

AUSFÜLLUNGEN DER HYPERBOLISCHEN EBENE DURCH KONGRUENTE HYPERZYKELBEREICHE

von

I. VERMES (Budapest)

Dem Andenken von Herrn Prof. P. SZÁSZ gewidmet

L. FEJES TÓTH beschäftigte sich in seinen Arbeiten [1] und [2] bzw. [3] (S. 224–238) mit den Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene und mit der dichtesten Horozyklenlagerung. Die Frage unserer Arbeit ist naheliegend, wie die kongruenten Hyperzykelbereiche in der hyperbolischen Ebene ihre dichteste Lagerung bilden können.

Man versteht unter einem *Hyperzykel* (oder einer *Abstandslinie* bzw. *Äquidistante*) die Gesamtheit derjenigen Punkte der Ebene, die von einer Geraden gleichen Abstand l haben, und alle auf derselben Seite von ihr gelegen sind. Die beiden kongruenten Äquidistanten auf verschiedenen Seiten von der Geraden (d. h. der *Grundlinie*) begrenzen einen Teil der Ebene, der als Hyperzykelbereich vom Abstand l heißt.

Betrachten wir ein System $\{H_i\}_l$ von nicht übereinandergreifenden kongruenten Hyperzykelbereichen vom Abstand l . Wir können voraussetzen, daß unser System $\{H_i\}_l$ gesättigt ist, d. h. daß jeder Hyperzykelbereich der Ebene gemeinsame innere Punkte mit einem Hyperzykelbereich von $\{H_i\}_l$ aufweist.

Zerlegen wir die Ebene in die Dirichletschen Zellen des Systems der Hyperzykelbereichen $\{H_i\}_l$. Die Dirichletschen Zellen der Hyperzykelbereiche sind auch eindeutig bestimmt, wie im Falle eines Systems von nicht-übereinandergreifenden Kreisen, nämlich der Begriff der Potenzlinie zweier Äquidistanten kann ebenso, wie für die Kreise definiert werden. Unter der Potenzlinie zweier Äquidistanten versteht man die Gesamtheit derjenigen Punkte, aus denen die gleichen Tangenten zu den Äquidistanten gezogen werden können. Diese Gesamtheit ist eine Gerade, und die Potenzlinie zweier kongruenter Äquidistanten ist die Symmetrieachse ihrer Grundlinien. Die Eckpunkte der Dirichletschen Zellen können nur die eigentlichen Punkte bzw. die Enden — im Sinne von Hilbert — der hyperbolischen Ebene sein. Falls

AMS (MOS) subject classifications (1979). Primary 52A45; Secondary 52A40.

Key words and phrases. Packing, covering, tiling, inequalities and extremum problems, convex sets and related geometric topics.

die zu einem »Eckpunkt« der Dirichletschen Zellen gehörigen Seiten — als Geraden — ein gemeinsames Lot hätten, so wäre das System $\{H_i\}_1$ offenbar nicht gesättigt, was aber unseren Voraussetzungen widerspricht.

Nehmen wir jetzt die zu den Dirichletschen Zellen gehörige duale Zerlegung der hyperbolischen Ebene. In dieser Zerlegung gehört je ein rechtwinkliges Vieleck zu jedem Eckpunkt der Dirichletschen Zellen, dessen Seiten einerseits die gemeinsamen Lote der Grundlinien der Abstandslinien sind, deren Potenzlinien in diesem Eckpunkt sich treffen; andererseits gehören die

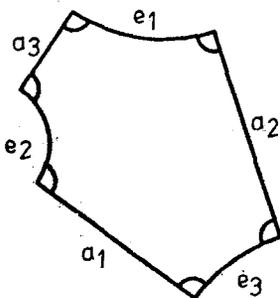


Fig. 1

Strecken zu den Seiten dieses Vieleckes, die zwischen den Fußpunkten der gemeinsamen Lote auf den Grundlinien liegen. Die Seite eines solchen Vieleckes liegen abwechselnd auf den Grundlinien bzw. auf ihren gemeinsamen Loten. Ein solches Vieleck kann durch das Ziehen weiterer gemeinsamer Lote der zu ihm gehörigen Grundlinien in rechtwinklige Sechsecke zerlegt werden. Betrachten wir die Zerlegung der hyperbolischen Ebene auf solche Weise in rechtwinklige Sechsecke, in welchen wir die Dichte der Einlagerung untersuchen wollen. Ein solches Sechseck hat drei Seiten a_1, a_2, a_3 , die zu den Grundlinien gehören, und die weiteren ihnen gegenüberliegenden Seiten e_1, e_2, e_3 sind die gemeinsamen Lote dieser Grundlinien. Der Flächeninhalt jedes Sechseckes ist gleich $k^2\pi$, wobei k die Konstante der hyperbolischen Ebene ist (Fig. 1).

Es soll noch für alle Sechsecke bewiesen werden, daß die zu den Seiten a_1, a_2, a_3 gehörigen Bogen der Abstandslinien im Inneren des Sechseckes liegen.

