

Knickung gerader Stäbe unter Torsion

VON HANS ZIEGLER, ETH., Zürich

1. Einleitung

Seitdem A. G. GREENHILL [1]¹⁾ die kritische Belastung der auf Druck und Torsion beanspruchten Welle untersucht hat, wird bei Stabilitätsproblemen ähnlicher Art vorausgesetzt, daß die Momentenvektoren \mathfrak{M} , welche die belastenden Kräftepaare darstellen, bei der Deformation axial gerichtet bleiben. Wie der Verfasser kürzlich gezeigt hat [2], sind aber solche Kräftepaare nur ausnahmsweise konservativ [3]; beim Stab mit zwei Endmomenten (vgl. Tafel 1)

Tafel 1
Knickung durch ein axiales Moment
 k Knickfaktor in der Greenhillschen Formel (1. 1)

<i>Knickfall</i>	<i>Ia</i>	<i>IIa</i>	<i>IIIa</i>	<i>IVa</i>	<i>Va</i>
<i>Randbed.</i>					
<i>k</i>	2,861	2	0	0	2

beispielsweise nur dann, wenn er an beiden Enden (entweder fest oder aber translatorisch verschieblich) eingespannt ist. Nach einer weiteren Untersuchung des Verfassers [4]²⁾ darf die kritische Belastung nur bei konservativen Problemen mit Hilfe des statischen oder energetischen Stabilitätskriteriums ermittelt werden, während im allgemeinen allein das kinetische Kriterium in Frage kommt. Dieses macht die Untersuchung der Biegeschwingungen unter der gegebenen Belastung nötig und führt auf Ergebnisse, die sich in vielen Fällen

¹⁾ Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 118.

²⁾ Vergleiche auch [5] und [6].

nur schlecht mit der Erfahrung decken, und zwar nicht nur in den Knickfällen von Tafel 1, sondern beispielsweise auch dann, wenn der Stab zusätzlich auf Druck beansprucht oder nach der kritischen Drehzahl einer gedrückten und tordierten Welle gefragt wird.

Von den fünf einfachen, in Tafel 1 zusammengestellten Fällen von Knickung unter einem axialen Moment sind Ia und IIa konservativ; das kritische Moment darf also mit dem statischen Stabilitätskriterium ermittelt werden. Es ist für den Stab mit der Länge l und der vom Querschnitt und der Achse durch seinen Schwerpunkt unabhängigen Biegesteifigkeit α bereits durch A. G. GREENHILL [1] mit

$$W_k = \pm k \pi \frac{\alpha}{l} \quad (1.1)$$

angegeben worden, und zwar ist ihm zufolge im Fall Ia $k = 4$ und im Fall IIa $k = 2$ einzusetzen. Bei der Überprüfung dieser Werte hat A. TRÖSCH [7] festgestellt, daß der Greenhillsche Rückschluß von IIa auf Ia unzulässig und im Falle Ia in Übereinstimmung mit einem bereits von E. L. NICOLAI [8] gewonnenen Resultat $k = 2,861$ zu setzen ist. Im Gegensatz zu diesen beiden Fällen sind aber die übrigen nichtkonservativ. Mit Hilfe des kinetischen Kriteriums hat der Verfasser [2] nachgewiesen, daß der Stab im Fall IIIa unter jedem Moment $W \neq 0$ labil ist, und dasselbe Ergebnis hat A. TRÖSCH [7] seither für den Fall IVa erhalten. In beiden Fällen ist mithin in der Greenhillschen Formel (1.1) $k = 0$ zu setzen. Ferner ist der Wert $k = 2$, den A. G. GREENHILL für Fall Va mit dem statischen Kriterium gewonnen hat, fragwürdig, da dieses Kriterium hier illegitim ist. Er ist aber durch eine Untersuchung von A. TRÖSCH [7] bestätigt worden.

Diese Ergebnisse – vor allem diejenigen in den Fällen IIIa und IVa sowie die Resultate analoger Untersuchungen [2], [7], denen zufolge bei gewissen Lagerungen unter einem axialen Moment jede Drehzahl einer Welle kritisch ist – haben, auch wenn mit einer Verbesserung der Stabilitätsverhältnisse bei Berücksichtigung der Dämpfung [7] und der endlichen Dicke des Stabes gerechnet werden darf, etwas Unbefriedigendes an sich. Der Verfasser hat daher zunächst versucht, das Problem unter der Annahme neu zu bearbeiten, daß die Momentenvektoren \mathfrak{M} der belastenden Kräftepaare bei der Deformation nicht axial, sondern tangential zur elastischen Linie bleiben (wobei die Knickfälle IIIa bis Va in diejenigen von Figur 1 übergehen, während Ia und IIa sich nicht ändern). Bei der Berechnung der virtuellen Arbeit, welche das tangentielle

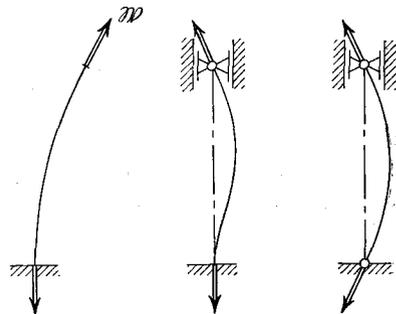


Fig. 1

Belastung durch tangentielle Momente.

Moment bei einer virtuellen Deformation des Stabes leistet, stellt sich indessen heraus, daß \mathfrak{M} auch jetzt nicht konservativ ist, indem der entscheidende Randterm in [2], (7. 16), nicht verschwindet, sondern sein Vorzeichen wechselt. Damit ist einerseits wieder mit Instabilitäten unter beliebig kleiner Belastung zu rechnen; andererseits stellt sich aber die Frage, ob nicht mit der Annahme eines halb axialen, halb tangentialen Momentes ein Fortschritt zu erzielen sei.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß das Problem konservativ wird und auf plausiblere Resultate führt, wenn man auf Voraussetzungen über die Richtung des Momentvektors \mathfrak{M} verzichtet, statt dessen auf die ihn erzeugenden Einzelkräfte zurückgeht und für diese zweckmäßige Annahmen trifft¹⁾. Dabei wird sich herausstellen, daß ganz von selbst ein Vektor \mathfrak{M} erhalten wird, der halbwegs tangential zur elastischen Linie ist. Da aber hinsichtlich der Einzelkräfte verschiedene Voraussetzungen möglich und praktisch realisierbar sind, wird es nötig, zwischen verschiedenen Arten von belastenden Momenten \mathfrak{M} zu unterscheiden, die auch in ihren kritischen Werten erheblich voneinander abweichen können. Das Problem ist eben in Wirklichkeit viel differenzierter, als bisher angenommen wurde; die Konzeption eines axialen Momentes stellt tatsächlich nur eine von mehreren Arbeitshypothesen dar, und zwar eine verhältnismäßig ungünstige, da sie den praktisch vorliegenden Verhältnissen nur äußerst selten entspricht.

Im einzelnen wird es sich darum handeln, die vom praktischen Standpunkt aus wichtigsten Belastungsarten herauszugreifen, den Nachweis zu erbringen, daß die zugehörigen Momente \mathfrak{M} konservativ sind, und sodann in einzelnen Fällen ihre kritischen Werte zu bestimmen. Dabei sind die grundsätzlichen Betrachtungen des nächsten Abschnitts noch ganz allgemein gefaßt, mithin auch für kompliziertere Aufgaben dieser Art und insbesondere für Drehzahlprobleme gültig. Von Abschnitt 3 an wird im Interesse einer einfacheren Darstellung vorausgesetzt, daß der Stab nur an den Enden belastet und prismatisch sei sowie nur eine einzige Biegesteifigkeit besitze, während in den weiteren Abschnitten, mit Ausnahme von 7, die Belastung auf Endmomente beschränkt und als Beispiele nur noch die Knickfälle I bis V unter den neuen Annahmen über die Richtung von \mathfrak{M} behandelt werden.

