Periodica Mathematica Hungarica Vol. 5 (4), (1974), pp. 301—306.

ENDLICHE n-NACHBARNPACKUNGEN IN DER EBENE UND AUF DER KUGEL

von

J. LINHART (Salzburg)

Unter einer *Scheibe* verstehen wir eine beschränkte offene konvexe Teilmenge der euklidischen Ebene (bzw. der Kugeloberfläche, siehe weiter unten). Eine Scheibe heißt glatt, wenn ihr Minimalwinkel gleich π ist [1]. Eine *n-Nachbarnpackung* (kurz: *n-Np.*) ist eine Menge paarweise disjunkter Scheiben, bei der jede Scheibe genau n andere berührt. Wie L. FEJES TÓTH [1] bemerkte, gibt es auf Grund des Eulerschen Polyedersatzes für $n > 5$ keine n-Np. aus endlich vielen glatten Scheiben. Für $n = 5$ gibt es dagegen sogar schon n-Np. aus endlich vielen kongruenten glatten Scheiben [3, 4]. Wir befassen uns nun mit der in [1] aufgeworfenen Frage, für welche n es endliche n-Np. von Scheiben mit beliebig vorgegebenem Minimalwinkel $\frac{2\pi}{h}$ gibt. FEJES TÓTH vermutete diesbezüglich: $n \leq \max(5, [h-1])$. Wie Abb. 1 zeigt, bedarf diese Vermutung jedoch einer Modifikation. Aus dem untenstehenden Satz ergibt sich: $n \leq \max(5, 2[h]-1)$.

Bei den folgenden Betrachtungen ist eigentlich nicht der Minimalwinkel ausschlaggebend, sondern die im folgenden beschriebene Größe g. Wenn ein

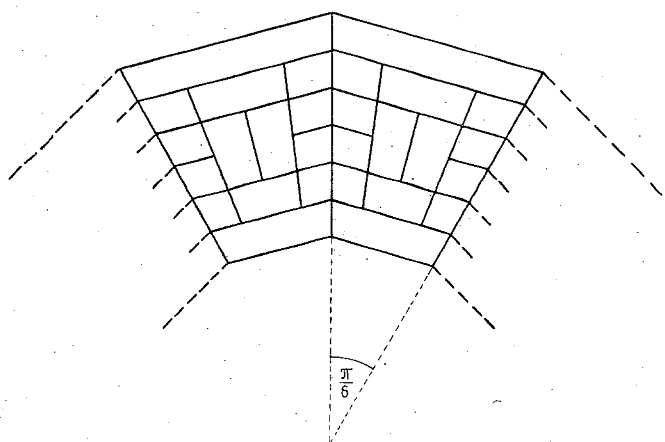

Abb. 1. Eine endliche 7-Nachbarnpackung für $g = [h] = 4$

Punkt Randpunkt von i verschiedenen Scheiben ist, $i \leqq 3$, so nennen wir ihn *Berührungsecke* (kurz *Be.*) *vom Grad* i. Den maximalen Grad der Be. einer gegebenen Packung bezeichnen wir mit g. Falls keine Be. vorliegen, setzen wir $g = 3$. Wenn es Be. gibt, ist klarerweise $g \leqq [h]$.

Auf der Kugel nennen wir die kürzeste Verbindungslinie zweier nicht antipodischer Punkte P und Q auch geradlinige Verbindung oder Strecke PQ. Eine Teilmenge der Kugeloberfläche mit Durchmesser $< \pi$ heißt konvex, wenn mit je zwei Punkten P, Q auch die Strecke PQ zu ihr gehört. Eine offene konvexe Teilmenge der Kugeloberfläche (mit Durchmesser $< \pi$) nennen wir wieder Scheibe.

Satz. *Für jede endliche n-Nachbarnpackung (in der Ebene oder auf der Kugel) gilt:* $n \leqq 2g - 1$, *und zumindest für* $g \leqq 6$ *ist diese Abschätzung scharf (d. h. zu jedem* $g \leqq 6$ *gibt es eine endliche n-Np. mit* $n = 2g - 1$*).*

Beweis. Für glatte Scheiben ist $g = 3$, und $n = 5$ ist möglich (siehe oben). Die Abb. 1 zeigt eine 7-Np. für $g = 4$. Die Oberfläche eines Ikosaeders liefert uns eine 9-Np. für $g = 5$ auf der Kugel. Ein entsprechendes Beispiel in der Ebene zeigt Abb. 2, es ist aus ikosaederartigen Teilen aufgebaut. Abb. 3 zeigt eine 11-Np. für $g = 6$ auf der Kugel. Es handelt sich dabei um das zum Archimedischen Mosaik (5,6,6) duale Mosaik (vgl. [2]). In der Ebene erhält man daraus eine solche 11-Np. durch eine analoge Konstruktion wie im Falle $g = 5$.