Setzen wir voraus, daß ein Sechseck existiert, dessen Seite e_1 die zu der Seite a_1 gehörige Abstandslinie H_{11} schneidet, und die Potenzlinien der H_{11} und der zu den Seiten a_2 bzw. a_3 gehörigen Abstandslinien sich in einem eigentlichen Punkt P treffen (Fig. 2). (Falls diese Potenzlinien zueinander parallel wären, so kann diese Voraussetzung auf ähnliche Weise zu einem Widerspruch führen.)

Fallen wir die Lote b_2 und b_3 aus dem Punkt P auf die Grundlinien a_2 bzw. a_3 , und betrachten wir die winkelhalbierende Gerade h von ihnen. Die Gerade h und die Seite e_1 schneiden sich rechtwinklig. Jetzt drehen wir um

den Punkt P die Grundlinie a_3 und die Abstandslinie H_{3l} bis zur Berührung der Abstandslinien H_{1l} und H_{3l} . In dieser neuen Lage seien a_3, b_3 und H_{3l} mit a'_3, b'_3 und H'_{3l} bezeichnet. Gleichzeitig wurde die Gerade h in h' gedreht, folglich schneiden h' und e_1 sich unter einem spitzen Winkel α . Daraus folgt, daß die Seite e'_1 in dieser neuen Lage zwischen den Geraden e_1 und e_2 liegt. Bei der ähnlichen Drehung von H_{2l} und a_2 muß die Seite e'_1 zwischen den Geraden e'_1 und e'_3 liegen, folglich schneiden e'_1 und e'_1 die Abstandslinie H_{1l} .

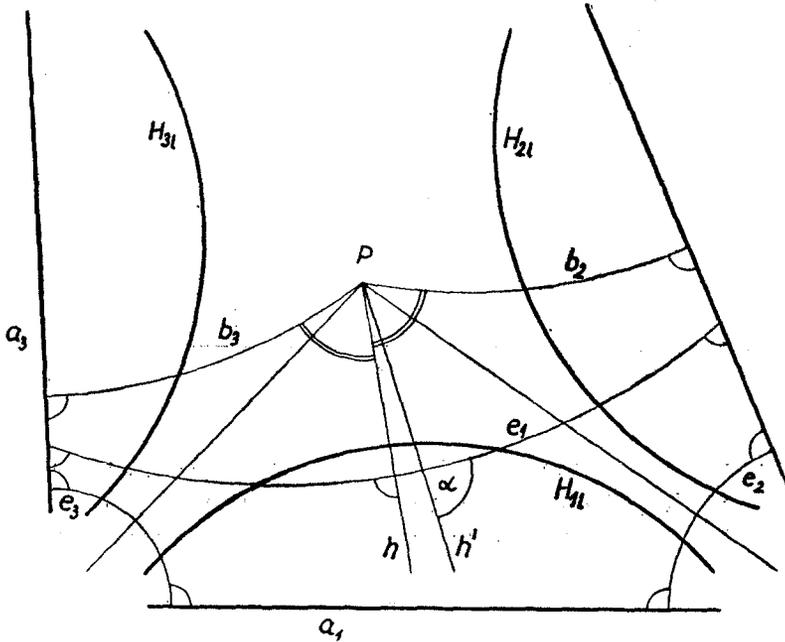


Fig. 2

Wir haben eine Konfiguration bekommen, in der zwei Abstandslinien H'_{2l} und H'_{3l} die Abstandslinie H_{1l} berühren, die gemeinsamen Tangenten sich schneiden (eventuell zueinander parallel sind), und das gemeinsame Lot e'_1 der Grundlinien a'_2 und a'_3 die Abstandslinie H_{1l} schneidet. Wir zeigen, daß diese Konfiguration nicht existieren kann.

Betrachten wir zwei Abtsandlinien H_{2l}, H_{3l} , die die dritte Abstandslinie H_{1l} berühren, und das gemeinsame Lot e_1 der Grundlinien a_2 und a_3 sei eine Tangente der Abstandslinie H_{1l} (Fig. 3). Spiegeln wir diese Konfiguration an die Gerade e_1 , so gehen H_{2l} und H_{3l} bzw. a_2 und a_3 in sich selbst, und H_{1l}, a_1 in H_{1l}^*, a_1^* , wobei H_{1l}^* alle drei Abstandslinien berührt. Zu der Abstandslinien H_{1l}, H_{2l}, H_{3l} bzw. $H_{1l}^*, H_{2l}^*, H_{3l}^*$ gehören zwei rechtwinklige Sechsecke, die durch die Potenzlinien von ihnen in je drei kongruente Fünfecke zerlegt sind. Daraus folgt, daß die gemeinsamen Tangenten von H_{1l} und H_{2l} bzw. H_{1l} und H_{3l} ein gemeinsames Lot haben, und es die Gerade a_1^* ist.

