Archiv math. Logik 19 (1978), 131—137

ÉQUIVALENCE NATURELLE ET FORMULES LOGIQUES EN THÉORIE DES CATÉGORIES*

Georges Blanc

1. Introduction

Le langage du premier ordre prend une place de plus en plus importante dans beaucoup de travaux en théorie des catégories. La notion de catégorie étant suffisamment riche pour permettre de développer une partie importante des mathématiques, que ce soit dans la théorie des ensembles [4], ou des catégories [5] de Lawvere, ou plus récemment par la théorie des topos [2,6], la notion syntaxique de formule du premier ordre du langage de catégorie joue un rôle essentiel, sinon nécessaire lorsqu'on se propose une traduction dans d'autres théories utilisées en mathématiques. On peut parfois se demander si le langage classique du premier ordre est bien adapté à la notion de catégorie, et si ce qu'il nous permet de considérer comme des formules ne correspond pas parfois à des réalités absolument inutilisées par les catégoriciens.

L'utilisation d'un langage du premier ordre en théorie des catégories conduit le plus souvent à ne définir des termes qu'à l'isomorphie près, ou considérer des formules simultanément vraies dans «toute situation isomorphe». Plus précisément à considérer des propriétés invariantes par l'équivalence naturelle de catégories. Signalons que l'équivalence naturelle de catégories n'est ni plus faible ni plus forte que l'équivalence logique dans la théorie du premier ordre des catégories.

Nous nous proposons de donner un sens adéquat à l'invariance d'une formule par foncteur d'équivalence, et de donner une caractérisation syntaxique (les formules catégoriques dans ce texte) des formules invariantes par foncteurs d'équivalence[1,2].

Nous montrerons ainsi que toutes les «bonnes formules» utilisées en théorie des catégories, sont invariantes par foncteurs d'équivalence, ces «bonnes formules» sont en fait celles dans lesquelles:

---

* Eingegangen am 6. 7. 1977.

[1] Ce résultat vient d'être aussi obtenu indépendamment par P. Freyd, à l'aide de la notion de «diagrammatic properties» dans: Algebra, topology, and category theory, A. Heller, M. Tierney, Acad. Press 1976.

[2] Le lecteur pourra se reporter pour les terminologies de base en Logique ou Theorie des catégories, aux ouvrages respectifs: "Model theory", Chang, Keisler (North-Holland, 1973); "Categories for the working mathematician", S. Mac Lane (Springer, 1971).

a) Les quantifications de flèches ne sont utilisées que sous forme relativisée à une direction [de type $x:X \to Y$)].
b) On n'utilise le prédicat de composition $x \circ y = z$ (resp. d'égalité de flèches $t = u$) que lorsqu'on sait «par le contexte de la formule» que x et y sont composables (resp. que t et u ont mêmes sommets respectifs), et que la source de x (resp. le but de y) est celle de z (resp. celui de z); (nous adoptons la notion de composition dans l'ordre des flèches, de la gauche vers la droite).
c) On n'utilise enfin plus le prédicat d'égalité d'objet $X \equiv Y$.
La notion de préservation par équivalence naturelle que l'on peut être tenté de retenir dans une première approche triviale, consisterait à satisfaire pour tout foncteur d'équivalence F de $\mathscr{M}$ vers $\mathscr{M}'$:

$$\mathscr{M} \models \Phi(A_1, \ldots, A_m, f_1, \ldots, f_n) \text{ si et seulement si}$$
$$\mathscr{M}' \models \Phi(F(A_1), \ldots, F(f_n)).$$

Cette notion est évidemment trop forte pour être intéressante, et nous donnerons à la fin une caractérisation de telles formules d'où il apparaîtra nettement que cette préservation est trop restrictive (formules fortement transportables).
Par contre la notion utilisée par le catégoricien, consiste à satisfaire la même condition, mais sous l'hypothèse plus ou moins implicite d'une configuration graphique fixée à l'avance des variables libres $X_1, \ldots, X_m$, $x_1, \ldots, x_n$ de Φ.
Ainsi par exemple si la propriété: «être les deux projections d'un produit direct» est couramment admise comme préservée par foncteur d'équivalence, il est bien clair que le catégoricien n'entend pas par là que si $F(f)$ et $F(g)$ sont les deux projections d'un produit direct, alors f et g le sont aussi, puisque f et g peuvent très bien ne pas avoir même source. Par contre ce que la préservation veut exprimer, c'est que si f et g sont dans la configuration $\bullet \xleftarrow[f]{} \bullet \xrightarrow[g]{} \bullet$, alors f et g sont les deux projections d'un produit direct si et seulement si $F(f)$ et $F(g)$ le sont aussi.