2. Kraftangriff und Moment

Bezieht man einen geraden Stab auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem (x, y, z) , dessen Ursprung im unteren Endquerschnitt liegt und dessen z -Achse mit der Stabachse zusammenfällt, so ist man in der Wahl der Kräfte, die eine Belastung des Schnittes z_1 durch einen Momentvektor \mathfrak{M} darstellen, noch weit-

¹⁾ Wie mir Herr Prof. Dr. W. T. KOITER brieflich mitteilt, hat auch er diese Feststellung gemacht. Er behandelt in einer Arbeit, die vor der Veröffentlichung steht, die Einleitung des Torsionsmomentes durch ein Kreuzgelenk.

gehend frei. Sitzt eine (etwa in zwei Punkten) *in ihrer Ebene* beaufschlagte Turbinenscheibe auf dem Stab, so hat man mit einem Kräftepaar zu tun, das sich auch bei der Deformation des Stabes nicht ändert, also ausnahmsweise mit einem axialen Moment. Im allgemeinen (zum Beispiel bei der *schief* beaufschlagten Turbine) wandern indessen die Angriffspunkte bei der Deformation. Um den praktisch vorkommenden Fällen nach Möglichkeit gerecht zu werden, lassen wir eine solche Wanderung zu, setzen aber die Kräfte nach Betrag und Richtung grundsätzlich als konstant voraus und beschränken uns im übrigen auf die Anordnungen von Figur 2, nämlich

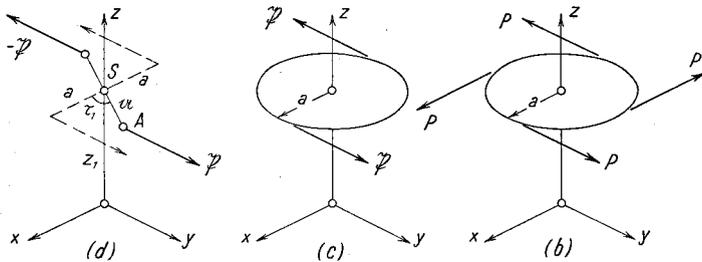


Fig. 2

Belastung durch konstante Kräfte. (d) Querarm mit Kräftepaar (pseudotangenciales Moment), (c) Scheibe mit Kräftepaar (quasitangenciales Moment), (b) Scheibe mit gleichmäßiger Verteilung von mehr als zwei Umfangskräften (semitangenciales Moment).

(d) auf das Kräftepaar $\mathfrak{P}, -\mathfrak{P}$, das an einem rechtwinklig und starr mit dem Stab verbundenen Querbalken der Länge $2a$ angreift,

(c) auf das Kräftepaar an einer zum Stab normalen und starr mit ihm verbundenen Scheibe vom Radius a ,

(b) auf die gleichmäßige Verteilung von mehr als zwei gleich großen, am Umfang einer solchen Scheibe wirkenden Azimutalkräften, die auch die kontinuierliche Belastung durch eine pro Bogeneinheit konstante Umfangskraft in sich schließt.

Den Kraftangriff kann man sich in allen drei Fällen durch Fäden realisiert denken; daneben kommt (d) im elektrischen oder magnetischen Kraftfeld, (c) bei zweifach und (b) bei mehrfach sowie gleichmäßig beaufschlagten Turbinen in Frage¹⁾.

Solange die Belastung genügend klein ist, bleibt die Stabachse gerade, und der auf Torsion beanspruchte Stab erfährt lediglich eine Verdrehung, die im Schnitt z durch den – möglicherweise großen – Winkel $\tau(z)$ gemessen werden kann. Fall (d) unterscheidet sich von den beiden andern grundsätzlich dadurch,

¹⁾ Bei der Einleitung des Torsionsmomentes durch Kreuzgelenke nach W. T. KOITER liegt ein mit (c) verwandter Fall vor, der sich aber nur unter speziellen Randbedingungen mit (c) deckt.

daß bei dieser Verdrehung das belastende Moment vom Wert W_0 auf

$$W = W_0 \cos \tau_1 \quad (2.1)$$

absinkt, während für (c) und (b) $W = W_0$ gilt, und daraus folgt insbesondere, daß im Fall (d) $\tau(z_1) < \pi/2$ ist.

Unter der kritischen Belastung krümmt sich die Stabachse und geht in die elastische Linie $x(z)$, $y(z)$ über: zugleich ändert sich die Verdrehung $\tau(z)$ um $\varepsilon(z)$, und neben der Torsion tritt im einzelnen Schnitt eine Biegebeanspruchung auf. Da für die Bestimmung der kritischen Belastung nur der Beginn des Knickens interessiert, kann man die Verschiebungen x , y als klein gegen die Stablänge l betrachten, ihre Ableitungen x' , y' nach z sowie den Drehwinkel ε als klein gegen 1 und die Biegemomente als klein gegen W . Sodann darf man sich – von den Energiebetrachtungen des nächsten Abschnittes abgesehen, welche die Mitnahme von zweiter Ordnung kleiner Glieder erfordern – auf die Berücksichtigung der Terme erster Ordnung beschränken.

Die unter der kritischen Belastung auftretende Verformung des Stabes hat für den Querschnitt z_1 in erster Näherung eine Translation um den Vektor $\mathbf{r}_1(x_1, y_1, 0)$ sowie eine Drehung um den vektoriellen Winkel $\mathbf{o}_1(-y'_1, x'_1, \varepsilon_1)$ zur Folge. Orientiert man im Fall (d) das Koordinatensystem so, daß die y -Achse die Richtung von \mathfrak{B} (die x -Achse mithin diejenige des Querarms am unbelasteten Stab) hat, so resultiert für den Fahrstrahl $\mathbf{a}(a \cos \tau_1, a \sin \tau_1, 0)$, welcher den Schwerpunkt S des Schnittes mit dem Angriffspunkt A der Kraft $\mathfrak{B}(0, P, 0)$ verbindet, aus dieser Bewegung eine Änderung

$$\mathbf{o}_1 \times \mathbf{a} = a (-\varepsilon_1 \sin \tau_1, \varepsilon_1 \cos \tau_1, -x'_1 \cos \tau_1 - y'_1 \sin \tau_1)$$

und für das statische Moment $\mathbf{a} \times \mathfrak{B}$ von \mathfrak{B} bezüglich S die Änderung

$$(\mathbf{o}_1 \times \mathbf{a}) \times \mathfrak{B} = P a (x'_1 \cos \tau_1 + y'_1 \sin \tau_1, 0, -\varepsilon_1 \sin \tau_1).$$

Der Momentenvektor des Paares, der unmittelbar vor dem Knicken die Komponenten $(0, 0, W = 2 P a \cos \tau_1)$ hat, geht also unter der kritischen Belastung in

$$\mathfrak{B} = W (x'_1 + y'_1 \operatorname{tg} \tau_1, 0, 1 - \varepsilon_1 \operatorname{tg} \tau_1) \quad (2.2)$$

über. Er neigt sich gegen die Stabachse, ohne indessen tangential zur elastischen Linie zu bleiben, und soll, um die Diskussion zu erleichtern, als *pseudotangential* bezeichnet werden. Man hat damit

Satz 1. Der Momentenvektor eines Kräftepaares, das aus zwei nach Betrag und Richtung konstanten, an einem Querarm angreifenden Kräften besteht, ist pseudo-

tangential, das heißt, er besitzt im Koordinatensystem der Figur 2 (d) die Komponenten (2.2).

Fall (c) unterscheidet sich von (d) dadurch, daß sich der Fahrstrahl des Angriffspunktes von \mathfrak{B} während der dem Knicken vorangehenden Torsion nicht ändert, so daß $\mathfrak{a}(a, 0, 0)$ ist. Gibt man der y -Achse auch hier die Richtung von \mathfrak{B} , so hat man also (obschon $\tau_1 \neq 0$ ist) in den soeben angeschriebenen Beziehungen nur $\tau_1 = 0$ zu setzen, um sie dem neuen Fall anzupassen. Man erhält damit für den Momentvektor des Paares, der ursprünglich die Komponenten $(0, 0, W = 2 P a)$ aufweist, statt (2. 2)

$$\mathfrak{B} = W(x'_1, 0, 1) . \tag{2. 3}$$

Er ist, auf die (x, z) -Ebene projiziert, tangential zur Projektion der elastischen Linie, in seiner Projektion auf die (y, z) -Ebene dagegen axial, und soll als *quasitangential* bezeichnet werden. Man hat somit:

Satz 2. Der Momentvektor eines Kräftepaares, das aus zwei nach Betrag und Richtung konstanten, an einer Kreisscheibe angreifenden Kräften besteht, ist quasitangential, das heißt in seiner Projektion auf die Normalebene zur einen Kraft \mathfrak{B} des Paares tangential zur Projektion der elastischen Linie, in der Projektion auf die durch \mathfrak{B} und die Stabachse aufgespannte Ebene dagegen axial.