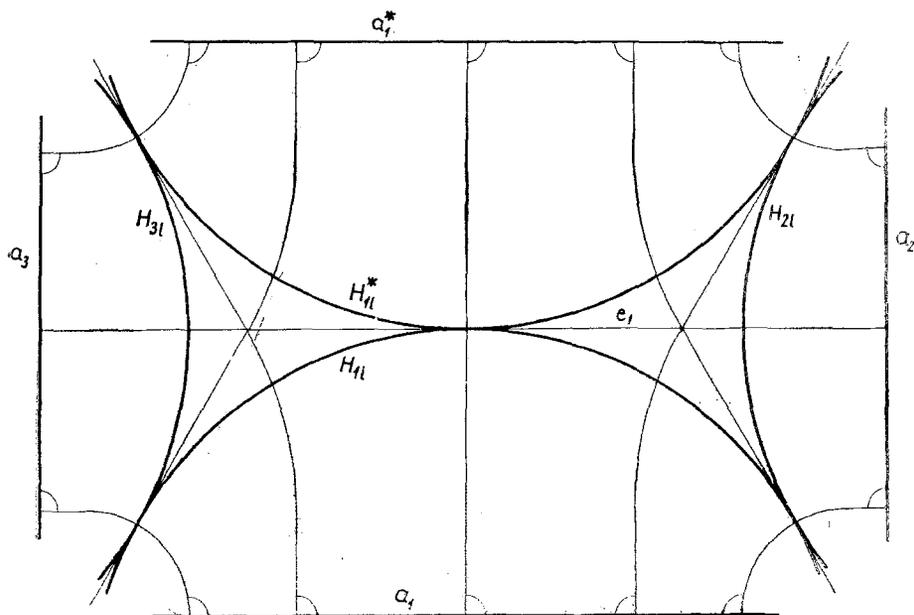


Fig. 3

Falls man die Gerade e_1 zu der Grundlinie a_1 bewegt, so müssen die Abstandslinien H_{2l} und H_{3l} sich voneinander offenbar entfernen, folglich entfernen auch die gemeinsamen Tangenten sich voneinander, deswegen haben sie ein gemeinsames Lot. Also erhalten wir einen Widerspruch.

Betrachten wir ein willkürliches Element S der Zerlegung, und die zu ihm gehörigen drei Hyperzyklen vom Abstand l (Fig. 4). Der Flächeninhalt¹

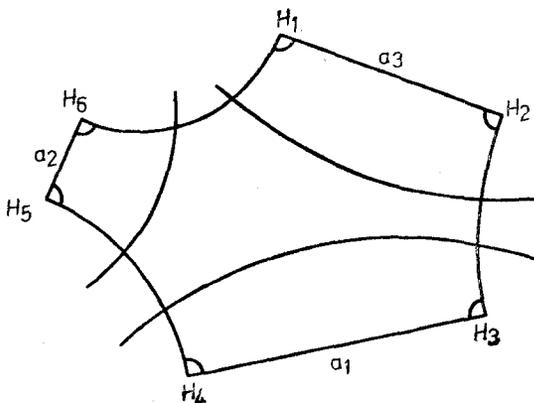


Fig. 4

¹ S. z.B. [4], S. 95.

ist zwischen der Strecke a_i und der zu ihr gehörigen Äquidistante vom Abstand l :

$$ka_i \operatorname{sh} \frac{l}{k}.$$

Die Dichte² der Hyperzykelbereiche ist in einem Sechseck S

$$(1) \quad d = \frac{\operatorname{sh} \frac{l}{k} \sum_{i=1}^3 a_i}{k\pi},$$

Natürlich ist $e_i \geq 2l$ ($i = 1, 2, 3$).

Wir bemerken noch, daß die folgenden »trigonometrischen« Beziehungen gelten, falls benutzt man³ die Bezeichnungen der Fig. 1 bzw. der Fig. 4:

$$(2) \quad \frac{\operatorname{sh} \frac{a_1}{k}}{\operatorname{sh} \frac{e_1}{k}} = \frac{\operatorname{sh} \frac{a_2}{k}}{\operatorname{sh} \frac{e_2}{k}}$$

und

$$(3) \quad \operatorname{ch} \frac{a_1}{k} = \frac{\operatorname{ch} \frac{e_1}{k}}{\operatorname{sh} \frac{e_2}{k} \operatorname{sh} \frac{e_3}{k}} + \operatorname{cth} \frac{e_2}{k} \operatorname{cth} \frac{e_3}{k}.$$

Daraus folgt, daß in einem rechtwinkligen Sechseck $a_i > a_j$ gilt, falls $e_i > e_j$ besteht, und umgekehrt. Man sieht leicht, daß irgendwelche drei Seiten des Sechseckes es eindeutig bestimmen.