2. Formules catégoriques et transportabilité

Soit $\mathscr{C}$ la théorie du premier ordre de catégorie, dans le langage $\mathscr{L}$ à deux types de variables: les flèches $x, y, x', \ldots$ etc, et les objets $X, Y, X', \ldots$ etc. constitué seulement des quatre symboles relationnels, notés:
1. $(x:X \to Y)$, interprété comme x va de X vers Y,
2. $\Gamma(x, y, z)$, interprété comme «x et y sont composables et leur composé est z»,
3. $x = y$ (resp. $X \equiv Y$), interprété comme l'égalité des variables flèches (resp. des variables objets).

Dans toute la suite, lorsque nous parlerons d'un *graphe* G, il sera toujours sous entendu qu'il s'agit d'un graphe orienté fini G, dont les flèches (resp. les objets) sont parmi les variables flèches (resp. les variables objets) de $\mathscr{L}$.
Soit G un graphe, et Φ une formule de $\mathscr{L}$ dont les variables libres sont toutes dans G. Pour chaque catégorie $\mathscr{M}$ et chaque homomorphisme de graphe $\theta: G \to \mathscr{M}$, on

définit de façon classique la validation de Φ dans $\mathscr{M}$ en θ, (en symbole $\mathscr{M} \models_{\theta} \Phi$), et par extension on note $\mathscr{M} \models_{G} \Phi$ pour exprimer que pour tout homomorphisme θ, $\mathscr{M} \models_{\theta} \Phi$, on pourra même éventuellement noter $\models_{G} \Phi$ pour exprimer que quelle que soit la catégorie $\mathscr{M}$, $\mathscr{M} \models_{G} \Phi$.

Il est bon de remarquer que $\mathscr{M} \models_{G} \Phi$ n'est pas équivalent à $\mathscr{M} \models \Phi$ (au sens classique de validation d'une formule dans une réalisation), comme le montre l'exemple dans lequel Φ est la formule $\exists z \Gamma(xyz)$ et G le graphe $\bullet \xrightarrow{x} \bullet \xrightarrow{y} \bullet$. De même que $\models_{G} \Phi$, n'est pas équivalent à $\models \Phi$, puisque $\models_{G} \Phi$ correspond syntaxiquement à $\mathscr{C}(G) \vdash \Phi$, où $\mathscr{C}(G)$ désigne la théorie extension de $\mathscr{C}$ par le diagramme de G («diagramme» employé ici au sens usuel de la théorie des modèles).

Définition 1

On dira que deux formules Φ et Ψ, dont les variables libres sont toutes dans G, sont *G-équivalentes*, si quelle que soit la catégorie $\mathscr{M}$, on a $\mathscr{M} \models_{G} (\Phi \leftrightarrow \Psi)$.

Définition 2

On définit alors la notion de formules *G-catégoriques*, on notera $K(G)$ *la classe de ces formules.* En termes simples, les formules G-catégoriques, sont les formules Φ satisfaisant les conditions syntaxiques 1 à 6 ci-dessous:

1. Toutes les variables libres de Φ sont dans G, les variables liées n'y étant pas.
2. Φ est régulière (i.e.; chaque variable a, au plus, une occurrence quantifiée, et ne peut être libre et liée simultanément).
3. Chaque quantification de variables flèches est relativisée sous la forme $(\exists x : X \to Y)$ $[(\exists x : X \to Y)\Psi$, étant évidemment interprétée par $\exists x((x : X \to Y) \wedge \Psi)]$.
4. A l'exception de la forme signalée dans le 3. précédent, le prédicat $(x : X \to Y)$ n'apparaît pas en tant que formule atomique de Φ.

Remarquons tout de suite que pour chaque formule Φ satisfaisant ces quatre conditions ci-dessus, on peut associer à chaque variable x apparaissant dans Φ deux variables objets, source et but de x, qu'on notera respectivement Φ_x^1 *et* Φ_x^2, obtenues soit par la quantification si x est liée, soit par le graphe G si x est libre. On appelle alors dans ce cas *G-contraintes de* Φ, les couples (Φ_x^i, Φ_y^j), satisfaisant l'une des trois conditions ci-dessous:

a) $i=1, j=1$ et x, y, apparaissent dans une formule atomique de Φ, de la forme $\Gamma(x, t, y)$ ou $x=y$.

b) $i=2, j=1$ et x, y apparaissent dans une formule atomique de Φ, de la forme $\Gamma(x, y, t)$.

c) $i=2, j=2$ et x, y apparaissent dans une formule atomique de Φ, de la forme $\Gamma(t, x, y)$ ou $x=y$.

5. Φ est d'écriture cohérente pour G, c'est-à-dire: les G-contraintes de Φ ne sont que des couples diagonaux de la forme (X, X).
6. Le prédicat d'égalité d'objet n'apparaît pas dans Φ.