Als Vorbereitung für den Fall (b) betrachten wir nochmals die Kraft \mathfrak{B} , diesmal aber ohne eine Voraussetzung über die Orientierung des Koordinatensystems zu treffen, so daß sie (Figur 3) unter einem beliebigen Winkel β gegen die x -Achse geneigt ist. Der Fahrstrahl von A und die Kraft \mathfrak{B} sind dann vor dem Knicken durch $\mathfrak{a}(a \cos \beta, a \sin \beta, 0)$ bzw. $\mathfrak{B}(-P \sin \beta, P \cos \beta, 0)$ gegeben; die Änderung von \mathfrak{a} ist

$$\delta \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} = a (-\varepsilon_1 \sin \beta, \varepsilon_1 \cos \beta, -x'_1 \cos \beta - y'_1 \sin \beta)$$

und die Änderung von $\mathfrak{a} \times \mathfrak{B}$

$$(\delta \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}) \times \mathfrak{B} = P a (x'_1 \cos^2 \beta + y'_1 \cos \beta \sin \beta, x'_1 \cos \beta \sin \beta + y'_1 \sin^2 \beta, 0) .$$

Geht man nun zur Verteilung von n Kräften P mit den Zwischenwinkeln $2\pi/n$ über, so erhält man für den Vektor \mathfrak{B} , der ursprünglich die Komponenten $(0, 0, W = n P a)$ hat, die neuen Komponenten

$$W_x = P a (A x'_1 + C y'_1) , \quad W_y = P a (C x'_1 + B y'_1) , \quad W_z = n P a , \tag{2. 4}$$

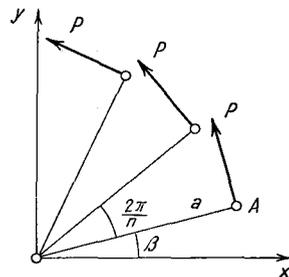


Fig. 3
Belastung durch gleichmäßig verteilte Umfangskräfte.

wobei die Abkürzungen A , B und C durch

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{k=1}^n \cos^2 \left[\beta + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ 1 + \cos \left[2\beta + (k-1) \frac{4\pi}{n} \right] \right\}, \\
 B &= \sum_{k=1}^n \sin^2 \left[\beta + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ 1 - \cos \left[2\beta + (k-1) \frac{4\pi}{n} \right] \right\}, \\
 C &= \sum_{k=1}^n \cos \left[\beta + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] \sin \left[\beta + (k-1) \frac{2\pi}{n} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sin \left[2\beta + (k-1) \frac{4\pi}{n} \right]
 \end{aligned}$$

gegeben sind. Diesen Beziehungen entnimmt man ohne weiteres

$$A = 1 + \cos 2\beta, \quad B = 1 - \cos 2\beta, \quad C = \sin 2\beta, \quad (n=2) \quad (2.5)$$

mit Hilfe der (aus der Moivreschen Formel entspringenden) Identitäten¹⁾

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \cos[\varphi + (k-1)\psi] &= \frac{\sin \frac{n\psi}{2} \cos\left(\varphi + \frac{n-1}{2}\psi\right)}{\sin \frac{\psi}{2}}, \\
 \sum_{k=1}^n \sin[\varphi + (k-1)\psi] &= \frac{\sin \frac{n\psi}{2} \sin\left(\varphi + \frac{n-1}{2}\psi\right)}{\sin \frac{\psi}{2}}
 \end{aligned} \right\} \quad (\psi \neq 2\pi, 4\pi, \dots)$$

ferner

$$A = B = \frac{n}{2}, \quad C = 0. \quad (n > 2) \quad (2.6)$$

Setzt man (2.5) in (2.4) ein, so erhält man die – hier nicht benötigte – Verallgemeinerung von (2.3) für ein beliebig orientiertes Achsenkreuz. Durch Einsetzen von (2.6) dagegen gewinnt man – unabhängig von β –

$$W_x = \frac{1}{2} n P a x'_1, \quad W_y = \frac{1}{2} n P a y'_1, \quad W_z = n P a,$$

mithin den Momentvektor

$$\mathfrak{W} = W \left(\frac{1}{2} x'_1, \frac{1}{2} y'_1, 1 \right), \quad (2.7)$$

¹⁾ Vergleiche etwa E. HAMMER, *Lehr- und Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie*, 3. Aufl. (Metzler, Stuttgart 1907), S. 216.

der halbwegs tangential zur elastischen Linie ist und als *semitangential* bezeichnet werden soll. Dieses Ergebnis, das sich übrigens für $n = 4$ auch direkt durch Überlagerung zweier Fälle nach Figur 2 (c) ableiten läßt, führt auf

Satz 3. Der Momentenvektor, der einer gleichmäßigen Verteilung von mehr als zwei (und auch von unendlich vielen) gleich großen und konstanten Azimutalkräften an einer Kreisscheibe entspricht, ist semitangential, das heißt, er halbiert den Winkel zwischen der Achse und der Tangente an die elastische Linie.

3. Virtuelle Arbeiten und Energien

Wir beschränken uns nun auf den prismatischen Stab (Figur 4) mit einer einzigen Biegesteifigkeit α und nehmen, um uns bezüglich der kinematischen Randbedingungen die nötige Freiheit zu wahren, an, daß er nur am oberen Ende $z = l$, und zwar durch ein Moment $\mathfrak{B}_l(W_{xl}, W_{yl}, W_{zl})$ gemäß Abschnitt 2 sowie durch eine zur Achse normale Kraft $\mathfrak{R}(K_x, K_y, 0)$ belastet sei. Führt man mit $\mathbf{v}(v_x = x', v_y = y', v_z = 1)$ den tangentialen Einheitsvektor ein, so ist die elastische Linie durch die Krümmungen v'_x, v'_y ihrer Projektionen gegeben, die Torsion durch den spezifischen Drehwinkel $\omega + \varepsilon'$, der sich aus dem konstanten, mit der Torsionssteifigkeit γ gemäß

$$\omega = \frac{W}{\gamma} \tag{3.1}$$

zu berechnenden Anteil unmittelbar vor dem Ausknicken und dem mit der Ausbiegung auftretenden Zuwachs ε' zusammensetzt.

Die Deformationsenergie des Stabes ist in bekannter Weise durch

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l [\alpha (v'_x{}^2 + v'_y{}^2) + \gamma (\omega + \varepsilon')^2] dz \tag{3.2}$$

bestimmt, die Arbeit der inneren Kräfte bei einer virtuellen, durch die Variationen $\delta x, \delta y, \delta \varepsilon$ definierten Verformung mithin durch

$$\delta A_i = -\delta U = - \int_0^l [\alpha (v'_x \delta v'_x + v'_y \delta v'_y) + \gamma (\omega + \varepsilon') \delta \varepsilon] dz,$$

und dafür erhält man, partiell integriert,

$$\delta A_i = \int_0^l [\alpha (v''_x \delta v_x + v''_y \delta v_y) + \gamma \varepsilon'' \delta \varepsilon] dz - [\alpha (v'_x \delta v_x + v'_y \delta v_y) + \gamma (\omega + \varepsilon') \delta \varepsilon]_0^l. \tag{3.3}$$

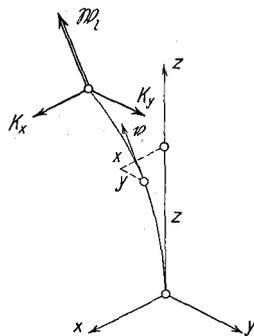


Fig. 4
Belastung durch eine
Dynamie $\mathfrak{R}, \mathfrak{B}_l$.

Da sich das obere Stabende um

$$\mathbf{r}_l = \int_0^l \mathbf{v} dz \quad (3.4)$$

verschiebt, ist ferner

$$V_K = - \int_0^l (K_x v_x + K_y v_y) dz \quad (3.5)$$

das Potential der Kraft \mathfrak{K} und

$$\delta A_K = - \delta V_K = \int_0^l (K_x \delta v_x + K_y \delta v_y) dz \quad (3.6)$$

ihre virtuelle Arbeit.