Jetzt betrachten wir ein rechtwinkliges Sechseck Σ , in dem $e_1 = e_2 = e_3 = 2l$, ist, und folglich $a_1 = a_2 = a_3 = a$ besteht. Die zum Σ gehörigen Hyperzyklen berühren sich paarweise (Fig. 5). Die gemeinsamen Tangenten dieser Hyperzyklen schneiden sich im Punkt O , und zerlegen das Sechseck Σ in drei kongruente Teile. Jeder Teil ist in zwei kongruente Lambertsche Vierecke zerlegbar. Ein solches Viereck ist in der Fig. 5 mit $OABC$ bezeichnet, wo $\sphericalangle AOC = \pi/3$ ist. Auf Grund der trigonometrischen Beziehungen der Lambert-

² Man erklärt die Dichte eines Bereichs Systems S_i in einem Bereich B durch den Quotient $(\Sigma(B \cap S_i))/B$, wo $B \cap S_i$ den Inhalt des Durchschnittes von B und S_i bedeutet.

³ S.z.B. [5] § 4.8, S. 39–40; bzw. Aufgabe 130, S. 63.

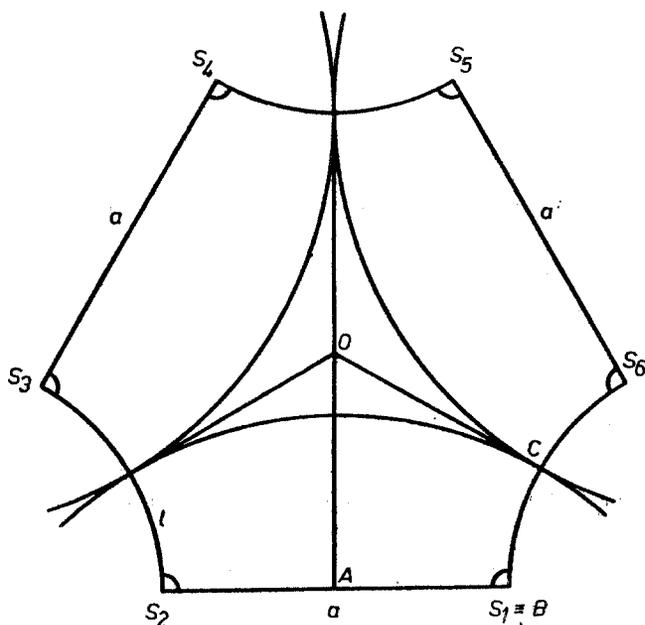


Fig. 5

schen Vierecke⁴ ergibt sich die folgende Beziehung für das Viereck $OABC$:

$$\operatorname{sh} \frac{AB}{k} = \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{l}{k}} \cos \frac{\pi}{3}.$$

Weil $2AB = a$ ist, also besteht

$$a = 2k \operatorname{arsh} \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{l}{k}},$$

und so ist die Dichte der Hyperzykelbereichen im Sechseck Σ :

$$(4) \quad d(l) = \frac{6 \operatorname{sh} \frac{l}{k} \operatorname{arsh} \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{l}{k}}}{k\pi}.$$

Wir beweisen den folgenden SATZ:

Zu einer beliebig vorgegebenen Lagerung von kongruenten nicht übereinandergreifenden Hyperzykelbereichen läßt sich stets eine Zerlegung der hyperbolischen Ebene in rechtwinklige Sechsecke so angeben, daß die Dichte der Hyper-

⁴ S.z.B. [4] § 10 und § 15 (S. 37–40 bzw. S. 71–78).

zykelbereichen in jedem Sechseck

$$d \leq d(l)$$

ausfällt.

Aus (1) und (4) ist es zu sehen, daß wir die Ungleichung $\sum_{i=1}^3 a_i \leq 3a$ (die Gleichheit besteht nur im Falle $e_i = 2l, i = 1, 2, 3$) zum Beweis unserer Behauptung ableiten sollen.