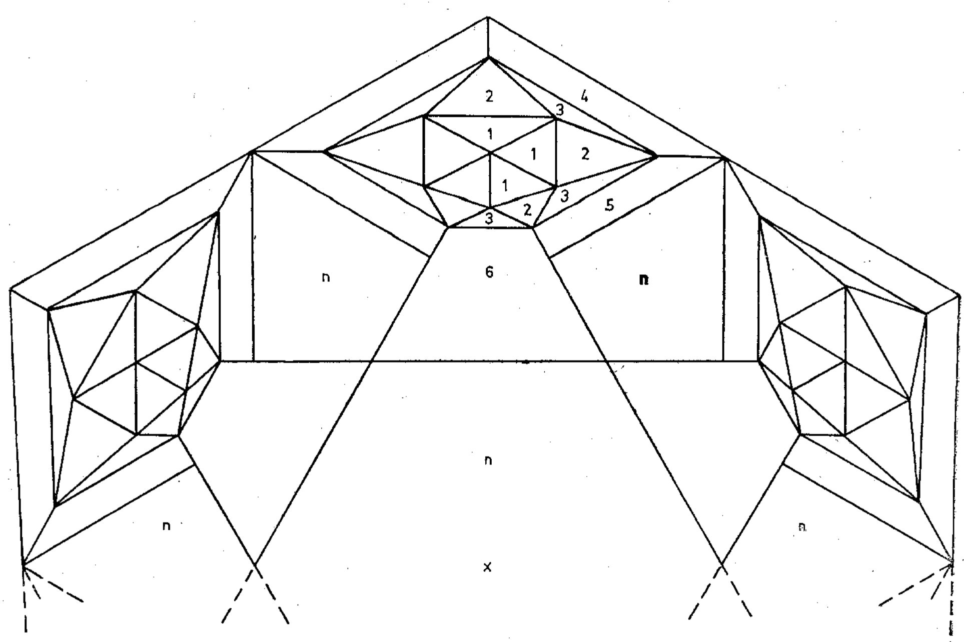

Abb. 2. Endliche 9-Nachbarnpackung für $g = 5$
$n \ldots$ gehört nicht zur Packung

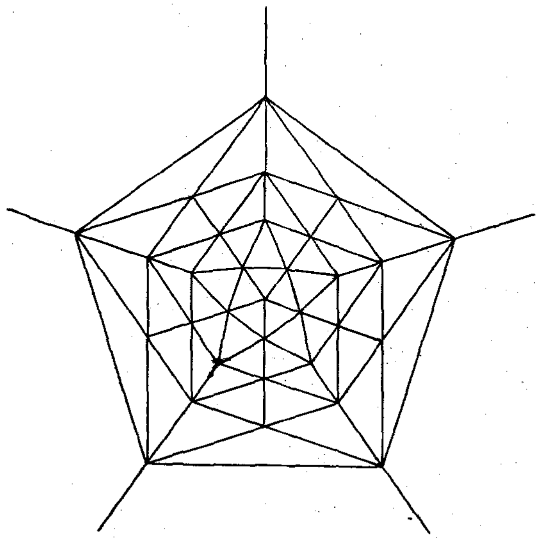

Abb. 3. Eine 11-Nachbarnpackung auf der Kugel, für $g = 6$ (angenähert stereographische Projektion)