Les formules G-catégoriques peuvent naturellement aussi se définir très aisément par induction sur la composition de Φ, comme par exemple les G-formules dans un langage sur graphe [1].
Remarquons aussi que la classe restreinte des formules catégoriques envisagée ici correspond dans un langage sur graphe à la classe de toutes les formules.
On peut alors énoncer le théorème de préservation:

Théorème de préservation par équivalence

Soit Φ une formule dont toutes les variables libres sont dans G, les deux conditions suivantes sont alors équivalentes:
i) *Φ est G-équivalente à une formule G-catégorique*
ii) *Pour tout foncteur d'équivalence $F:\mathcal{M}\to\mathcal{M}'$, et tout homomorphisme de graphe $\theta:G\to\mathcal{M}$,*

$$\mathcal{M}\models_{\theta}\Phi \text{ si et seulement si } \mathcal{M}'\models_{F\circ\theta}\Phi.$$

Il en résulte par exemple en termes intuitifs qu'un énoncé (formule close) est invariant par équivalence naturelle de catégorie si et seulement si il est «formulable» de façon «cohérente» et sans «exprimer d'égalités d'objets». C'est de façon évidente les seules propriétés qui intéressent d'ailleurs l'Algèbre des catégories.
On appellera formules *G-transportables*, toute formule Φ dont les variables libres sont toutes dans G, et qui satisfait la condition ii) du théorème ci-dessus.

3. Formules G-cohérentes

Nous allons, dans ce paragraphe, évoquer sommairement la démarche pour une démonstration du théorème de préservation.
Il est tout d'abord aisé de montrer par induction sur la construction des formules G-catégoriques, que celles-ci sont G-transportables. On peut par exemple utiliser comme lemme, le cas plus restreint suivant:

Proposition 1

Soit Φ une formule G-catégorique, F un endofoncteur de $\mathcal{M}$ et τ une équivalence naturelle de $\mathrm{Id}(\mathcal{M})$ *vers F; alors quel que soit l'homomorphisme θ de G dans $\mathcal{M}$, on a:*

$$\mathcal{M}\models_{\theta}\Phi \text{ si et seulement si } \mathcal{M}\models_{F\circ\theta}\Phi.$$

La réciproque du théorème de préservation nécessitera aussi quelques lemmes plus ou moins techniques. Pour cela nous introductions trois autres classes de formules, telles que:

$$K(G)\subset C(G)\subset PC(G)\subset S(G).$$

a) On note $S(G)$ la classe des formules Φ satisfaisant les conditions 1–4 de la définition 2, on appellera *formules sur G* ces formules.

b) On note $PC(G)$ la classe des formules de $S(G)$, dont les seules G-contraintes (Φ^i_x, Φ^j_y) (cf. remarque qui suit le 4. de la définition 2) qui ne soient pas des couples diagonaux de la forme (X,X), ont pour composante deux objets de G. On appelle *formules G-précohérentes* ces formules.
c) Enfin $C(G)$ désigne la classe des formules satisfaisant les conditions 1 à 5 de la définition 2. On appelle *formules G-cohérentes* ces formules.
On montre alors successivement les lemmes suivants, dont le théorème de préservation résultera:

Lemme

Toute formule dont les variables libres sont dans G, est G-équivalente à une formule de PC(G).

Il en résulte en particulier que tout énoncé (formule close) est équivalent à un énoncé cohérent, et même que toute formule Φ dont les variables objets libres sont réduites à, au plus, un élément, sont G-équivalentes à une formule G-cohérente pour au moins un graphe G. La formule G-cohérente ainsi associée étant construite de façon tout à fait mécanique. On peut d'ailleurs aussi montrer, à l'aide d'un lemme plus fin, qu'il n'y a pas lieu d'évoquer ici, que toute formule dont les variables libres ne sont constituées que de variables objets, est G-équivalente (i.e. dans ce cas simplement équivalente) à une formule G-cohérente où G désigne le graphe discret réduit aux objets libres.

Lemme

Toute formule de PC(G) qui est G-transportable, est G-équivalente à une formule de C(G).

Lemme

Toute formule de C(G) qui est G-transportable, est G-équivalente à une formule de K(G).

La démonstration de ce dernier lemme moins technique que les autres, consiste à considérer la formule Φ' déduite de la formule Φ de $C(G)$, en remplaçant chaque formule atomique $X \equiv Y$, par la formule «X est isomorphe à Y», et montrer alors que $\mathscr{M} \models_G \Phi'$ si et seulement si $\mathscr{M} \models_G \Phi$, en utilisant une catégorie squelette de $\mathscr{M}$ et la proposition 1.