Mit der virtuellen Arbeit des Momentes \mathfrak{M}_l kann gleichzeitig diejenige des Momentes $\mathfrak{M}_0(W_{x0}, W_{y0}, W_{z0})$ am unteren Stabende berechnet werden, die unter Umständen (zum Beispiel im Knickfall V, Tafel 2) von Null verschieden sein kann. Denkt man sich zu diesem Zweck zunächst ein einzelnes Stabelement dz mit festgehaltenem unterem Ende z deformiert, so gibt die Änderung $\delta \mathbf{v}' dz$ des Tangentenvektors $\mathbf{v} + \mathbf{v}' dz$ am oberen Ende $z + dz$ die virtuelle Verbiegung an, während die virtuelle Verdrehung durch $\delta \varepsilon' dz$ gegeben ist. Bezeichnet man den vektoriellen Winkel, um den sich dabei das obere Ende des Elementes dem unteren gegenüber verdreht, mit $\delta \mathbf{u} dz$, wobei $\delta \mathbf{u}$ die Komponenten $(\delta \kappa_x, \delta \kappa_y, \delta \kappa_z)$ besitzt, so gilt

$$\delta \mathbf{v}' dz = \delta \mathbf{u} dz \times (\mathbf{v} + \mathbf{v}' dz) = \delta \mathbf{u} \times \mathbf{v} dz$$

und damit in erster Näherung

$$\delta v'_x = \delta \kappa_y, \quad \delta v'_y = -\delta \kappa_x. \quad (3.7)$$

Da ferner die virtuelle Drehung um die Tangente an die elastische Linie $\delta \varepsilon' dz$ sein muß, ist

$$\delta \varepsilon' dz = \delta \mathbf{u} dz (\mathbf{v} + \mathbf{v}' dz) = \mathbf{v} \delta \mathbf{u} dz,$$

mithin

$$\delta \varepsilon' = v_x \delta \kappa_x + v_y \delta \kappa_y + \delta \kappa_z; \quad (3.8)$$

man hat daher nach (3.7) und (3.8)

$$\delta \kappa_x = -\delta v'_y, \quad \delta \kappa_y = \delta v'_x, \quad \delta \kappa_z = v_x \delta v'_y - v_y \delta v'_x + \delta \varepsilon'.$$

Mit Rücksicht auf das Momentengleichgewicht für die z -Achse kann man

$$W_{zl} = -W_{z0} = W_z \quad (3.9)$$

setzen und erhält jetzt mit

$$\delta A_W = W_z \int_0^l (v_x \delta v'_y - v_y \delta v'_x + \delta \varepsilon') dz - (W_x \delta v_y - W_y \delta v_x)_l - (W_{\bar{x}} \delta v_{\bar{y}} - W_{\bar{y}} \delta v_{\bar{x}})_0 \quad (3.10)$$

die virtuelle Arbeit der Momente \mathfrak{M}_l und \mathfrak{M}_0 , wobei mit den Querstrichen im letzten Term der Tatsache Rechnung getragen wird, daß (Figur 5) im pseudo- und quasitangentialen Fall das am unteren Ende angreifende Kräftepaar dem oberen gegenüber verdreht sein kann. Diese Beziehung läßt sich mit Hilfe der Identität

$$\begin{aligned} & \delta \left[\frac{1}{2} W_z \int_0^l (v_x v'_y - v_y v'_x + 2 \varepsilon') dz \right] \\ &= W_z \int_0^l (v_x \delta v'_y - v_y \delta v'_x + \delta \varepsilon') dz \\ &+ \frac{1}{2} W_z (v_y \delta v_x - v_x \delta v_y)_0^l \end{aligned}$$

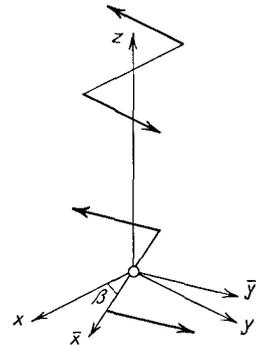


Fig. 5
Belastung durch gegeneinander verdrehte Kräftepaare.

noch umformen, und dabei darf der letzte Klammerausdruck für die untere Grenze durch $(v_{\bar{y}} \delta v_{\bar{x}} - v_{\bar{x}} \delta v_{\bar{y}})_0$ ersetzt werden, da er bis auf den Faktor 1/2 die bei der virtuellen Deformation von der Grundrißprojektion des Vektors v_0 überstrichene Fläche darstellt und somit einer Drehung des Koordinatensystems um die z-Achse gegenüber invariant ist. Man hat also

$$\delta A_W = \delta \left[\frac{1}{2} W_z \int_0^l (v_x v'_y - v_y v'_x + 2 \varepsilon') dz \right] + \left[\left(W_y - \frac{1}{2} W_z v_y \right) \delta v_x - \left(W_x - \frac{1}{2} W_z v_x \right) \delta v_y \right]_l + \left[\left(W_{\bar{y}} + \frac{1}{2} W_z v_{\bar{y}} \right) \delta v_{\bar{x}} - \left(W_{\bar{x}} + \frac{1}{2} W_z v_{\bar{x}} \right) \delta v_{\bar{y}} \right]_0 \quad (3.11)$$

und damit ist die virtuelle Arbeit von \mathfrak{M}_l sowie \mathfrak{M}_0 wenigstens teilweise als Variation eines Potentials dargestellt.

Sind die Momentenvektoren $\mathfrak{M}_l, \mathfrak{M}_0$ axial, also

$$W_{xl} = W_{yl} = W_{x0} = W_{y0} = 0, \quad W_z = W,$$

so reduzieren sich die beiden Randterme in (3.11) auf

$$-\frac{1}{2} W (v_y \delta v_x - v_x \delta v_y)_0^l,$$

und da sich dieser Ausdruck, solange δv_x und δv_y von Null verschieden sein können, nicht als Variation einer Funktion von v_x, v_y schreiben läßt, ist das Problem – wie bereits in [2] festgestellt – nur bei eingespannten Enden (Knickfälle I und II) konservativ.

Sind \mathfrak{B}_l und \mathfrak{B}_0 *tangential*, so ist

$$W_{xl} = W v_{xl}, \quad W_{yl} = W v_{yl}, \quad W_{\bar{x}0} = -W v_{\bar{x}0}, \quad W_{\bar{y}0} = -W v_{\bar{y}0}, \quad W_z = W,$$

und da hiemit die Randterme in (3. 11) in

$$\frac{1}{2} W (v_y \delta v_x - v_x \delta v_y)_0^l$$

übergehen, gilt hier dasselbe; insbesondere sind auch jetzt die Knickfälle III bis V nichtkonservativ.

Sind \mathfrak{B}_l und \mathfrak{B}_0 *semitangential*, so ist nach (2. 7)

$$W_{xl} = \frac{1}{2} W v_{xl}, \quad W_{yl} = \frac{1}{2} W v_{yl}, \quad W_{\bar{x}0} = -\frac{1}{2} W v_{\bar{x}0}, \quad W_{\bar{y}0} = -\frac{1}{2} W v_{\bar{y}0},$$

$$W_z = W,$$

und da hiemit die Randterme in (3. 11) sämtlich verschwinden, sind die semitangentialen Momente unabhängig von den kinematischen Randbedingungen konservativ. Ihre potentielle Energie ist

$$V_W = -\frac{1}{2} W \int_0^l (v_x v'_y - v_y v'_x + 2 \varepsilon') dz, \quad (3. 12b)$$

und ihre virtuelle Arbeit wird hieraus (unter Durchführung einer partiellen Integration) mit

$$\delta A_W = -\delta V_W = W \int_0^l (v'_y \delta v_x - v'_x \delta v_y + \delta \varepsilon') dz + \frac{1}{2} W (v_x \delta v_y - v_y \delta v_x)_0^l \quad (3. 13b)$$

gewonnen.

Sind \mathfrak{B}_l und \mathfrak{B}_0 *quasitangential*, so ist nach (2. 3)

$$W_{xl} = W v_{xl}, \quad W_{yl} = 0, \quad W_{\bar{x}0} = -W v_{\bar{x}0}, \quad W_{\bar{y}0} = 0, \quad W_z = W.$$

Die Randglieder in (3. 11) reduzieren sich also auf

$$-\frac{1}{2} W [(v_y \delta v_x + v_x \delta v_y)_l - (v_{\bar{y}} \delta v_{\bar{x}} + v_{\bar{x}} \delta v_{\bar{y}})_0],$$

und da man hierfür auch

$$-\delta \left[\frac{1}{2} W (v_{xl} v_{yl} - v_{\bar{x}0} v_{\bar{y}0}) \right]$$

schreiben kann, sind auch die quasitangentialen Momente konservativ. Ihre potentielle Energie ist

$$V_W = -\frac{1}{2} W \int_0^l (v_x v'_y - v_y v'_x + 2 \varepsilon') dz + \frac{1}{2} W (v_{x_l} v_{y_l} - v_{\bar{x}_0} v_{\bar{y}_0}) \quad (3.12c)$$

und ihre virtuelle Arbeit

$$\delta A_W = W \int_0^l (v'_y \delta v_x - v'_x \delta v_y + \delta \varepsilon') dz - W (v_{y_l} \delta v_{x_l} - v_{\bar{y}_0} \delta v_{\bar{x}_0}). \quad (3.13c)$$