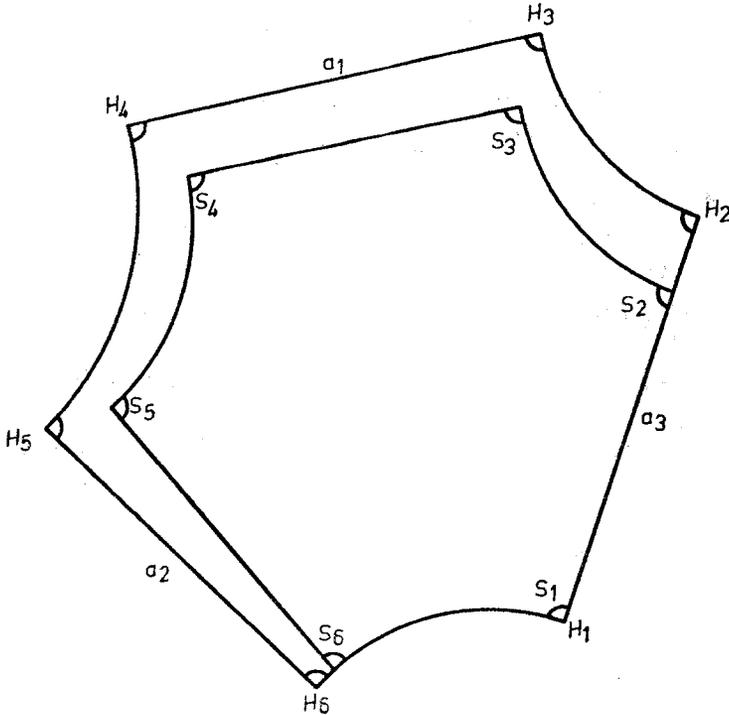


Fig. 6

Untersuchen wir die Summe der Seiten a_i der rechtwinkligen Sechsecke S , falls $e_i = 2l$ ($i = 1, 2, 3$) ist. Es ist klar, daß nicht alle drei Seiten a_i größer als a sein können, denn das Sechseck Σ könnte im Inneren eines solchen Sechseckes S eingelagert werden. Das ist aber unmöglich, weil die Sechsecke Σ und S gleichen Flächeninhalt haben.

Wir beweisen, daß nur eine der drei Strecken a_i größer als a sein kann, und die beiden anderen müssen in diesem Falle kleiner als a sein. Setzen wir voraus, daß die zwei Seiten z. B. a_3 und a_2 des Sechseckes S größer als a sind, und folglich ist $a_1 < a$. (Die Ecken von S seien mit $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$ bezeichnet). Legen wir das Sechseck Σ — dessen Ecken mit $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ bezeichnet sind — auf das Sechseck S so, daß H_1 und S_1 übereinstimmen, und die Seite $S_1S_2 = a$ in der Seite $H_1H_2 = a_3$ liegt (Fig. 6). In diesem Falle

ist S_6 entweder ein Punkt der Strecke H_1H_6 , oder S_6 und H_6 stimmen überein. Wenn S_6 ein Punkt der Strecke H_1H_6 ist, so liegen die Ecken S_5 und S_3 offenbar im Sechseck S . Es ist leicht, zu sehen, daß die Halbgeraden S_3S_4 bzw. S_5S_4 die Geraden H_3H_4 bzw. H_5H_4 in den Halbebenen, die das Sechseck Σ enthalten und durch die Geraden der Seiten S_2S_3 bzw. S_5S_6 bestimmt sind, nicht schneiden, folglich liegt der Punkt S_4 im Inneren des Sechseckes S . Wenn aber S_6 und H_6 übereinstimmen, so auch ergibt, es sich, daß das Sechseck S enthält das Sechseck Σ , was offenbar unmöglich ist. Auf ähnliche Weise ist beweisbar, daß im Falle $a_3 > a$ die Gleichungen $a_1 = a_2 = a$ bzw. die Gleichung $a_2 = a$ und die Ungleichung $a_1 < a$ sich nicht erfüllen können. Also müssen $a_1 < a$ und $a_2 < a$ sein, falls $a_3 > a$ ist. Für ein solches Sechseck S wird die Ungleichung $\sum_{i=1}^3 a_i \leq 3a$ bewiesen. Der Beweis zeigt gleichzeitig, daß die Sechsecke S und Σ kongruent im Falle der Gleichheit sind.

Setzen wir voraus, daß $a_3 > a$ und $a > a_2 > a_1$, ferner wegen (2) $e_3 > e_2 > e_1 \geq 2l$ sind.

Betrachten wir die Abstandslinie durch den Punkt H_3 vom Abstand e_2 , deren Grundlinie die Gerade H_1H_2 ist, und die die Seite H_4H_5 schneidende Abstandslinie vom Abstand e_2 , deren Grundlinie die Gerade H_5H_6 ist. Nehmen wir die gemeinsame Tangente beider Abstandslinien, die in derselben Halbebene, wie das Sechseck S in Bezug auf der Gerade H_1H_6 liegt (Fig. 7). Die Berührungspunkte sind mit H'_3 und H'_4 bezeichnet, und die Fußpunkte der durch H'_3 und H'_4 zu den entsprechenden Grundlinien gefällten Senkrechten seien H'_2 und H'_5 . Wegen $H'_2H'_3 = H'_4H'_5$ gilt auch die Gleichheit $H_1H'_2 = a'_3 = H'_5H_6 = a'$. Auf Grund von (3) kann man sehen, daß $H'_4H'_3 = a'_1 > a_1$ und $a'_2 = a'_3 > a_1$ gelten. Daraus folgt, daß $a'_3 < a_3$ und $a'_2 > a_2$ sein müssen, folglich ist $\sum_{i=1}^3 a'_i \leq 3a$. Jetzt beweisen wir noch die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^3 a_i < \sum_{i=1}^3 a'_i.$$

