

## DER TEMPERATURGRADIENT AN DER ERDOBERFLÄCHE UND DIE RADIOAKTIVE WÄRMEERZEUGUNG IN DER ERDKRUSTE BEI BERÜCKSICHTIGUNG DER HALBWERTSZEITEN

von K. JUNG (\*)

*Zusammenfassung* — Mit der Annahme, dass:

A) die radioaktive Wärmezeugung in der obersten Erdschicht von der Dicke  $H$  konstant ist und in tieferen Schichten keine radioaktive Wärme erzeugt wird, oder

B) die radioaktive Wärmezeugung in der Tiefe  $z$  gleich  $\text{const} \cdot e^{-\alpha z}$  ist, hat JEFFREYS berechnet, dass  $H$  und  $1/\alpha$  ungefähr 13 km betragen. Diese Zahl ist recht niedrig. JEFFREYS hat eine mit  $z$  lineare Anfangstemperatur angenommen und die Abnahme der radioaktiven Substanzen vernachlässigt. Nimmt man eine Anfangstemperatur an, die bei wachsendem  $z$  einem festen Wert zustrebt, und berücksichtigt man die Halbwertszeiten der radioaktiven Elemente, so kommt man auf  $H = 23$  und  $1/\alpha = 20$  km. Neue Ergebnisse von BULLARD zeigen an, dass die radioaktive Wärmezeugung in den Gesteinen geringer ist, als man bisher annahm. Mit seinen Zahlen schätzt man ab, dass Werte von 45 bis 50 km für  $H$  und  $1/\alpha$  möglich sind.

*Summary* — Supposing that:

A) radioactive heat generation is constant in a superficial layer of thickness  $H$  and no radioactive heat is generated in deeper layers, or

B) radioactive heat generation in the depth  $z$  is  $\text{const} \cdot e^{-\alpha z}$ ,

JEFFREYS has computed that  $H$  and  $1/\alpha$  are nearly 13 km. This figure is rather small. JEFFREYS has taken a temperature of commencement that tends to infinity like  $z$  and has neglected the diminution of radioactive substances by disintegration. If one takes a temperature of commencement that, with increasing  $z$ , approaches a fixed value and considers the half-lives of radioactive elements, one gets the values  $H = 23$  and  $1/\alpha = 20$  km. New results of BULLARD indicate, that radioactive heat generation in rocks is less than was accepted till now. Taking his values one estimates that values of 45 to 50 km for  $H$  and  $1/\alpha$  are possible.

---

(\*) Prof. Dr. KARL JUNG, Bergakademie. (20b) *Clausthal-Zellerfeld* 1 (Deutschland, Brit. Zone).

## Die Fragestellung

In einer bekannten Abschätzung<sup>(1)</sup> hat H. JEFFREYS nachgewiesen, dass radioaktive Stoffe nur in den obersten Schichten der Erdkruste angereichert sein können, wenn man an der Annahme festhält, dass nicht mehr Wärme im Erdinnern erzeugt wird, als nach aussen abfließt. Hierbei hat JEFFREYS zwei Fälle untersucht.

Fall A: die radioaktive Wärmeerzeugung ist bis zu einer gewissen Tiefe  $H$  konstant und in grösserer Tiefe gleich Null,

Fall B: die radioaktive Wärmeerzeugung nimmt von der Erdoberfläche an bei wachsender Tiefe  $z$  proportional der Funktion  $e^{-az}$  ab.

Es wird reine Wärmeleitung vorausgesetzt, von einer Berücksichtigung der Halbwertszeiten wird abgesehen.

Für  $H$  und  $1/\alpha$  werden Zahlenwerte genannt, die zwischen 10 und 15 Kilometern liegen, meist wird 13 km abgegeben. Es ist kaum möglich, diese niedrigen Zahlen mit dem aus Nahbeben und Großprengungen ermittelten Aufbau der Erdkruste und den Bestimmungen der Radioaktivität des Erdkrustenmaterials in Uebereinstimmung zu bringen. Es fragt sich also, ob die genannten Zahlen zuverlässig sind, und ob es nicht möglich ist, durch einen Ausbau der Theorie zu grösseren Werten von  $H$  und  $1/\alpha$  zu gelangen. Zu diesem Zweck wurde die JEFFREYSSCHE Rechnung wiederholt, jetzt aber mit Berücksichtigung der Halbwertszeiten und mit einer anderen Anfangsbedingung, die sich den wirklichen Verhältnissen besser anpassen dürfte als die Anfangsbedingung von JEFFREYS. Die zahlenmässige Durchrechnung ergab  $H \approx 23$  km,  $1/\alpha \approx 20$  km. Neuere Angaben über die radioaktive Wärmeerzeugung in der Erdkruste lassen für  $H$  und  $1/\alpha$  Werte von etwa 50 km als möglich erscheinen, sodass man wohl annehmen kann, dass sich die vielgenannten Schwierigkeiten, die geothermische Tiefenstufe, die radioaktive Wärmeerzeugung in den Erdkrustengesteinen und die Mächtigkeit der radioaktivitätshaltigen Erdkrustenschichten in Uebereinstimmung zu bringen, überwinden lassen.