Zum Nachweis der Ungleichung $n \leq 2g - 1$ ordnen wir jeder n-Np. folgenderweise einen (ungerichteten) Graphen G zu: Aus jeder Scheibe S_j wählen wir einen Punkt P_j aus. Diese Punkte bilden die Ecken von G (wohl zu unterscheiden von den Be.). Zwei solche Ecken werden durch eine Kante von G verbunden, wenn sich die zugehörigen Scheiben berühren. G ist natürlich im allgemeinen kein planarer Graph. Wir konstruieren nun dazu einen planaren Graphen G'. Zu den Ecken von G nehmen wir die Be. hinzu. Die Kanten von G' denken wir uns folgendermaßen gezeichnet: Jeder Punkt P_j wird zunächst geradlinig mit allen Be. verbunden, die auf dem Rand von S_j liegen. Wenn es dann noch Scheiben S_k gibt, die S_j zwar berühren, aber nicht in einer Be., so verbinden wir P_j mit P_k durch eine Kante, welche aus den beiden Strecken P_jB_{jk} und $B_{jk}P_k$ bestehe, wobei B_{jk} ein beliebig gewählter Berührungspunkt der beiden Scheiben S_j und S_k sei. Von jeder Be. E_m i-ten Grades gehen auf diese Weise i geradlinige Kanten aus. Die anderen Endpunkte dieser Kanten bezeichnen wir der Reihe nach im Uhrzeigersinn mit $P_{m1}, \ldots, P_{mi}$ und identifizieren P_{m0} mit P_{mi}, P_{m1} mit $P_{m,i+1}$. Wir verbinden jetzt je zwei aufeinanderfolgende Ecken P_{mq}, $P_{m,q+1}$ folgenderweise durch eine Kante (siehe Abb. 4): Sei K_m ein Kreis mit Mittelpunkt E_m und Radius r, wobei r genügend klein sei (siehe weiter unten). Die Schnittpunkte der Strecken E_mP_{mq} mit dem Kreis K_m bezeichnen wir mit Q_{mq}. Die Q_{mq} sind innere Punkte der Scheiben ei$_{mq}$, daher gibt es um jeden Punkt Q_{mq} einen Kreis K_{mq}, der ganz in S_{mq} liegt. Sie Kreise K_{mq} können sich daher nicht gegenseitig überschneiden und haben Dnen Radius $< r$. Jeder Kreis K_{mq} hat zwei Schnittpunkte R_{mq} und L_{mq} mit dem Kreis K_m (rechts bzw. links von Q_{mq}, von B_m aus gesehen). Die P_{mq} und

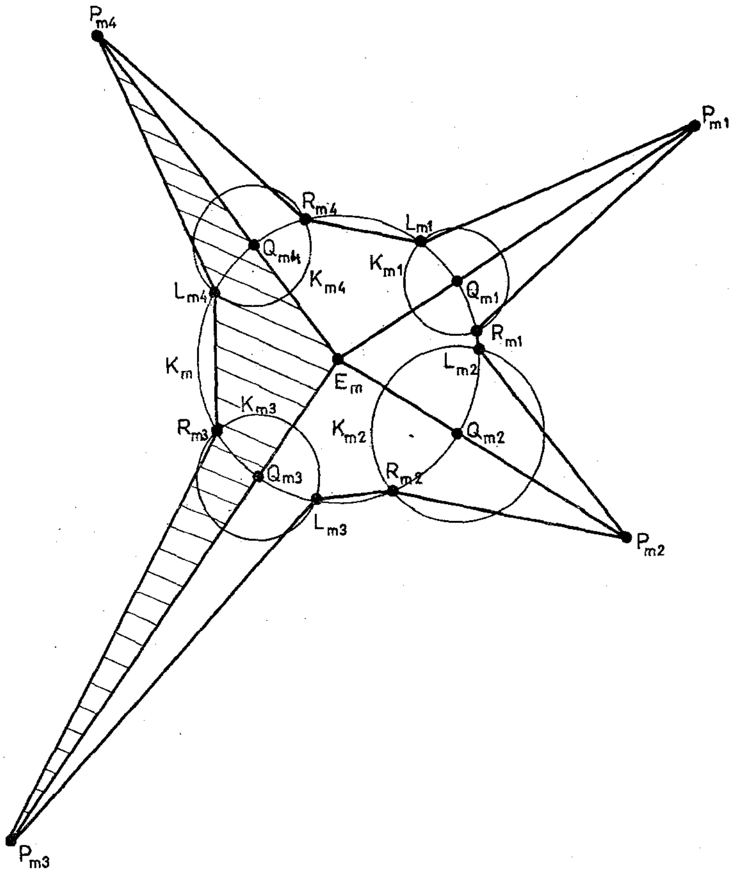

Abb. 4

$P_{m,q+1}$ verbindende Kante bestehe nun aus den Strecken $P_{mq}R_{mq}$, $R_{mq}L_{m,q+1}$ und $L_{m,q+1}P_{m,q+1}$.

Wir überlegen uns nun, daß der auf diese Weise gezeichnete Graph G' keine Kantenüberschneidungen aufweist. Dazu denken wir uns einen Grenzübergang $r \to 0$ durchgeführt. Dabei zieht sich bei jeder Be. E_m der zugehörige "Stern" (Abb. 4) auf die Vereinigung der Strecken $P_{mq}E_m$ ($q = 1, 2, \ldots, i$) zusammen. Nach dem Grenzübergang besteht der Graph G' nur mehr aus Strecken der Gestalt P_jX, wobei X eine Be. oder ein Punkt B_{jk} ist. P_jX liegt, abgesehen von X, in der Scheibe S_j. Zwei verschiedene solche Strecken P_jX und P_kY liegen daher entweder in derselben Scheibe, dann haben sie genau den Punkt $P_j = P_k$ gemeinsam, oder sie liegen in verschiedenen Scheiben, dann haben sie höchstens den Punkt $X = Y$ gemeinsam. Daraus kann man ersehen, daß bei genügend kleinem r der Graph G' tatsächlich planar ist.