Dazu müssen wir nur zeigen, daß $a_3 - a'_3 \leq a'_2 - a_2$. d.h. $H_2H'_2 \leq H'_5H_5$ ist. Die gemeinsame Tangente $H'_3H'_4$ schneidet die Seite H_3H_4 in dem Punkt T_1 und die Seite H_4H_5 in dem Punkt T_2 . Weil die Sechsecke S und $H_1H_2H'_3H'_4H'_5H_6$ gleichen Flächeninhalt haben, so sind der Flächeninhalt des Lambertischen Viereckes $H_3H'_3H'_4T_2$ und die Summe der Flächeinhalt des rechtwinkligen Dreieckes $T_2H_4T_1$ und der Fünfeckes $H_2H'_3T_1H_3H_2$ zueinander gleich. Das Fünfeck $H_2H'_3T_1H_3H_2$ hat eine Symmetrieachse durch T_1 , die das Fünfeck in zwei kongruente Lambertische Vierecke zerlegt. Aus der oben erwähnten folgt, daß der Flächeninhalt eines der beiden Lambertischen Vierecke kleiner als der Flächeninhalt des Viereckes $H_5H'_5H'_4T_2$ ist.

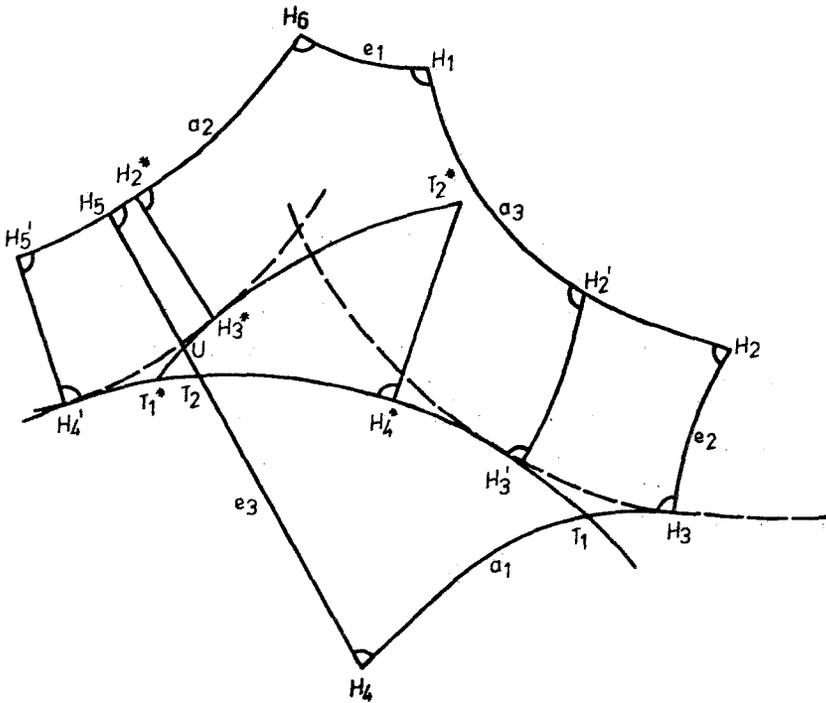


Fig. 7

Setzen wir voraus, daß $H'_5H_5 < H_2H'_2$ ist. Legen wir das Fünfeck $H'_2H'_3T_1H_3H_2$ auf das Lambertsche Viereck $H_5H'_5H'_4T_2$ so, daß die Strecken H_2H_3 und $H_5H'_4$ zusammenfallen und die Punkte H'_2, H'_3 und T_1 in die Punkte H_2^*, H_3^* und T_1^* fallen, wobei H_5 und T_1^* die Punkte der Strecken $H_5H_2^*$ bzw. H'_4T_2 sind. Legen wir ferner das Dreieck $T_1T_2H_4$ so, daß der Winkel $H_4T_1T_2$ und der ihm kongruente Winkel $H_3^*T_1^*T_2^*$ zusammenfallen und die rechtwinklige Ecke ein Punkt der Geraden T_1T_2 ist. Die entsprechenden Ecken des Dreieckes sind in der neuen Lage mit T_1^*, T_2^* und H_4^* bezeichnet. Die Strecke T_2H_5 schneidet die Seite $T_1^*T_2^*$ in dem Punkt U . Wir betrachten das Viereck $UT_2H_4^*T_2^*$, in dem $\sphericalangle T_2H_4^*T_2^* = \pi/2$, $\sphericalangle H_3^*UT_2 > \pi/2$, und $\sphericalangle UT_2H_4^* + \sphericalangle UT_2^*H_4^* = \pi$ sind. Daraus folgt, daß die Winkelsumme in diesem Viereck größer als 2π ist, was aber unmöglich ist, folglich besteht $H_2H'_2 \leq H_5H'_5$.