## Die mathematische Theorie

*Die Differentialgleichung und ihre allgemeine Lösung* — Da sich die Untersuchung nur mit der Erdkruste befasst, kann die Erdkugel durch einen Halbraum ersetzt werden, dessen  $Z$ -Koordinate in die Tiefe weist. Der Koordinatenanfang liegt in der Erdoberfläche.

Es sei

$z$  die Tiefe (cm),

$t$  die Zeit (sec),

$\vartheta$  die Temperatur ( $^{\circ}\text{C}$ ),

$q$  die radioaktive Wärmeentwicklung der Masseneinheit in der Zeiteinheit (cal/g sec),

$k$  die Wärmeleitfähigkeit (cal/cm<sup>2</sup> sec  $^{\circ}\text{C}/\text{cm}$ ),

$c$  die spezifische Wärme (cal/g  $^{\circ}\text{C}$ ),

$\rho$  die Dichte (g/cm<sup>3</sup>).

Dann gilt die Differentialgleichung der Wärmeleitung:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + w,$$

wobei  $a^2 = k/\rho c$  die Temperaturleitfähigkeit (cm<sup>2</sup>/sec) bezeichnet und  $w = q/c$  die Temperaturerhöhung (°C/sec) darstellt, die in der Zeiteinheit entstehen würde, wenn keine Wärme abflösse.  $a^2$  wird in Ermangelung genauerer Kenntnisse räumlich und zeitlich konstant angenommen,  $w = w(z, t)$  ist eine Funktion der Tiefe und der Zeit.

Die Anfangsbedingung sei

$$\vartheta = \vartheta_0(z) \quad \text{für } t = 0,$$

die Randbedingung sei

$$\vartheta = 0^{\circ} \quad \text{für } t > 0, z = 0.$$

Mit dem Ansatz

$$\vartheta(z, t) = \varphi(z, t) + \sum_{\nu} u_{\nu}(z) \cdot v_{\nu}(t),$$

$$\varphi = \vartheta_0(z) - \sum_{\nu} u_{\nu}(z) \cdot v_{\nu}(0) \quad \text{für } t = 0,$$

$$\varphi = - \sum_{\nu} u_{\nu}(0) \cdot v_{\nu}(t) \quad \text{für } t > 0, z = 0,$$

der die Anfangsbedingung und die Randbedingung erfüllt, erhält man als allgemeine Lösung (2):

$$\vartheta = \varphi + \sum_{\nu} u_{\nu}(z) \cdot v_{\nu}(t),$$

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)},$$

$$\varphi^{(1)} = \frac{z}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \Phi(\tau) e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi_0(\zeta) \left( e^{-\frac{(\zeta-z)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\zeta+z)^2}{4a^2 t}} \right) d\zeta,$$

wobei

$$\Phi(\tau) = - \sum_{\nu} u_{\nu}(0) \cdot v_{\nu}(\tau),$$

$$\varphi_0(\zeta) = \vartheta_0(\zeta) - \sum_{\nu} u_{\nu}(\zeta) \cdot v_{\nu}(0),$$

$$\sum_{\nu} \left( u_{\nu}(z) \frac{dv_{\nu}(t)}{dt} - a^2 v_{\nu}(t) \frac{d^2 u_{\nu}(z)}{dz^2} \right) = w(z, t).$$

$u_{\nu}(z), v_{\nu}(t)$  sind so zu bestimmen, dass  $u_{\nu}(z) \cdot v_{\nu}(t)$  und  $k \frac{\partial u_{\nu}(z)}{\partial z}$  stetig werden.

Gelingt es,  $u_{\nu}(z)$  so zu bestimmen, dass  $u_{\nu}(0) = 0$ , so ist  $\Phi(\tau) \equiv 0$  und  $\varphi^{(1)} \equiv 0$ , und es vereinfachen sich die Rechnungen erheblich.

*Anwendung auf die Erdkruste* — Bei der Anwendung auf die Erdkruste kommt es zunächst darauf an, eine passende Anfangsbedingung aufzustellen. JEFFREYS verwendet einen Ausdruck von der Form  $\vartheta_0(z) = S + m \cdot z$ , nimmt also eine mit der Tiefe linear zunehmende Anfangstemperatur an. Da mit einem Halbraum gerechnet wird, ist nach diesem Ansatz eine unendliche Temperatur in unendlicher Tiefe, und es fragt sich, ob dieser grosse Wärmeverrat nicht einen zu grossen, nach oben gerichteten Wärmestrom liefert, wodurch bei gegebenem Temperaturgradient die Menge des mit radioaktiven Bestandteilen erfüllten Materials zu gering geschätzt wird. Es ist sicher besser und entspricht auch mehr der beobachteten Druckabhängigkeit der Schmelztemperaturen, wenn man eine Anfangs-

bedingung wählt, bei der sich die Temperatur mit wachsender Tiefe einem Grenzwert nähert. Als brauchbare mathematische Formulierung hat sich erwiesen:

$$\begin{aligned} \vartheta_0(z) &= (S_0 + A) - A e^{-\gamma z} \\ S_0 &= \text{const} = \text{Anfangstemperatur an der Erdoberfläche,} \\ A &= \text{const,} \\ \gamma &= \text{const,} \\ S_0 + A &= \text{Anfangstemperatur in grosser Tiefe.} \end{aligned}$$