Sind schließlich \mathfrak{B}_l und \mathfrak{B}_0 *pseudotangential*, so hat man nach (2. 2)

$$W_{x_l} = W (v_{x_l} + v_{y_l} \operatorname{tg} \tau_l), \quad W_{y_l} = 0, \quad W_{x_0} = -W (v_{\bar{x}_0} + v_{\bar{y}_0} \operatorname{tg} \tau_0), \quad W_{y_0} = 0, \\ W_z = W (1 - \varepsilon_l \operatorname{tg} \tau_l) = W (1 - \varepsilon_0 \operatorname{tg} \tau_0),$$

und wenn man, wie es die Beschränkung auf Terme zweiter Ordnung erfordert, hier $W_z = W$ setzt, erhält man aus den Randgliedern in (3. 11)

$$-\frac{1}{2} W [(v_y \delta v_x + v_x \delta v_y)_l - (v_{\bar{y}} \delta v_{\bar{x}} + v_{\bar{x}} \delta v_{\bar{y}})_0] + 2 (v_{y_l} \delta v_{y_l} \operatorname{tg} \tau_l - v_{\bar{y}_0} \delta v_{\bar{y}_0} \operatorname{tg} \tau_0).$$

Da man hierfür auch

$$-\delta \left[\frac{1}{2} W (v_{x_l} v_{y_l} - v_{\bar{x}_0} v_{\bar{y}_0} + v_{y_l}^2 \operatorname{tg} \tau_l - v_{\bar{y}_0}^2 \operatorname{tg} \tau_0) \right]$$

schreiben kann, sind auch die pseudotangentialen Momente konservativ. Ihre potentielle Energie ist

$$V_W = -\frac{1}{2} W_z \int_0^l (v_x v'_y - v_y v'_x + 2 \varepsilon') dz \\ + \frac{1}{2} W (v_{x_l} v_{y_l} - v_{\bar{x}_0} v_{\bar{y}_0} + v_{y_l}^2 \operatorname{tg} \tau_l - v_{\bar{y}_0}^2 \operatorname{tg} \tau_0) \quad (3.12d)$$

und ihre virtuelle Arbeit

$$\delta A_W = W_z \int_0^l (v'_y \delta v_x - v'_x \delta v_y + \delta \varepsilon') dz \\ - W [v_{y_l} (\delta v_{x_l} + \delta v_{y_l} \operatorname{tg} \tau_l) - v_{\bar{y}_0} (\delta v_{\bar{x}_0} + \delta v_{\bar{y}_0} \operatorname{tg} \tau_0)]. \quad (3.13d)$$

Durch Zusammenfassen sämtlicher Ergebnisse erhält man endlich

Satz 4. Semi-, quasi- und pseudotangentiale Momente sind im Gegensatz zu den axialen und tangentialen stets konservativ.

Auf Grund dieses Satzes können Stabilitätsprobleme mit semi-, quasi- und pseudotangentialen Momenten mit Hilfe des statischen Stabilitätskriteriums [4] gelöst werden.

4. Differentialgleichungen und Randbedingungen

Die virtuelle Arbeit sämtlicher inneren und äußeren Kräfte ist durch $\delta A = \delta A_i + \delta A_K + \delta A_W$ gegeben und nimmt, wenn man (3.3), (3.6) und (3.13) addiert, die Form

$$\delta A = \int_0^l (\alpha v_x'' + W v_y' + K_x) \delta v_x dz + \int_0^l (\alpha v_y'' - W v_x' + K_y) \delta v_y dz + \int_0^l \gamma \varepsilon'' \delta \varepsilon dz + R \quad (4.1)$$

an. Dabei ist mit R der Randterm bezeichnet, der im semitangentialen Fall mit

$$R = - \left\{ \left(\alpha v_x' + \frac{1}{2} W v_y \right) \delta v_x + \left(\alpha v_y' - \frac{1}{2} W v_x \right) \delta v_y + [\gamma (\omega + \varepsilon') - W] \delta \varepsilon \right\}_0^l \quad (4.2b)$$

im quasitangentialen mit

$$R = - \left\{ [(\alpha v_x' + W v_y) \delta v_x + \alpha v_y' \delta v_y]_l + [(\alpha v_x' + W v_y) \delta v_x + \alpha v_y' \delta v_y]_0 + \{[\gamma (\omega + \varepsilon') - W] \delta \varepsilon\}_0^l \right\} \quad (4.2c)$$

und im pseudotangentialen mit

$$R = - \left\{ [(\alpha v_x' + W v_y) \delta v_x + (\alpha v_y' + W v_y \operatorname{tg} \tau) \delta v_y]_l + [(\alpha v_x' + W v_y) \delta v_x + (\alpha v_y' + W v_y \operatorname{tg} \tau) \delta v_y]_0 + \{[\gamma (\omega + \varepsilon') - W_x] \delta \varepsilon\}_0^l \right\} \quad (4.2d)$$

einzusetzen ist.

Nach dem statischen Stabilitätskriterium ist die kritische die kleinste Belastung, unter der eine nichttriviale, das heißt mit einer Verbiegung der Stabachse verbundene Gleichgewichtslage existiert. In dieser muß die virtuelle Arbeit δA für jede passende, das heißt mit den kinematischen Randbedingungen verträgliche Verschiebung verschwinden. Hieraus folgt erstens, daß die spezifische Verdrehung ε' konstant ist, und zwar hat sie im semi- und quasitangentialen Fall zufolge (3.1) und (4.2) den Wert Null, während sie im pseu-

dotangentialen Fall von Null verschieden sein kann. Zweitens erhält man für die Verbiegung die Differentialgleichungen

$$\alpha v_x'' + W v_y' + K_x = 0, \quad \alpha v_y'' - W v_x' + K_y = 0 \quad (4.3)$$

und für diejenigen Enden, an denen v_x, v_y frei, der Stab also nicht eingespannt ist, im semitangentialen Fall die Randbedingungen

$$\alpha v_x' + \frac{1}{2} W v_y = 0, \quad \alpha v_y' - \frac{1}{2} W v_x = 0, \quad (4.4b)$$

im quasitangentialen

$$\alpha v_{xl}' + W v_{yl} = 0, \quad v_{yl}' = 0 \quad (4.4c)$$

beziehungsweise

$$\alpha v_{x0}' + W v_{y0} = 0, \quad v_{y0}' = 0 \quad (4.5c)$$

und im pseudotangentialen

$$\alpha v_{xl}' + W v_{yl} = 0, \quad \alpha v_{yl}' + W v_{yl} \operatorname{tg} \tau_l = 0 \quad (4.4d)$$

beziehungsweise

$$\alpha v_{x0}' + W v_{y0} = 0, \quad \alpha v_{y0}' + W v_{y0} \operatorname{tg} \tau_0 = 0. \quad (4.5d)$$

Die Differentialgleichungen (4.3) sowie die dynamischen Randbedingungen (4.4), (4.5) lassen sich auch direkt dadurch erhalten, daß man unter Berücksichtigung der Neigung der elastischen Linie die beiden Biegemomente bestimmt und gleich $\alpha v_x'$ bzw. $\alpha v_y'$ setzt. Sie sind noch durch die kinematischen Randbedingungen, nämlich die an eingespannten Enden gültigen Beziehungen

$$v_x = 0, \quad v_y = 0 \quad (4.6)$$

sowie die Forderungen

$$K_x = 0, \quad K_y = 0 \quad (4.7)$$

beziehungsweise

$$\int_0^l v_x dz = 0, \quad \int_0^l v_y dz = 0 \quad (4.8)$$

zu ergänzen, je nachdem das obere Ende frei verschieblich oder seitlich geführt ist.

Die weitere Behandlung erfolgt zweckmäßig komplex, und zwar dadurch, daß man

$$v_x + i v_y = v, \quad K_x + i K_y = K \quad (4.9)$$

setzt und die Abkürzungen

$$\frac{W}{\alpha} = w, \quad \frac{K}{\alpha} = c \quad (4.10)$$

einführt. Die Differentialgleichungen (4. 3) lassen sich nämlich auf diese Weise mit

$$v'' - i w v' + c = 0 \quad (4. 11)$$

zusammenfassen, die Randbedingungen (4. 4) bis (4. 8) mit

$$v' - \frac{1}{2} i w v = 0, \quad (4. 12b)$$

$$v'_{xl} + w v_{yl} = 0, \quad v'_{yl} = 0, \quad (4. 12c)$$

$$v'_{\bar{x}0} + w v_{\bar{y}0} = 0, \quad v'_{\bar{y}0} = 0, \quad (4. 13c)$$

$$v'_{xl} + w v_{yl} = 0, \quad v'_{yl} + w v_{yl} \operatorname{tg} \tau_l = 0, \quad (4. 12d)$$

$$v'_{\bar{x}0} + w v_{\bar{y}0} = 0, \quad v'_{\bar{y}0} + w v_{\bar{y}0} \operatorname{tg} \tau_0 = 0, \quad (4. 13d)$$

$$v = 0, \quad (4. 14)$$

$$c = 0, \quad (4. 15)$$

$$\int_0^l v dz = 0. \quad (4. 16)$$

In den nächsten Abschnitten sollen mit Hilfe dieser Beziehungen die kritischen Momente in den Knickfällen I bis V (Tafel 2) ermittelt werden, jetzt aber (im Gegensatz zu Tafel 1) unter der Annahme einer semi-, quasi- bzw. pseudotangentialen Einleitung des Torsionsmomentes. Da an nichteingespannten Enden je nach der Art des Kraftangriffs verschiedene Randbedingungen zu verwenden sind, gilt – unter dem Vorbehalt seiner Bestätigung in den Abschnitten 5, 6 und 8 –

Satz 5. Der Betrag des kritischen Momentes in einem bestimmten Knickfall hängt im allgemeinen davon ab, ob es axial, tangential, semi-, quasi- oder pseudotangential angenommen wird.