Die Anzahl der Ecken von G sei e, die Kantenanzahl sei k, und entsprechend e' und k' bei G'. Bei G' kann es vorkommen, daß ein Eckenpaar durch zwei verschiedene Kanten verbunden wird. Das tritt genau dann ein, wenn sich zwei Scheiben in zwei Be. berühren. Bei der Anzahl k' zählen wir eine solche Doppelkante nur einfach (m-fach-Kanten mit $m > 2$ gibt es wegen der Konvexität der Scheiben nicht). Die Anzahl der Be. vom Grad i, welche Randpunkte der Scheibe S_j sind, bezeichnen wir mit $b_i^{(j)}$. Die Größe $b_i = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{e} b_i^{(j)}$ ist dann die Gesamtanzahl der Be. vom Grad i. Jeder Be. vom Grad i der Scheibe S_j entsprechen $i - 1$ Nachbarn. Es kann vorkommen, daß ein Nachbar zu zwei (aufeinanderfolgen) Be. gehört, wegen der Konvexität der Scheiben kann es jedoch zu jedem Paar von Be. von S_j nur höchstens einen solchen Nachbarn geben. Zählt man auf diese Weise die Nachbarn der Scheibe ab, so können höchstens so viele Nachbarn doppelt gezählt werden, als es Be. gibt. Da jede Scheibe höchstens n Nachbarn hat, folgt daraus: $\sum_{i=3}^{g} (i-2) b_i^{(j)} \leqq n$ für jeden Punkt P_j. Durch Summation über alle Ecken erhalten wir (siehe Def. von b_i):

$$(*) \qquad \sum_{i=3}^{g} (i-2)\, i b_i \leqq ne.$$

Bei jeder Be. vom Grad i hat der Graph G $\frac{i(i-1)}{2}$ Kanten. Wenn wir mit d die Anzahl der vorhin erwähnten Doppelkanten bezeichnen, und mit u die Anzahl der nicht zu einer Be. gehörigen Kanten, so folgt: $k = \Sigma \frac{i(i-1)}{2} b_i - d + u$. Der Graph G' hat bei jeder Be. vom Grad i genau $2i$ Kanten, somit: $k' = \Sigma\, 2i b_i - d + u$, also $k' = k + \Sigma \left(2i - \frac{i(i-1)}{2}\right) b_i$. Da G' ein planarer Graph ist, gilt nach dem Eulerschen Polyedersatz $k' \leqq 3e' - 6$, und wegen $e' = e + \Sigma\, b_i$ und $2k = ne$ folgt: $ne + \Sigma\, b_i(-i^2 + 5i) \leqq 6e + 6\, \Sigma\, b_i - 12$, und daher $(n-6)e \leqq \sum_{i=3}^{g} b_i(i^2 - 5i + 6) - 12 = \sum_{i=3}^{g} b_i(i-2)(i-3) - 12$. Aus $i \leqq g$ folgt $i - 3 \leqq \frac{g-3}{g} i$, und daher $\Sigma\, b_i(i-2)(i-3) \leqq \frac{g-3}{g} \Sigma\, (i-2) i b_i \leqq \leqq \frac{g-3}{g} ne$ (wegen $(*)$), somit $(n-6)e < \frac{g-3}{g} ne$, und das heißt $n < 2g$, womit der Satz bewiesen ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] L. Fejes Tóth, Scheibenpackungen konstanter Nachbarnzahl, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **20** (1969), 375—381.
[2] L. Fejes Tóth, *Reguläre Figuren*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965.
[3] J. Linhart, Über einige Vermutungen von L. Fejes Tóth, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **24** (1973), 199—201.
[4] G. Wegner, Bewegungsstabile Packungen konstanter Nachbarnzahl, *Studia Sci. Math. Hungar.* **6** (1971), 431—438.

(Eingegangen am 11. Oktober 1972)

II. LEHRKANZEL FÜR MATHEMATIK
AN DER UNIVERSITÄT SALZBURG
A—5020 SALZBURG
PORSCHESTRASSE 1/P
AUSTRIA