Als radioaktive Substanzen kommen die *U*-Reihe, die *Th*-Reihe und *K*<sup>40</sup> in Frage. Die Halbwertszeiten der Zerfallsprodukte von *U* und *Th* sind sehr klein im Vergleich zu den Halbwertszeiten der Muttersubstanzen und zu den in Frage kommenden Zeiten. Daher genügt es, allein mit *U*, *Th* und *K* zu rechnen. Dann gilt:

$$w(z, t) = \sum_{\nu} w_{\nu}(z) \cdot e^{-\lambda_{\nu} t},$$

$\lambda_{\nu}$  = Zerfallskonstante der Substanz mit dem Index  $\nu$ .

Die Summe hat drei Glieder, je eines für *U*, *Th* und *K*.

Mit diesem Ansatz muss sein:

$$\sum_{\nu} \left( u_{\nu}(z) \frac{dv_{\nu}(t)}{dt} - a^2 v_{\nu}(t) \frac{d^2 u_{\nu}(z)}{dz^2} \right) = \sum_{\nu} w_{\nu}(z) \cdot e^{-\lambda_{\nu} t},$$

und es folgt mit  $v_{\nu} = e^{-\lambda_{\nu} t}$  eine Differentialgleichung für  $u_{\nu}$ :

$$\lambda_{\nu} u_{\nu}(z) + a^2 \frac{d^2 u_{\nu}(z)}{dz^2} = -w_{\nu}(z).$$

Ihre Lösung ist

$$u_{\nu}(z) = -\frac{1}{a \sqrt{\lambda_{\nu}}} \int_{C_{\nu}}^z w_{\nu}(\eta) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_{\nu}}}{a}(z-\eta)\right) d\eta + D_{\nu} \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_{\nu}}}{a}z\right) + E_{\nu} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_{\nu}}}{a}z\right).$$

$$C_{\nu} = \text{const,} \quad D_{\nu} = \text{const,} \quad E_{\nu} = \text{const.}$$

Setzt man

$$D_{\nu} = \frac{1}{a \sqrt{\lambda_{\nu}}} \int_0^{C_{\nu}} w_{\nu}(\eta) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_{\nu}}}{a}\eta\right) d\eta,$$

so erhält man den einfach zu behandelnden Fall  $u_{\nu}(0) = 0$ ,  $\Phi(\tau) \equiv 0$ ,  $\varphi^{(2)} \equiv 0$ . Hiermit wird

$$\begin{aligned} \vartheta &= \varphi(z, t) + \sum_{\nu} u_{\nu}(z) \cdot e^{-\lambda_{\nu} t}, \\ \varphi(z, t) &= \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \varphi_0(\zeta) \left( e^{-\frac{(\zeta-z)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\zeta+z)^2}{4a^2 t}} \right) d\zeta, \\ u_{\nu}(z) &= \frac{1}{a \sqrt{\lambda_{\nu}}} \left\{ - \int_{C_{\nu}}^z w_{\nu}(\eta) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_{\nu}}}{a}(z-\eta)\right) d\eta + \right. \\ &+ \left. \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_{\nu}}}{a}z\right) \int_0^{C_{\nu}} w_{\nu}(\eta) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_{\nu}}}{a}\eta\right) d\eta + a E_{\nu} \sqrt{\lambda_{\nu}} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_{\nu}}}{a}z\right) \right\}, \\ \varphi_0(\zeta) &= \vartheta_0(\zeta) - \sum_{\nu} u_{\nu}(\zeta) = (S_0 + A) - A e^{-\gamma \zeta} - \sum_{\nu} u_{\nu}(\zeta). \end{aligned}$$

Ueber sämtliche Konstanten  $C_v$  und  $E_v$  kann noch geeignet verfügt werden. Wie man sie auch wählt, immer ergibt sich derselbe Ausdruck für  $\vartheta$ .