Wenn $a_1 = a_2$ ist, so gibt die obige Konstruktion ein solches Sechseck, in dem $a'_1 = a'_2 = a'_3$ und $e'_1 = e'_2 = e'_3 = e_1$ gelten.

$$\sum_{i=1}^3 a'_i \begin{cases} < 3a, & \text{falls } e_1 > 2l, \\ = 3a, & \text{falls } e_1 = 2l. \end{cases}$$

Wenn $a_1 < a_2$ ist, so gibt eine ähnliche Konstruktion ein Sechseck $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$ aus dem Sechseck $H_1H'_2H'_3H'_4H'_5H_6$, wo $a''_1 = a''_2 = a''_3$ und $e''_1 = e''_2 = e''_3 = e_1$ gelten. In dieser Konstruktion nehmen wir die Abstandslin-

nien durch die Punkte H_6 und H_1 , deren Grundlinien die Gerade $H_1H'_2$ bzw. die Gerade $H_6H'_5$ sind. Die gemeinsame Tangente gibt die Seite $H'_1H'_3$, und $a''_i > a'_i$ ($i = 1, 2, 3$) offenbar gilt.

$$\sum_{i=1}^3 a''_i \begin{cases} < 3a, & \text{falls } e_1 > 2l, \\ = 3a, & \text{falls } e_1 = 2l. \end{cases}$$

Damit haben wir unseren Satz vollständig bewiesen.

Die reguläre Lagerung der Abstandslinien im Sechseck Σ kann in der Ebene unbegrenzt fortgesetzt werden. Die Existenz der regulären Ausfüllungen der hyperbolischen Ebene durch die kongruenten Hyperzykelbereiche ist in [6] bewiesen.

Endlich untersuchen wir die Funktion $d(l)$. Die Dichteschranke $d(l)$ ist monoton zunehmend im $(0, \infty)$. Diese Behauptung ist durch die Derivation der Funktion $d(l)$ beweisbar.

Die Funktion ist

$$d(l) = \frac{6}{k\pi} \operatorname{sh} \frac{l}{k} \operatorname{arsh} \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{l}{k}},$$

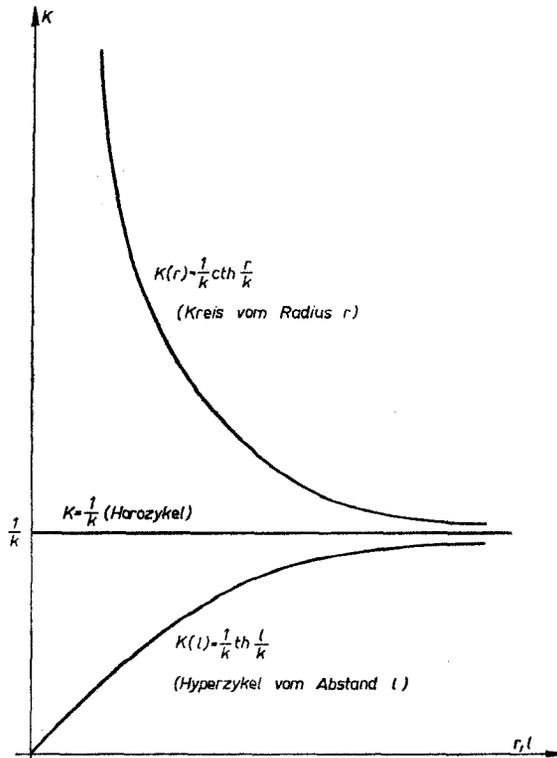


Fig. 8

folglich besteht

$$d'(l) = \frac{6}{k^2\pi} \operatorname{ch} \frac{l}{k} \left\{ \operatorname{arsh} \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{l}{k}} - \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \operatorname{sh}^2 \frac{l}{k}}} \right\}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß $d'(l) > 0$ im Falle $l > 0$ ist, also ist die Funktion $d(l)$ monoton zunehmend. Einfache Rechnungen geben die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{l \rightarrow 0} d(l) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{l \rightarrow \infty} d(l) = \frac{3}{\pi}.$$

Daraus folgt, daß die Dichte der dichtesten Horozyklenlagerung von der Dichte einer dichtesten Lagerung kongruenter Hyperzykelbereichen — für genügend groß l — willkürlich genau approximiert werden kann.

Zum Schluß vergleichen wir die Fig. 8 und 9. Die Funktionen $K(r)$, $K(l)$ und $K = \frac{1}{k}$ sind in Fig. 8 dargestellt, wo $K(r)$ die Krümmung eines Kreises vom Radius r , $K(l)$ die Krümmung eines Hyperzykels vom Abstand l und $K = 1/k$ die Krümmung der Horozyklen angeben. Die Funktion $d(r)$, $d(l)$ und $d = 3/\pi$ sind in Fig. 9 dargestellt, wo $d(r)$ die Dichteschranke einer