4. Formules fortement transportables

Remarquons enfin à titre plus anecdotique, que l'on peut maintenant aussi caractériser les formules $\Phi(X_1, \ldots, X_m, x_1, \ldots, x_n)$ qui satisfont la transportabilité forte suivante:

quel que soit le foncteur d'équivalence F de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{M}'$

$\mathcal{M} \models \Phi(A_1, \ldots, A_m, f_1, \ldots, f_m)$ si et seulement si

$\mathcal{M}' \models \Phi(F(A_1), \ldots, F(f_1) \ldots)$.

Il s'agit de façon intuitive des propriétés qui n'impliquent aucune contrainte d'égalité entre les objets qu'elle «met en jeu», tant les variables objets libres, que les sommets des variables flèches libres; ainsi par exemple les propriétés:
1. X est isomorphe à Y,
2. x est un monomorphisme,
3. x factorise à travers X

sont fortement transportables.
Les propriétés suivantes par contre ne le seraient pas:
1. x est une identité,
2. x factorise à travers y,
3. x est égalisateur de y et z

quant à des propriétés du genre: «X n'est isomorphe qu'à lui-même», elles ne seraient même pas catégoriques (informulable sans un prédicat d'égalité d'objet).

5. Conclusion

On est donc maintenant en mesure d'annoncer que «toutes les propriétés» qui intéressent l'Algèbre des Catégories sont invariantes par équivalence naturelle. Les formules non G-équivalentes à des formules G-catégoriques qui peuvent être envisagées en Algèbre des Catégories ne le sont toujours que pour des raisons artificielles, et d'aucun intérêt en concept de catégorie (cf. par exemple le «parial skeletal axiom» de Lawvere dans [4].
Dans un langage approprié comme les langages sur graphes (où les formules envisagées ne sont que des formules G-catégoriques) les catégories naturellement équivalentes sont indiscernables. La notion de foncteur d'équivalence apparaît être alors à l'Algèbre des catégories, ce que la notion d'isomorphisme est à l'Algèbre universelle. Ceci ne doit pas nous surprendre, si l'on rappelle qu'un foncteur d'équivalence F, n'est (sous une forme peut être peu usitée, puisque redondante) qu'un foncteur satisfaisant:
a) F est une «bijection» sur les objets (dans le sens où l'égalité d'objet est remplacée par l'isomorphie notée $\simeq$)

$$F(X) \simeq F(Y) \rightarrow X \simeq Y$$
$$\forall X \exists Y (X \simeq F(Y)).$$

b) F est une «bijection» sur les flèches [i.e., de chaque $\mathrm{Hom}(X, Y)$ sur $\mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$].
Ce travail trouve chronologiquement sa place parmi les motivations qui sont conduit le groupe de recherche de Logique et Théorie des catégories de Marseille-

Luminy, à développer un sens général de Théories sur graphe, et Théories générales sur catégorie. Nous renvoyons le lecteur, pour des motivations développées de ces théories à : Blanc [1], Preller [7], et pour des développements de ces notions à : Blanc [Thèse de Doctorat], Rambaud [8], et Donnadieu [3][3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] Blanc, G.: Langages du premier ordre sur graphe. Cah. Math. de Montpellier **6** (1975).

[2] Coole, J.C.: Categories of sets and models of set theory. Aarhus preprint series **52** (1970/1971).

[3] Donnadieu, M.R., Rambaud, Ch.: Un théorème de complétude en théories sur graphes. Comp. Rend. Ac. des Sci. Paris (à paraître).

[4] Lawvere, F.W.: An elementary theory of the category of sets. Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) déc. 1964.

[5] Lawvere, F.W.: The category of categories as a foundation of mathematics. Proc. Conf. Cat. Alg. (Springer 1966).

[6] Mitchell, W.: Boolean topoï and the theory of sets. Jour. of pure and app. Algebra (1972) (271–273) (North-Holland).

[7] Preller, A.: Langages à graphes et Schema de Séparation. Actes du Col. Int. de Logique (Clermont-Ferrand 1975).

[8] Rambaud, Ch.: Déduction formelle en théories sur graphe. Comp. Rend. Acad. Sci. Paris, t. 283, 13 sept. 1976.
Rambaud, Ch., Blanc, G.: Théories formelles sur graphe. Comp. Rend. Acad. Sci. Paris, t. 282, 24 Mai 1976

Dr. G. Blanc
Mathematiques Centre Universitaire,
33, Rue Louis Pasteur,
84000 Avignon,
Frankreich

[3] Ce paragraphe a été rajouté en décembre 1976. Les résultats de l'article étaient obtenus eux en 1973, et déjà cités dans d'autres articles dès 1974.