*Der Temperaturgradient an der Erdoberfläche* — Differenziert man  $\vartheta$  nach  $z$ , so erhält man den Temperaturgradient  $\partial\vartheta/\partial z$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial\vartheta}{\partial z} &= \frac{\partial\varphi(z, t)}{\partial z} + \sum_v \frac{du_v(z)}{dz} \cdot e^{-\lambda_v t}, \\ \frac{\partial\varphi(z, t)}{\partial z} &= \frac{1}{4 a^3 \sqrt{\pi t^3}} \int_0^\infty \varphi_0(\zeta) \left( (\zeta - z) e^{-\frac{(\zeta-z)^2}{4 a^2 t}} + (\zeta + z) e^{-\frac{(\zeta+z)^2}{4 a^2 t}} \right) d\zeta, \\ \frac{du_v(z)}{dz} &= \frac{1}{a^2} \left\{ - \int_{C_v}^z w_v(\eta) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} (z - \eta)\right) d\eta \right. \\ &\quad \left. - \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} z\right) \int_0^{C_v} w_v(\eta) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} \eta\right) d\eta + a E_v \sqrt{\lambda_v} \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} z\right) \right\} \\ \varphi_0(\zeta) &= (S_0 + A) - A e^{-\gamma\zeta} - \sum_v u_v(\zeta), \\ u_v(z) &\text{ wie oben, } \quad C_v = \text{const, } \quad E_v = \text{const.} \end{aligned}$$

Der Temperaturgradient an der Erdoberfläche ist dann

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_{z=0} &= \frac{1}{4 a^3 \sqrt{\pi t^3}} \int_0^\infty \varphi_0(\zeta) \cdot \zeta \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{4 a^2 t}} d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{a^2} \sum_v e^{-\lambda_v t} \left\{ \int_0^{C_v} w_v(\eta) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} \eta\right) d\eta + a E_v \sqrt{\lambda_v} \right\}, \\ \varphi_0(\zeta) &= (S_0 + A) - A \cdot e^{-\gamma\zeta} - \frac{1}{a} \sum_v \frac{1}{\sqrt{\lambda_v}} \left\{ - \int_{C_v}^\zeta w_v(\eta) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} (\zeta - \eta)\right) d\eta \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} \zeta\right) \int_0^{C_v} w_v(\eta) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} \eta\right) d\eta + a E_v \sqrt{\lambda_v} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} \zeta\right) \right\}, \\ C_v &= \text{const, } \quad E_v = \text{const.} \end{aligned}$$

*Spezialfälle* — Fall A: Von  $z$  unabhängige Wärmeerzeugung bis zu bestimmten Tiefen  $H_v$ .

$$w_v(z) = \begin{cases} w_v = \text{const,} & \text{für } 0 \leq z \leq H_v, \\ 0, & \text{für } z > H_v. \end{cases}$$

Fall B: Exponentielle Abnahme der Wärmeerzeugung bei wachsender Tiefe.

$$\begin{aligned} w_v(z) &= w_v \cdot e^{-\alpha_v z} \\ w_v &= \text{const, } \quad \alpha_v = \text{const.} \end{aligned}$$

Zweckmässig wählt man

im Fall A:

$$C_v = H_v, \quad E_v = -\frac{w_v}{\lambda_v} \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} H_v\right),$$

im Fall B:

$$C_v = 0, \quad E_v = \frac{a \alpha_v w_v}{(a^2 \alpha_v^2 + \lambda_v) \sqrt{\lambda_v}}.$$

Dann erhält man durch Ausführung der Integrationen:

im Fall A:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= (S_0 + A) - A e^{-\gamma\zeta} + \sum_v \frac{w_v}{\lambda_v} \left(1 - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} \zeta\right)\right) \\ &+ \sum_{\substack{H_v < \zeta \\ H_v > \zeta}} \frac{w_v}{\lambda_v} \left[ -\left(1 - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} H_v\right)\right) \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} \zeta\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} H_v\right) \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} \zeta\right) \right] \\ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=0} &= \frac{S_0}{a \sqrt{\pi t}} + A \gamma e^{\gamma^2 a^2 t} (1 - \Psi(\gamma a \sqrt{t})) \\ &+ \frac{1}{2 a^3 \sqrt{\pi t^3}} \sum_v \frac{w_v}{\lambda_v} \left\{ \int_0^{H_v} \zeta \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} \zeta\right)\right) e^{-\frac{\zeta^2}{4 a^2 t}} d\zeta \right. \\ &- \left(1 - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} H_v\right)\right) \int_{H_v}^{\infty} \zeta \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} \zeta\right) \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{4 a^2 t}} d\zeta \\ &\left. + \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} H_v\right) \int_{H_v}^{\infty} \zeta \sin\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} \zeta\right) \cdot e^{-\frac{\zeta^2}{4 a^2 t}} d\zeta \right\}; \end{aligned}$$

im Fall B:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) &= (S_0 + A) - A e^{-\gamma\zeta} + \sum_v \frac{w_v}{a^2 \alpha_v^2 + \lambda_v} \left(e^{-\alpha_v \zeta} - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} \zeta\right)\right), \\ \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=0} &= \frac{S}{a \sqrt{\pi t}} + A \gamma e^{\gamma^2 a^2 t} (1 - \Psi(\gamma a \sqrt{t})) \\ &- \sum_v \frac{w_v \alpha_v}{a^2 \alpha_v^2 + \lambda_v} [e^{\alpha_v^2 a^2 t} (1 - \Psi(a \alpha_v t)) - e^{-\lambda_v t}] \\ &+ \frac{1}{2 a^3 \sqrt{\pi t^3}} \sum_v \frac{w_v}{a^2 \alpha_v^2 + \lambda_v} \int_0^{\infty} \zeta \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{\sqrt{\lambda_v}}{a} \zeta\right)\right) e^{-\frac{\zeta^2}{4 a^2 t}} d\zeta. \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\Psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi = \text{GAUSSSches Fehlerintegral.}$$

Für das Fehlerintegral gibt es Tafeln und asymptotische Reihen. Die anderen Integrale müssen mit geeigneten Näherungsverfahren abgeschätzt werden.