In den Knickfällen I und II, in denen beide Enden eingespannt sind, ist freilich das Knickmoment bei tangentialer, semi- und quasitangentialer Belastung dasselbe wie bei axialer, während aber mit Rücksicht auf (2. 1) bei pseudotangentialer Belastung auch hier ein neuer Wert zu erwarten ist.

5. Knickung durch ein semitangenciales Moment

Da das Stabilitätsproblem nach Abschnitt 3 konservativ, das Knickmoment mithin sicher von Null verschieden ist, darf man in (4. 11) $w \neq 0$ voraussetzen und erhält dann mit

$$v = A e^{i w z} - i \frac{c}{w} z + B \quad (5. 1)$$

die allgemeinste Lösung, die noch drei unbekannte komplexe Konstanten A , B und C enthält.

Im *Knickfall IIIb*, der sich von IIIa (Tafel 1) nur in der Neigung von \mathfrak{B} unterscheidet, reduziert sich (5. 1) zufolge der am unteren Ende gültigen Randbedingung (4. 14) sowie (4. 15) auf

$$v = A (e^{i w z} - 1). \quad (5. 2)$$

Die für das obere Ende formulierte Randbedingung (4. 12b) führt alsdann auf die Eigenwertgleichung $\exp(i w l) = -1$ mit den absolut kleinsten Wurzeln $w = \pm \pi/l$, nach (4. 10) also auf das Knickmoment

$$W_k = \pm \pi \frac{\alpha}{l}. \quad (5. 3)$$

Im *Knickfall IVb* führt die für das untere Ende formulierte Randbedingung (4. 14) zusammen mit (4. 16) auf

$$v = A \left[e^{i w z} + \frac{2}{l} \left(1 - \frac{e^{i w l} - 1}{i w l} \right) z - 1 \right] \quad (5. 4)$$

und die Randbedingung (4. 12b) für das obere Ende mit

$$w l = W \frac{l}{\alpha} = u \quad (5. 5)$$

auf die Eigenwertgleichung

$$\operatorname{ctg} \frac{u}{2} = \frac{u}{2} + \frac{2}{u},$$

der man $u/2 = \pm 3,406$ und damit das Knickmoment

$$W_k = \pm 6,812 \frac{\alpha}{l} \quad (5. 6)$$

entnimmt.

Im *Knickfall Vb* liefert die Randbedingung (4. 16) zunächst

$$v = A \left(e^{i w z} - \frac{2}{l} \cdot \frac{e^{i w l} - 1}{i w l} z \right) - B \left(\frac{2}{l} z - 1 \right) \quad (5. 7)$$

und die für beide Enden formulierte Randbedingung (4. 12b) mit (5. 5)

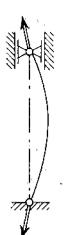
$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{u_1^3}{2} = 0.$$

Hieraus gewinnt man $u/2 = \pm 2,456$ und hat somit

$$W_k = \pm 4,912 \frac{\alpha}{l}. \quad (5. 8)$$

Die hier unterdrückte Rechnung für die Knickfälle I und II bestätigt die für ein axiales Moment erhaltenen Resultate. Sie sind mitsamt den neuen¹⁾ in Tafel 2 zusammengestellt, und zwar ist $k = u/\pi$ der in die Greenhillsche Formel (1. 1) einzusetzende Zahlenfaktor.

Tafel 2
Knickfaktor k bei axialer, semi-, quasi- und pseudotangentialer Belastung

Knickfälle	I	II	III	IV	V
Randbed.					
(a) axiales Moment	2,861	2	0	0	2
(b) semiang. Moment	2,861	2	1	2,168	1,564
(c) quasitang. Moment	2,861	2	0,5	1,576	$\beta=0: 1$ $\beta=\frac{\pi}{2}: 1,021$
(d) pseudotang. Moment	∞	∞	∞	∞	$\beta=0: \infty$

6. Knickung durch ein quasitangenciales Moment

Um das Knickmoment auch in den quasitangentialen Fällen zu ermitteln, kann man an die Lösungen (5. 2), (5. 4) und (5. 7) anknüpfen, die aber jetzt – da sich die noch nicht verwendeten Randbedingungen (4. 12c), (4. 13c) nicht komplex schreiben lassen – unter Zerlegung der Konstanten gemäß $A = A_x + i A_y$, $B = B_x + i B_y$ in ihre Real- und Imaginärteile aufgespalten werden müssen.

Im Knickfall IIIc führt (5. 2) mit der Randbedingung (4. 12c) zusammen auf die Eigenwertgleichung $\cos(w l) = 0$ und damit auf das Knickmoment

$$W_k = \pm \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\alpha}{l}. \quad (6. 1)$$

¹⁾ Die genauere Berechnung sämtlicher Zahlenwerte verdanke ich – wie auch die Kontrolle der übrigen Resultate – Herrn U. HOCHSTRASSER, dipl. Phys. ETH.

Im *Knickfall IVc* hat man (5.4) analog zu behandeln und kommt mit (5.5) auf die Eigenwertgleichung

$$\left(\frac{u^4}{4} + 2\right) \cos u + 2u \sin u - u^2 - 2 = 0.$$

Die absolut kleinsten, von Null verschiedenen Wurzeln derselben sind $u = \pm 4,952$, das Knickmoment mithin

$$W_k = \pm 4,952 \frac{\alpha}{l}. \quad (6.2)$$

Im *Knickfall Vc* enthält die Eigenwertgleichung, die mit (4.12c) und (4.13c) aus (5.7) gewonnen wird, den Winkel β , um den (Figur 5) die beiden belastenden Kräftepaare gegeneinander verdreht sind. Sie lautet mit (5.5)

$$u^3 \sin u \cos^2 \beta + \left[\left(\frac{u^4}{4} - 2u^2\right) \sin u + (u^3 - 2u) \cos u + 2u\right] \cos \beta \sin \beta + \left[\left(\frac{u^4}{4} - 2u^2 + 2\right) \cos u + 2u \sin u + u^2 - 2\right] \sin^2 \beta = 0.$$

Im praktisch wichtigsten Sonderfall gegeneinander unverdrehter Kräftepaare ($\beta = 0$) reduziert sie sich auf $\sin u = 0$ und ergibt das Knickmoment

$$W_k = \pm \pi \frac{\alpha}{l}. \quad (6.3)$$

Sind andererseits die Paare um einen rechten Winkel gegeneinander verdreht ($\beta = \pi/2$), so erhält man

$$\left(\frac{u^4}{4} - 2u^2 + 2\right) \cos u + 2u \sin u + u^2 - 2 = 0$$

und hieraus mit $u = \pm 3,207$ das Knickmoment

$$W_k = \pm 3,207 \frac{\alpha}{l}. \quad (6.4)$$

Auch diese Ergebnisse sind – zusammen mit den bekannten in den Knickfällen I und II – in Tafel 2 eingetragen¹⁾. Im übrigen liefert der Vergleich von (6.3) und (6.4) noch den

Satz 6. Bei mehr als einem quasitangentialen Moment hängt die kritische Belastung von der gegenseitigen Lage der Kräftepaare ab.

7. Bindungen und kritische Belastung

In der Theorie der Schwingungen wird gezeigt, daß die kleinste Eigenfrequenz mit zunehmender Anzahl der Bindungen im allgemeinen anwächst,

¹⁾ Sie gelten, wie W.T. KOITER festgestellt hat, in den Fällen I bis IV auch für Wellen, die durch ein Kreuzgelenk auf Torsion beansprucht werden.

keinesfalls aber abnimmt. Mit Rücksicht auf die Analogie, die zwischen Schwingungsaufgaben einerseits und Stabilitätsproblemen bei statischer Behandlung andererseits besteht [4], [9], ist zu erwarten, daß ein ähnlicher Satz ganz allgemein auch für die kritische Belastung gilt. In der Tat zeigt Tafel 2, daß das Knickmoment sowohl bei semitangentialer wie quasitangentialer Belastung von Knickfall III über II bis I, von III bis IV und von V bis IV anwächst, und beim Vergleich der zugehörigen Eulerschen Knicklasten stellt man dasselbe Verhalten fest.

