu konstruieren, betrachten wir den r-dimensionalen endlichen projektiven Raum über einem endlichen Körper der Ordnung

$$N = p^\alpha \qquad (p \text{ prim}).$$

Die Punkte dieses Raumes sind die aus Körperelementen bestehenden $r+1$-tupeln $(x_1, x_2, \ldots, x_{r+1})$ (nicht alle x_i gleich 0). Die Punkte $\mathbf{x}(x_1, x_2, \ldots, x_{r+1})$ und $\mathbf{y}(y_1, y_2, \ldots, y_{r+1})$ sind dann und nur dann identisch, wenn es ein Körperelement λ gibt, für welches

$$x_i = \lambda y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r+1)$$

gilt. Die Menge der Punkte

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_{t+1} \mathbf{a}_{t+1} \qquad (t < r)$$

wird als t-dimensionaler Unterraum bezeichnet, wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{t+1}$ Körperelemente und $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{t+1}$ linear unabhängige Punkte des Raumes sind. Die eindimensionalen Unterräume heißen Geraden. Eine beliebige Gerade des r-dimensionalen Raumes befindet sich entweder gänzlich in einem bestimmten $r-1$-dimensionalen Unterraum, oder hat mit ihm genau einen Punkt gemein. Zu zwei Punkten gehört eine und nur eine Gerade und zwei Geraden können höchstens einen gemeinsamen Punkt besitzen.

Jede Gerade hat $N+1$ Punkte. Ein t-dimensionaler Unterraum kann gewonnen werden, indem man jeden Punkt eines $t-1$-dimensionalen Unterraumes mit einem nicht zugehörigen Punkt verbindet; die Gesamtheit der Punkte der Verbindungsgeraden bildet einen t-dimensionalen Unterraum. So kann man, z. B. durch vollständige Induktion, einsehen, daß die Punkteanzahl des t-dimensionalen Unterraumes

$$\frac{N^{t+1} - 1}{N - 1},$$

und die Punkteanzahl n_2 des r-dimensionalen projektiven Raumes

$$n_2 = \frac{N^{r+1} - 1}{N - 1} \tag{3. 2}$$

ist. Es sei nun n_1 die Geradenanzahl des r-dimensionalen Raumes. Mit Rücksicht darauf, daß jede Gerade $N+1$ Punkte hat, gilt

$$(3.3) \qquad n_1 = \binom{n_2}{2} : \binom{N+1}{2} = \frac{(N^{r+1}-1)(N^r-1)}{(N^2-1)(N-1)}.$$

Wir konstruieren nun die Inzidenzmatrix $I_{n_1 n_2}$ der Geraden und Punkte des Raumes. Die Zeilen von $I_{n_1 n_2}$ entsprechen den Geraden und die Spalten den Punkten. Ein Element der Martix ist genau dann gleich 1, wenn die seiner Zeile entsprechende Gerade den seiner Spalte entsprechenden Punkt enthält. Die so gewonnene Matrix ist gesättigt, d. h. es kann aus ihr kein Minor M_2 ausgewählt werden, da dies bedeuten würde, daß zwei Geraden zwei verschiedene gemeinsame Punkte haben. Ferner ist die Anzahl der in $I_{n_1 n_2}$ befindlichen 1-er $n_1(N+1)$, da in jeder Zeile $N+1$ 1-er sind. Diese Anzahl ist genau der unseren in (3. 3) und (3. 2) angegebenen Werten n_1, und n_2 laut (2. 1) entsprechende Wert s, wie dies durch Einsetzen leicht bestätigt werden kann. Damit haben wir das Bestehen von (3. 1) bewiesen.

Ist $r=2$, dann ist

$$(3.4) \qquad n_1 = n_2 = n = N^2+N+1 = p^{2\alpha}+p^\alpha+1.$$

In diesem Falle gilt also

$$(3.5) \qquad k_2(n) = \frac{1}{2}\left(n+n\sqrt{4n-3}\right)+1.$$

Gesättigte Inzidenzmatrizen werden auch durch r-dimensionale endliche affine Räume geliefert. Läßt man aus dem r-dimensionalen projektiven Raum einen $r-1$-dimensionalen Unterraum weg, so erhält man einen r-dimensionalen affinen Raum. Auf Grund obiger Überlegungen gilt für die Geradenanzahl n_1 bzw. Punkteanzahl n_2 des r-dimensionalen affinen Raumes

$$(3.6) \qquad n_1 = \frac{N^{r-1}(N^r-1)}{N-1}, \qquad n_2 = N^r.$$

Die Anzahl der Punkte auf jeder Geraden ist nun gleich N. Die Matrix $I_{n_1 n_2}$ hat somit $n_1 N$ 1-er, und das ist wiederum der durch (2. 1) angegebene Wert s, was durch Einsetzen der Werte (3. 6) bestätigt werden kann. Laut (3. 1) gilt dann in diesem Falle

$$(3.7) \qquad k_2(n_1, n_2) = \frac{N^r(N^r-1)}{N-1}+1.$$

Ist $N=p, r=2$, so ergibt (3. 7) eben das Ergebnis (1. 2).

Endlich sei als Beispiel die Inzidenzmatrix des zweidimensionalen projektiven Raumes, d. h. der projektiven Ebene mit 5 Punkten auf jeder Geraden, also der Spezialfall $N=2^2, r=2, n=21$ angegeben. Die gestrichelt abgegrenzte Teilmatrix ist die Inzidenzmatrix der affinen Ebene mit 4 Punkten auf jeder Geraden.

$$
\left(\begin{array}{ccccc|cccccccccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot
\end{array}\right)
$$

(Eingegangen am 6. März 1958.)

Literaturverzeichnis

[1] K. Zarankiewicz, Problème 101, *Coll. Math.*, **2** (1951), S. 301.

[2] S. Hartman, J. Mycielski et C. Ryll-Nardzewski, Systèmes spéciaux de points à coordonnées entières, *Coll. Math.*, **3** (1954), S. 84—85. (Bericht über die Tagung der Poln. Math. Gesellschaft in Wroclaw am 20. September 1951.)

[3] T. Kővári, Vera T. Sós and P. Turán, On a problem of K. Zarankiewicz, *Coll. Math.*, **3** (1954), S. 50—57.