*Zahlenwerte* — Die Zahlenrechnungen wurden mit folgenden Annahmen ausgeführt:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Wärmeleitfähigkeit: } k = 0.007 \text{ cal/cm}^2 \text{ sec } \frac{\text{°C}}{\text{cm}} \\ \text{Dichte: } \rho = 2.7 \text{ g/cm}^3 \\ \text{spezifische Wärme: } c = 0.2 \text{ cal/g } \text{°C} \end{array} \right\} \text{Sial}$$

$$a^2 = \frac{k}{\rho c} = 1.296 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{sec}$$

$$a = 0.1138 \text{ cm/sec}^{1/2}$$

$$S_0 = 1200 \text{ °C}$$

$$A = 200 \text{ °C}$$

$$\gamma = 1.019 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$$

} angenähert = Schmelzkurve der Augit

Alter der Erdkruste:  $t_E = 2.10^9$  Jahre =  $6.31 \cdot 10^{16}$  sec.

$\nu$	Muttersubstanz	Halbwertszeit <sup>(3)</sup> Jahre	$\lambda_\nu$ sec <sup>-1</sup>	$\sqrt{\lambda_\nu}$ sec <sup>-1/2</sup>
1	U	$4.5 \cdot 10^9$	$4.9 \cdot 10^{-18}$	$2.21 \cdot 10^{-9}$
2	Th	$20 \cdot 10^9$	$1.3 \cdot 10^{-18}$	$1.14 \cdot 10^{-9}$
3	K	$10^{12}$	$2 \cdot 10^{-20}$	$0.14 \cdot 10^{-9}$

$\lambda_\nu t_E$	$e^{-\lambda_\nu t_E}$	Heutige radioaktive Wärmeenerzeugung $q_\nu$ <sup>(4)</sup> (Eruptivgesteine)	
		cal/g Jahr	cal/g sec
$3.09 \cdot 10^{-1}$	0.734	$4.74 \cdot 10^{-6}$	$1.50 \cdot 10^{-13}$
$0.82 \cdot 10^{-1}$	0.921	$3.45 \cdot 10^{-6}$	$1.09 \cdot 10^{-13}$
$1.26 \cdot 10^{-3}$	0.999	$3.22 \cdot 10^{-6}$	$1.02 \cdot 10^{-13}$
	Summe:	$11.41 \cdot 10^{-6}$	$3.61 \cdot 10^{-13}$

$\frac{q_\nu}{c} = w_\nu e^{-\lambda_\nu t_E}$ °C/sec	$w_\nu$ °C/sec
$7.50 \cdot 10^{-13}$	$10.22 \cdot 10^{-13}$
$5.45 \cdot 10^{-13}$	$5.92 \cdot 10^{-13}$
$5.10 \cdot 10^{-13}$	$5.11 \cdot 10^{-13}$
$\frac{18.05 \cdot 10^{-13}}$	$\frac{21.25 \cdot 10^{-13}}$

Für alle  $\nu$  wurde angesetzt:

$$H_\nu = H = \begin{cases} 20 \text{ km} \\ 25 \text{ km} \end{cases}$$

$$\frac{1}{\alpha_\nu} = \frac{1}{\alpha} = \begin{cases} 13 \text{ km} \\ 20 \text{ km} \end{cases}$$

Das Ergebnis der recht langwierigen Zahlenrechnungen ist in Fig. 1 wiedergegeben.