Ein beliebiges konservatives System A , das gewissen Bindungen unterliegt, ist stabil, solange seine potentielle Energie positiv definit, nämlich in einer trivialen Gleichgewichtslage Null und in jeder anderen kinematisch möglichen – das heißt mit den Bindungen verträglichen – Lage größer als Null ist. Dieser Satz liegt [4] dem energetischen Stabilitätskriterium zugrunde. Unterscheidet sich ein zweites System B nur darin von A , daß es neben den Bindungen von A eine oder mehrere weitere starre, das heißt keine Arbeit leistenden Bindungen aufweist, so besitzt es die gleiche potentielle Energie wie A . Solange diese für A positiv definit ist, ist sie es auch für B , da jede kinematisch mögliche Lage von B auch eine solche von A ist; die kritische Belastung von B kann also nicht kleiner sein als diejenige von A . Damit gilt aber allgemein

Satz 7. Die kritische Belastung eines konservativen Systems nimmt beim Hinzufügen von starren, das heißt keine Arbeit leistenden Bindungen im allgemeinen zu, keinesfalls aber ab.

8. Knickung durch pseudotangentiale Momente

Bei der Knickung durch pseudotangentiale Momente treten einige neue Gesichtspunkte auf.

Erstens enthalten die hier erstmals zur Verwendung kommenden Randbedingungen (4. 12d) und (4. 13d) die Drehwinkel τ_l und τ_0 der Endquerschnitte. Diese hängen von der Querschnittsform und von der Querszahl des Materials ab, so daß mit der Möglichkeit von Knickfällen zu rechnen ist, bei denen das kritische Moment und insbesondere der Faktor k in der Greenhillschen Formel (1. 1) Funktionen des Werkstoffes und der Querschnittsform sind.

Zweitens ist daran zu erinnern, daß die in der Differentialgleichung (4. 11) und in verschiedenen Randbedingungen auftretende Konstante $w = W/\alpha$ mit dem Moment W unmittelbar vor dem Ausknicken gebildet ist, das nach (2. 1) und Figur 2 (d) gemäß

$$W = W_0 \cos \tau_l = 2 P a \cos \tau_l$$

aus dem Moment $W_0 = 2 P a$ vor der Belastung bzw. aus der am Querarm angreifenden Kraft P hervorgeht.

Wir dürfen uns im folgenden aus Symmetriegründen auf positive Momente W und damit auch auf positive τ_l beschränken. Als dritte Besonderheit der

pseudotangentialen Belastung ist dann zu erwähnen, daß der Stab nur ein beschränktes Moment aufnimmt. Da nämlich [wie aus Figur 2 (d) hervorgeht und bereits in Abschnitt 2 vermerkt wurde] $\tau_l < \pi/2$ und für den Drehwinkel am unteren Ende, sofern der Stab hier um die Achse drehbar gelagert und wie oben quasitangential belastet ist, aus Gleichgewichtsgründen $\tau_0 = -\tau_l$, mithin $\tau_0 > -\pi/2$ gilt, bleibt der totale Drehwinkel des Stabes kleiner als $\pi/2$ (bei festem unterem Ende) bzw. π (bei drehbarem unterem Ende), und damit bleibt auch W beschränkt. Jede Vergrößerung der Kräfte \mathfrak{P} , $-\mathfrak{P}$ hat nur eine Abnahme der Paarbreite zur Folge, wodurch eine Steigerung von W bis zum Betrag, der einem totalen Drehwinkel $\pi/2$ bzw. π entspricht, verunmöglicht wird.

Ist τ_l der totale Drehwinkel des Stabes und γ dessen Torsionssteifigkeit, so gilt nach (5. 5)

$$\tau_l = \frac{W}{\gamma} l = \frac{\alpha}{\gamma} w l = \frac{\alpha}{\gamma} u.$$

Führt man hier mit E , G , m , I , I_p , \bar{k} den Elastizitätsmodul, den Schubmodul und die Querszahl, das axiale sowie das polare Trägheitsmoment des Querschnittes und schließlich die für die Querschnittsform typische Konstante¹⁾ ein, die für rotationssymmetrische Profile den Wert 1 hat und für alle anderen größer ist, so gilt

$$\alpha = E I, \quad \gamma = \frac{G I_p}{\bar{k}} = \frac{1}{\bar{k}} \cdot \frac{m E}{2(m+1)} \cdot 2 I$$

und damit

$$\tau_l = \bar{k} \frac{m+1}{m} u. \quad (8. 1)$$

Ist $\tau_l - \tau_0 = 2 \tau_l$ der totale Drehwinkel, so kommt statt (8. 1)

$$\tau_l = \bar{k} \frac{m+1}{m} \cdot \frac{u}{2}. \quad (8. 2)$$

Da

$$\tau_l < \frac{\pi}{2} \quad (8. 3)$$

ist, sind nach (8. 1) bzw. (8. 2) größere Werte von u , nämlich solche, die der Ungleichung

$$u < \frac{1}{\bar{k}} \cdot \frac{m}{m+1} \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{bzw.} \quad u < \frac{1}{\bar{k}} \cdot \frac{m}{m+1} \pi \quad (8. 4)$$

widersprechen, nicht realisierbar, und wenn die kleinste positive Wurzel der Eigenwertgleichung der einen oder anderen Ungleichung (8. 4) nicht genügt, tritt überhaupt kein Knicken ein; es ist also $W = \infty$. Somit gilt

¹⁾ Vergleiche C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, *Technische Dynamik* (Springer, Berlin 1939), S. 549.

Satz 8. Bei pseudotangentialer Belastung kann der Stab unabhängig von ihrer Größe knickfest sein.

Dieser Satz bildet das Gegenstück zu der in Abschnitt 1 besprochenen, von W unabhängigen Labilität unter einem axialen Moment.

Mit der Tatsache, daß die Randbedingungen (4. 12d) und (4. 13d) die Winkel τ_l bzw. τ_0 enthalten, hängt eine vierte Besonderheit des pseudotangentialen Problems zusammen, nämlich die Notwendigkeit, die mit I bis V bezeichneten Knickfälle weiter zu unterteilen. Die Fälle I und II (vgl. Tafel 2)

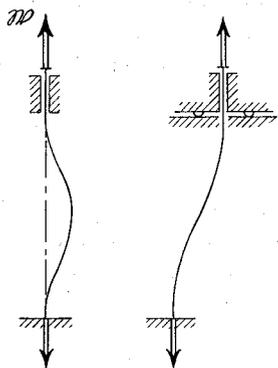


Fig. 6
Lagerung an
«eingespannten» Enden.

lassen sich allgemein nur dadurch verwirklichen, daß man sich mindestens einen der beiden Einspannkörper, beispielsweise den oberen, um die Achse drehbar (und im Fall II auch translatorisch verschieblich) denkt. Damit erhält die Axialkomponente von \mathfrak{B} am betreffenden Ende den Charakter einer Last (im Gegensatz zu einer Reaktion), und die Randbedingungen würden besser durch ein langes Lager (Figur 6) dargestellt. In dieser Weise kann man aber auch die Einspannung am unteren Ende oder diejenige in den Knickfällen III und IV modifiziert denken, und da sich dabei die bisher verwendeten Randbedingungen nicht ändern, ist diese Modifikation bei axialer, tangentialer, semi- oder quasitangentialer Belastung bedeutungslos. Im pseudotangentialen Fall dagegen kommt der von u

abhängige Winkel τ_l in den Randbedingungen (4. 12d) [und τ_0 in (4. 13d)] vor. Da er eine obere Schranke besitzt, muß in den Knickfällen I und II mit neuen Ergebnissen gerechnet werden. Da ferner sein Zusammenhang mit u , je nachdem nur ein Ende drehbar ist oder beide, durch (8. 1) oder (8. 2) gegeben wird, besteht die Möglichkeit verschiedener Knickmomente bei beiden Varianten ein und desselben Knickfalles. Wir wollen diese Varianten dadurch unterscheiden, daß wir die Belastung bei festem unterem Ende *einseitig*, bei drehbarem dagegen *beidseitig pseudotangential* nennen. Im Knickfall V ist übrigens aus praktischen Gründen nur die beidseitig pseudotangentialer Belastung von Bedeutung.