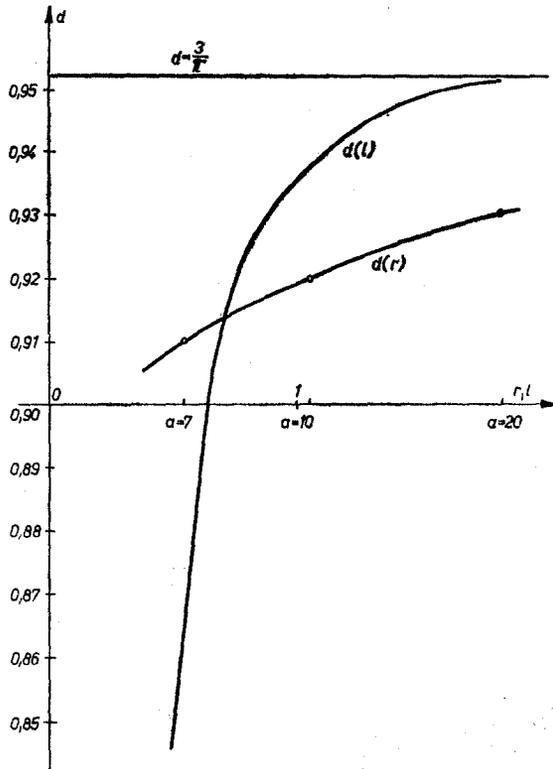


Fig. 9

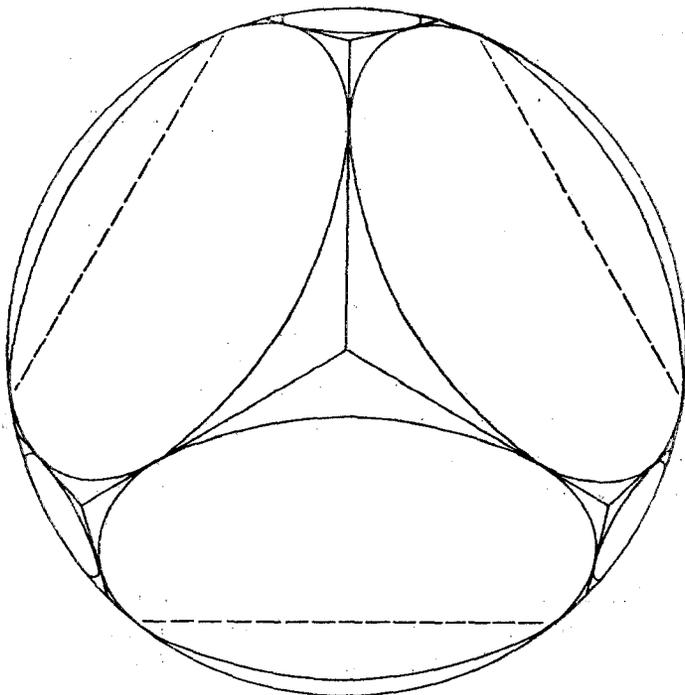


Fig. 10

Kreislagerung vom Radius r , $d(l)$ die Dichteschranke einer Hyperzykelbereichlagerung vom Abstand l und $d = 3/\pi$ die Dichteschranke einer Horozyklenlagerung angeben. Es ist leicht zu sehen, daß die Dichteschranke der Kreislagerungen für zunehmende Radien bzw. für abnehmende Krümmungen monoton zunehmend ist⁵.

Im Falle der Lagerungen kongruenter Hyperzykelbereiche vom Abstand l ist die Krümmung der Hyperzyklen immer kleiner, als die Krümmung eines Horozykles, die Dichteschranke ist aber kleiner als die Dichteschranke $3/\pi$ der Horozyklenlagerungen. Die Funktion $d(l)$ ist für die zunehmenden Werte von l und für die zunehmenden Werte der Krümmungen monoton zunehmend.

Zu jedem Wert von l im $(0, \infty)$ gehört eine reguläre Ausfüllung der hyperbolischen Ebene durch kongruente Hyperzykelbereiche und diese Ausfüllung ist die dichteste Lagerung. Fig. 10 zeigt einen Teil solcher Ausfüllung im Cayley—Kleinschen Modell der hyperbolischen Ebene.

*

Ganz besonderen Dank bin ich Herrn Prof. K. BÖRÖCZKY für seine wertvollen Bemerkungen beim Lesen des Manuskriptes dieser Arbeit verpflichtet.

⁵ S. [3], S. 224—232.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. FEJES TÓTH, Kreisausfüllungen der hyperbolischen Ebene, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 4 (1953), 103–110. *MR* 15–341
- [2] L. FEJES TÓTH, Über die dichteste Horozyklenlagerung, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 5 (1954), 41–44. *MR* 16–65
- [3] L. FEJES TÓTH, *Reguläre Figuren*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965. *MR* 30 # 3408
- [4] H. LIEBMANN, *Nichteuklidische Geometrie*, zweite Auflage, Göschen'sche Verlagshandlung, Berlin, 1912.
- [5] N. M. NESTOROVIC, *Geometričeskie postroenija v ploskosti Lobačevskogo* (Geometric constructions in the Lobačevskii plane), GITTL, Moscow, 1951. *MR* 13–969
- [6] I. VERMES, Über ebene hyperbolische Mosaik, *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 17 (1974), 131–137. *MR* 52 # 4101

(Eingegangen am 15. September 1975; in umgearbeiteter Form am 11. Juli 1976)

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI KAR
GEOMETRIA TANSZÉK
H-1521 BUDAPEST
STOCZEK U. 4.
HUNGARY