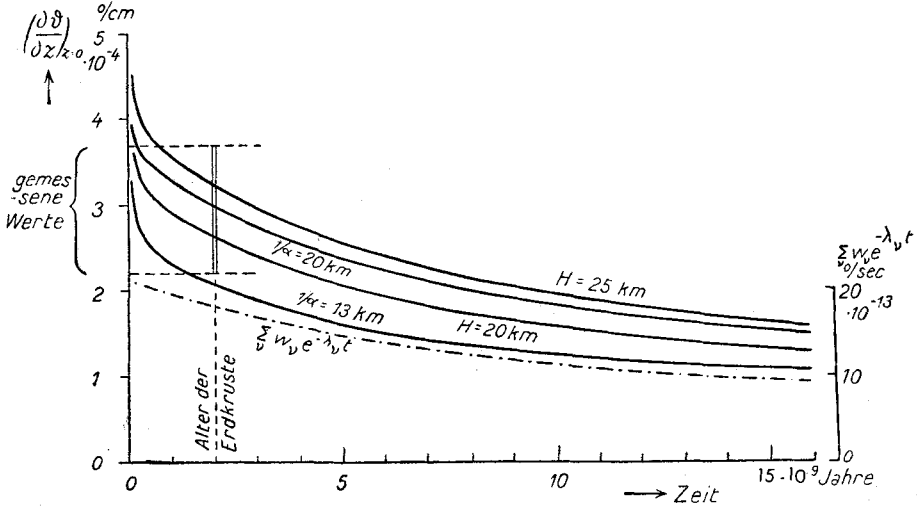


Fig. 1 - Der Temperaturgradient an der Erdoberfläche und die radioaktive Wärmeerzeugung in der Erdkruste als Funktion der seit der Erstarrung der Erdkruste vergangenen Zeit. Zahlengrundlagen im Text.

Gegeben ist das Alter der Erdkruste  $t_E$  und der Temperaturgradient an der Erdoberfläche  $\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_{z=0}$ . Für  $t_E$  wurden bereits  $2 \cdot 10^9$  Jahre angesetzt.  $\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_{z=0}$  liegt, wenn man von extremen Messungsergebnissen absieht, etwa in dem Bereich von  $2.2 \cdot 10^{-4}$  bis  $3.7 \cdot 10^{-4}$  °C/cm, als Mittelwert kann wohl  $\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_{z=0} = 3.0 \cdot 10^{-4}$  °C/cm angesehen werden. Die besten Werte von  $H$  und  $1/\alpha$  sind nun diejenigen, deren Kurven durch den Punkt ( $t = 2 \cdot 10^9$  Jahre,  $\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)_{z=0} = 3.0 \cdot 10^{-4}$  °C/cm) gehen. Aus Fig. 1 liest man ab:

$$H \approx 23 \text{ km},$$

$$\frac{1}{\alpha} \approx 20 \text{ km}.$$

#### Ergänzende Untersuchungen

*Die Krümmung der Erdoberfläche* — Es erhebt sich die Frage, wie weit es zulässig ist, die Krümmung der Erdoberfläche zu vernachlässigen, d. h. den kugel-



förmigen Erdkörper durch einen Halbraum zu ersetzen. Die Temperaturverhältnisse im tiefen Erdinnern können auf diese Weise nicht richtig erfasst werden. Es ist aber anzunehmen, dass diese Vereinfachung bei Betrachtung der Erdkruste zulässig ist.

Als Beispiel wurde der stationäre Zustand bei zeitlich unveränderlicher radioaktiver Wärmeerzeugung für die Kugel und für den Halbraum durchgerechnet. Dabei hat sich gezeigt, dass die für den Halbraum abgeleiteten Formeln gute Annäherungen der für die Kugel abgeleiteten Formeln sind, wenn man sich auf Tiefen bis zu einigen Hundert Kilometern beschränkt.

*Die Randbedingung* — Als einfachste Randbedingung wurde konstante Oberflächentemperatur angenommen. Es fragt sich, ob es nicht besser wäre, an der Oberfläche einen dem Temperaturunterschied gegen den Aussenraum proportionalen Wärmeübergang anzusetzen. Auch an eine Wärmeausstrahlung nach dem STEPHAN-BOLTZMANNschen Gesetz könnte man denken; man erhält dann aber nichts wesentlich Neues, da es angesichts der nur in langen Zeiten sich langsam ändernden Oberflächentemperatur zulässig ist, die Temperatur im STEPHAN-BOLTZMANNschen Gesetz in eine binomische Reihe zu entwickeln und nach dem linearen Glied abzubrechen.

Die Durchrechnung mehrerer Beispiele hat gezeigt, dass man bei der Annahme konstanter Oberflächentemperatur fast genau dieselben Zahlenwerte erhält wie bei der Annahme eines dem Temperaturunterschied proportionalen Wärmeübergangs. Man kann also bei der konstanten Oberflächentemperatur bleiben.

*Die Halbwertszeiten* — Die ganze Rechnung wurde auch unter der Annahme zeitlich unveränderlicher radioaktiver Wärmeerzeugung durchgeführt. Hierbei ergaben sich aber merkliche Unterschiede gegen die mitgeteilten Ergebnisse. Es ist also nicht zulässig, die in den Halbwertszeiten oder den Zerfallskonstanten ausgedrückte Abnahme der radioaktiv strahlenden Bestandteile zu vernachlässigen.

#### Abschätzungen über die Ergebnisse bei anderen Zahlengrundlagen

Will man die Untersuchungen auf andere als die angegebenen Zahlenwerte gründen, so ist es streng genommen notwendig, für jeden Fall die ganze Rechnung aufs Neue durchzuführen. Angesichts der Unsicherheit aller Zahlengrundlagen erhebt sich die Frage, ob sich ein solcher Aufwand an Rechenarbeit lohnt und ob es nicht zunächst mit einfacheren Abschätzungen geht. Das ist tatsächlich der Fall, und es soll nun gezeigt werden, wie man den Einfluss der Abänderung von einigen der Zahlengrundlagen abschätzen kann.