Im *Knickfall III d* kann man an die Lösung (5. 2) anknüpfen und erhält, wenn man sie noch den Randbedingungen (4. 12d) anpaßt, die Eigenwertgleichung

$$\operatorname{ctg} u + \operatorname{tg} \tau_l = 0. \quad (8. 5)$$

Nach (8. 1) und (8. 2) ist auf alle Fälle $\tau_l > u/2$, so daß man unter Berücksichtigung von (8. 3)

$$0 < \frac{u}{2} < \tau_l < \frac{\pi}{2} \quad (8. 6)$$

hat. Dieser Einschränkung zufolge ist aber

$$\operatorname{ctg} u + \operatorname{tg} \tau_i > \operatorname{ctg} u + \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(u/2)}{2 \operatorname{tg}(u/2)} + \operatorname{tg} \frac{u}{2} = \frac{1}{\sin u},$$

und da nach (8. 6) $1/\sin u > 0$ ist, die Eigenwertgleichung also im fraglichen Intervall keine Lösung besitzt, gilt sowohl bei ein- wie bei beidseitig pseudotangentialer Belastung

$$W_k = \pm \infty. \quad (8. 7)$$

Die *Knickfälle I d, II d* und *IV d* erledigen sich ohne Rechnung; auf Grund von Satz 7 gilt (8. 7) auch für sie, und zwar in beiden Unterfällen.

Im *Knickfall V d* knüpft man an die Lösung (5. 7) an, die noch den Randbedingungen (4. 12d) sowie (4. 13d) zu unterwerfen ist. Beschränkt man sich dabei auf den Fall im unbelasteten Zustand paralleler Querarme, indem man in Figur 5 $\beta = 0$ setzt und die Querstriche in (4. 13d) wegläßt, so kommt man mit der Abkürzung

$$\operatorname{tg} \tau_i = t > 0$$

auf die Eigenwertgleichung

$$(u + 2t - ut^2) \sin u - 2t(u + t) \cos u + 2t^2 = 0,$$

die man mit

$$g(u) = 2(1 - \cos u) - u \sin u$$

auch in der Form

$$f(u) = t^2 g(u) + 2t g'(u) + u \sin u = 0$$

anschreiben kann. Da u und t positiv vorausgesetzt werden durften und die Entwicklung $g(u) = u^4/12 \dots$ gilt, ist $f(u)$ für kleine u positiv. Da aber nach (8. 6) $0 < u < \pi$ ist und, wie man durch Ableiten feststellt, $g'(u)$ und $g''(u)$ in diesem Intervall größer als Null sind, gilt $f(u) > 0$ im ganzen Intervall. Hieraus folgt, daß das Knickmoment auch in beiden Unterfällen von *V d* durch (8. 7) gegeben ist.

Auch diese Resultate, die alle unabhängig vom Werkstoff und von der Querschnittsform sowie für ein- und beidseitig pseudotangentialer Belastung gelten, sind in Tafel 2 eingetragen.

9. Schlußbemerkungen

Der Vergleich der in Tafel 2 zusammengestellten Resultate zeigt, daß die Knickgefahr von der Art abhängt, wie das Torsionsmoment eingeleitet wird. Er bestätigt damit Satz 5 und gibt im übrigen zu folgenden Bemerkungen Anlaß:

a) Durch pseudotangentialer Momente läßt sich ein Stab der hier betrachteten Art in den Fällen I bis V (im Fall V jedenfalls unter der Voraussetzung $\beta = 0$) nicht knicken.

b) In den Fällen I und II stimmt das semi- und das quasitangentiale Knickmoment mit dem axialen überein; hier gilt also – vom pseudotangentialen Fall abgesehen – die Greenhillsche Formel in der von E. L. NICOLAI [8] für I und von A. G. GREENHILL [1] für II angegebenen Form.

c) In den Fällen III bis V, in denen sich das semi- und das quasitangentiale Knickmoment unterscheiden, ist das erste größer als das zweite. Die Knickgefahr nimmt also – sonst gleiche Verhältnisse vorausgesetzt – allgemein von der pseudotangentialen Belastung über die semitangentiale bis zur quasitangentialen zu.

d) Im Fall V ist das von A. G. GREENHILL [1] berechnete Knickmoment (vgl. Abschnitt 1) bei axialer Belastung durch A. TRÖSCH [7] bestätigt; bei semi- oder quasitangentialer Belastung unterschätzt es die Knickgefahr.

e) Die Greenhillschen Ergebnisse sind – vor allem im Fall V – nach verschiedenen Richtungen erweitert worden ([1], [2], [10] bis [14]), nämlich durch Einbezug einer Druckkraft, durch Verallgemeinerung auf Stäbe mit zwei verschiedenen Biegesteifigkeiten und durch Übertragung auf die Schraubenfeder sowie auf das Problem der kritischen Drehzahlen. Auch diese Erweiterungen bedürfen unter der Annahme einer semi-, quasi- oder pseudotangentialen Einleitung des Torsionsmomentes gewisser Korrekturen.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. G. GREENHILL, *On the Strength of Shafting when Exposed Both to Torsion and End Thrust*, Proc. Inst. Mech. Engin. 182 (1883).
- [2] H. ZIEGLER, *Stabilitätsprobleme bei geraden Stäben und Wellen*, ZAMP 2, 265 (1951).
- [3] H. ZIEGLER, *Zum Begriff des konservativen Systems*, Elemente Math. (erscheint demnächst).
- [4] H. ZIEGLER, *Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik*, Ing. Arch. 20, 49 (1952).
- [5] A. PFLÜGER, *Stabilitätsprobleme der Elastostatik* (Springer, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1950), S. 67.
- [6] H. ZIEGLER, *Ein nichtkonservatives Stabilitätsproblem*, Z. angew. Math. Mech. 31, 265 (1951).
- [7] A. TRÖSCH, *Stabilitätsprobleme bei tordierten Stäben und Wellen*, Dissertation ETH. (erscheint demnächst).
- [8] E. L. NICOLAI, *Über die Stabilität des zu einer Schraubenlinie gebogenen und gedrehten Stabes*, Z. angew. Math. Mech. 6, 30 (1926).
- [9] E. STIEFEL und H. ZIEGLER, *Natürliche Eigenwertprobleme*, ZAMP 1, 111 (1950).
- [10] R. GRAMMEL, *Das kritische Drillungsmoment von Wellen*, Z. angew. Math. Mech. 3, 262 (1923); siehe auch C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, *Technische Dynamik* (Springer, Berlin 1939), S. 540.
- [11] C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, *Technische Dynamik* (Springer, Berlin 1939), S. 552.

- [12] J. A. HARINGX, *On the Buckling and Lateral Rigidity of Helical Springs*, Proc. Nederl. Akad. Wet. 45, 533 und 650 (1942); vgl. auch Philips Res. Rep. 3, 401 (1948) und 4, 49 (1949).
- [13] H. ZIEGLER und A. HUBER, *Zur Knickung der gedrückten und tordierten Schraubenfeder*, ZAMP 1, 189 (1950).
- [14] R. GRAMMEL, *Der Einfluß der Wellentorsion auf die kritische Drehzahl*, Stodola-Festschrift (Orell-Füßli, Zürich und Leipzig 1929), S. 180; vgl. auch C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL, *Technische Dynamik* (Springer, Berlin 1939), S. 796.

Summary

Stability problems concerning thin rods and shafts subjected to torsion and thrust are usually treated under the assumption that during deflection the moment vectors of the external couples remain parallel to the axis. In consequence of this rather questionable assumption these problems are nonconservative; in some very simple buckling cases the critical load is found to be zero, and in numerous problems of critical speed every angular velocity results to be critical.

It seems more appropriate to assume that the vectors of the forces contributing to the external moments retain their directions. Then, as a rule, the moment vector is inclined, its slope, however, differing from that of the deflection curve and depending on the manner in which the forces are applied. Under this assumption the problem is conservative and yields new (in some cases even arbitrarily high) values for the critical load.

As a first application the buckling moments are recalculated for a prismatic rod with two equal flexural rigidities, subjected to torsion under various end conditions.

(Eingegangen: 27. 8. 1951.)

Zur Theorie des Magnetronverstärkers

Von FRITZ LÜDI, Baden¹⁾

Einleitung

Im folgenden wird dargelegt, wie nach den Gleichungen einer früheren Untersuchung des Verfassers über das Magnetron²⁾ die Theorie des Magnetronverstärkers in einfachster Weise folgt und für Synchronismus zwischen elektromagnetischer Welle und Elektronenwelle dieselben Resultate wie die Arbeit von BROSSART und DÖHLER³⁾ ergibt. Darüber hinaus führt eine Diskussion dieser Gleichungen auf die Möglichkeit der Verstärkung, wenn die Elektronenwelle langsamer als die elektromagnetische Welle läuft. Dieser Untersynchronismus ist physikalisch deshalb möglich (im Gegensatz zur Travelling-Wave-

¹⁾ Brown, Boveri & Cie., Baden.

²⁾ F. LÜDI, Helv. Phys. Acta 16, 59 (1943) [mit I bezeichnet].

³⁾ J. BROSSART und O. DÖHLER, Ann. Radioélectr. 3, 328 (1948).