*Alter der Erdkruste* — Nimmt man ein grösseres Alter  $t'_E$  der Erdkruste an, so verschiebt sich in Fig. 1 der das Erdkrustenalter bezeichnende vertikale Strich nach rechts; ausserdem aber werden sämtlich ausgezogenen Kurven gehoben, denn für die  $w_v$  müssen nun grössere Werte  $w'_v = w_v e^{\lambda_v(t'_E - t_E)}$  angesetzt werden. Da die strichpunktierte Kurve  $\Sigma w_v e^{-\lambda_v t}$  den ausgezogenen Kurven in dem in Frage kommenden Bereich ungefähr parallel läuft, heben beide Einflüsse einander ungefähr auf, und man wird auch bei einem grösseren Erdkrustenalter etwa dieselben Ergebnisse über  $H$  und  $1/\alpha$  erhalten wie oben angegeben.

*Wärmeleitfähigkeit, spezifische Wärme und Dichte* — Andere Werte von  $k$ ,  $\rho$  und  $c$  führen auf eine andere Temperaturleitfähigkeit  $a^2$ . Aus der Formel für

$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=0}$  im Fall B lässt sich abschätzen, dass man im grossen und ganzen mit  $a'^2 = f \cdot a^2$  einen Temperaturgradient  $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=0, a'^2} \approx 1/f \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=0, a^2}$  erhält. Die Formel für  $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=0}$  im Fall A ist nicht so leicht zu übersehen, doch ist kaum anzunehmen, dass die Verhältnisse im Fall A wesentlich anders sind als im Fall B.

**Radioaktive Zahlenwerte** — Neuere Angaben über die radioaktive Wärmezeugung in den Gesteinen weichen nicht unerheblich von den der Rechnung zu Grunde gelegten Werten ab. So gilt nach E. C. BULLARD (5) in sauren Gesteinen

v	Muttersubstanz	Heutige Wärmezeugung $q_v$ cal/g sec
1	U	$0.96 \cdot 10^{-13}$
2	Th	$0.82 \cdot 10^{-13}$
3	K	$0.07 \cdot 10^{-13}$
	Summe	$1.85 \cdot 10^{-13}$

und die Halbwertszeit des radioaktiven K wird zu  $1.5 \cdot 10^9$  Jahren angegeben. Hieraus findet man weiter mit  $t_E = 2 \cdot 10^9$  Jahren =  $6.31 \cdot 10^{16}$  sec

v	$\frac{q_v}{c} = w_v e^{-\lambda_v t_E}$ °C/sec	$w_v$ °C/sec
1	$4.80 \cdot 10^{-13}$	$6.5 \cdot 10^{-13}$
2	$4.10 \cdot 10^{-13}$	$4.3 \cdot 10^{-13}$
3	$0.35 \cdot 10^{-13}$	$0.9 \cdot 10^{-13}$
Sum.	$9.25 \cdot 10^{-13}$	$11.7 \cdot 10^{-13}$

Hiernach ist die von der U-Reihe und der Th-Reihe erzeugte Wärme nur etwa 2/3 des als Zahlengrundlage angenommenen Betrags, und der Anteil des K ist noch erheblich kleiner. Zur Abschätzung genügt es, wenn man die mit den ursprünglichen Zahlenwerten berechneten Ergebnisse verwendet, dabei die U- und Th-Beiträge auf 2/3 verkleinert und den K-Beitrag weglässt. So erhält man für  $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=0}$  die in Fig. 2 wiedergegebenen Werte.

Die Kurven für  $H = 20$  km,  $H = 25$  km,  $1/\alpha = 13$  km,  $1/\alpha = 20$  km liegen jetzt beträchtlich tiefer. Zu den gemessenen Temperaturgradienten und einem Erdkrustenalter von 2 Milliarden Jahren dürften H- und  $1/\alpha$ -Werte von rund 50 km passen.

Hiernach bestehen kaum mehr erhebliche Schwierigkeiten, wenn man die gemessenen Temperaturgradienten, die radioaktive Wärmezeugung in den Erdkrustengesteinen und die Mächtigkeit radioaktivitätshaltiger Gesteinsschichten

in Uebereinstimmung bringen will, zumal die Wärmekonstanten des Erdkrustenmaterials nur ungenau bekannt sind und, ohne dass man mit den gemessenen Werten in Konflikt kommt, in verhältnismässig weitem Bereich den Erfordernissen der Theorie angepasst werden können.

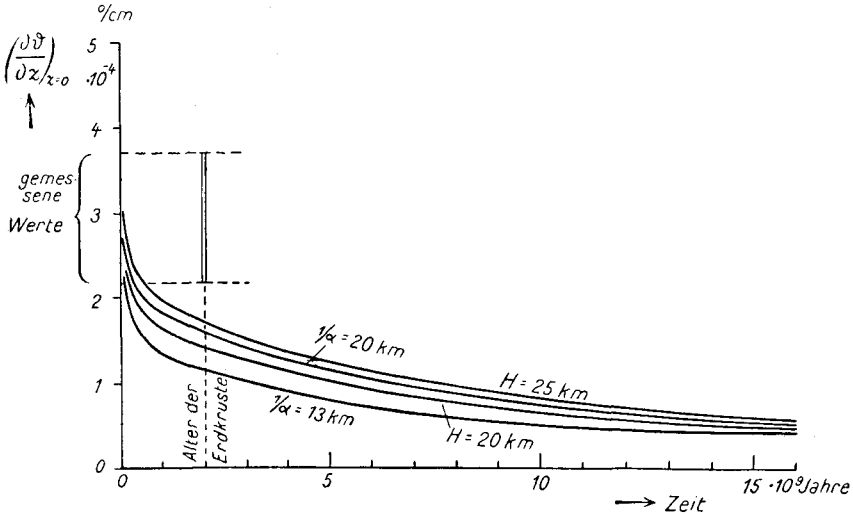


Fig. 2 - Der Temperaturgradient an der Erdoberfläche als Funktion der seit Erstarrung der Erdkruste vergangenen Zeit (Abschätzung). Zahlengrundlagen wie bei Fig. 1, jedoch radioaktive Daten nach E. C. BULLARD <sup>(5)</sup>.

Einige Schlüsse können auch aus einer Veröffentlichung von W. D. URRY <sup>(6)</sup>, die über die hier mitgeteilten Untersuchungen insofern hinausgeht, als die Rechnungen für eine kugelförmige Erde und nicht, wie hier, für einen Halbraum ausgeführt sind, gezogen werden. Kombiniert man seine Angaben über den Gehalt der Erdkrustenschichten an radioaktiven Bestandteilen mit den BULLARD-schen Werten der radioaktiven Wärmeerzeugung, so erhält man folgende Zahlen:

Tiefe km	$\Sigma q_v$ cal/g sec	
	(a)	(b)
0-15	$1.84 \cdot 10^{-13}$	$1.18 \cdot 10^{-13}$
15-30	$0.66 \cdot 10^{-13}$	$0.66 \cdot 10^{-13}$
30-45	$0.53 \cdot 10^{-13}$	$0.46 \cdot 10^{-13}$
45-60	$0.28 \cdot 10^{-13}$	$0.28 \cdot 10^{-13}$

(a) = oberer Grenzfall.  
 (b) = unterer Grenzfall.

Man kann nun die e-Funktionen suchen, die sich diesen Zahlen am besten anpassen.

Man findet:

$$\Sigma q_v = \begin{cases} 2.65 \cdot 10^{-13} \cdot e^{-\alpha z}, & \frac{1}{\alpha} = 20 \text{ km im Fall (a),} \\ 1.51 \cdot 10^{-13} \cdot e^{-\alpha z}, & \frac{1}{\alpha} = 29 \text{ km im Fall (b).} \end{cases}$$

Der entsprechende Wert von  $\Sigma (q_v)_{z=0}$  in den Zahlengrundlagen war  $3.61 \cdot 10^{-13}$  cal/g sec. Man kann also ungefähr auf die dem Fall (a) entsprechenden Verhältnisse kommen, wenn man die Ordinaten der Kurve  $1/\alpha = 20$  km in Fig. 1 mit  $2.65/3.61 = 0.7$  multipliziert. Dann schätzt man den passendsten Wert von  $1/\alpha$  auf ungefähr 45 bis 50 km.

#### LITERATUR

- (<sup>1</sup>) H. JEFFREYS, *The Earth*. 1.Auflage 1924, 2.Auflage 1929. — H. JEFFREYS, *On the earth's thermal history and some geophysical phenomena*. Gerlands Beiträge zur Geophysik 18, 2-6, 1927. — B. GUTENBERG in Müller-Pouillet, *Lehrbuch der Physik*. Bd. 5, 1. Teil, 666-668, 1928. — B. GUTENBERG, *Lehrbuch der Geophysik*, 483-484, 1929. — (<sup>2</sup>) FRANK- v. MISES, *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*. 2. Teil, 2. Aufl. 1935 (1923). — (<sup>3</sup>) LANDOLT-BÖRNSTEIN, *Physikalisch-chemische Tabellen*. Bd. 1, Seite 13 u. 18; 3. Ergänzungsband (1935), Seite 16. — (<sup>4</sup>) E. TAMS, *Grundzüge der physikalischen Verhältnisse der festen Erde*. Bd. 1 (1932), Seite 98. — (<sup>5</sup>) E. C. BULLARD, *Radioactive heat generation in rocks*. Monthly Not. Geophys. Suppl. Vol. 5, 41-47, 1942, n. 2. — (<sup>6</sup>) W. D. URRY, *Significance of radioactivity in geophysics — Thermal history of the earth*. Trans. Amer. Geophys. Union, Vol. 30, April 1949, pp. 171-180.
-