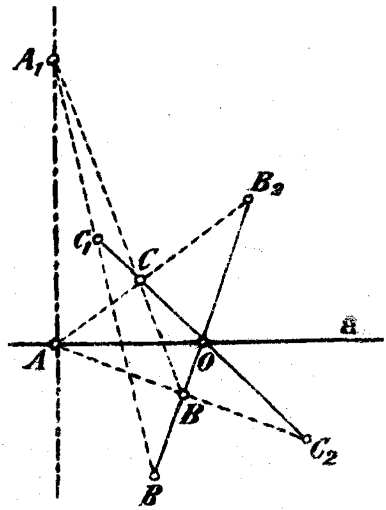
Bemerkungen zur Theorie der geometrischen Konstruktionen.

Von **Richard Obláth** in Budapest.

Die elementargeometrischen Konstruktionen wurden in neuerer Zeit aus sehr verschiedenen Gesichtspunkten untersucht. Kein Forscher erreichte jedoch die Bedeutung der Hilbertschen Unterscheidung. Dieser zeigte bekanntlich in seinen „Grundlagen der Geometrie", daß zur Ausführung gewisser Aufgaben zweiten Grades schon das Lineal und der „Streckenübertrager" genügen. Es sind jene Aufgaben, die mit Hilfe seiner vier ersten Axiomgruppen lösbar sind. Der Zirkel wird erst dann unentbehrlich, wenn zu den bisherigen Axiomen auch das Archimedische Axiom dazugenommen wird. Dieser wichtige Satz erfuhr bald bemerkenswerte Erweiterungen.



Herr Kürschák hat bewiesen,[1]) daß der Streckenübertrager immer durch ein fixes Eichmaß vertreten werden darf. Natürlich bleibt die Länge des Eichmaßes während einer und derselben Konstruktion konstant und braucht während der Zeichnung weder ausgedehnt noch zusammengeschoben werden. Seine Länge ist übrigens ganz unwesentlich, aber nicht seine Beweglichkeit. Es mußte gefordert werden, daß das Eichmaß an jede beliebige Gerade an allen ihren Punkten angelegt werden könne. In der Praxis ließe sich das notwendige Werkzeug am einfachsten so herstellen, daß man am Lineal mit zwei Strichen irgend eine Entfernung bezeichnet.

Es ist aber eine altbekannte Tatsache, daß sämtliche Konstruktionen zweiten Grades auch bloß mit dem Lineal ausgeführt werden können, wenn ein (der sog. Steinersche) Kreis samt Mittelpunkt

[1]) Math. Ann. 55, p. 597.

bereits vorgezeichnet ist.[1]) Da unsere Konstruktionen die Stetigkeitsaxiome nicht beanspruchen, so sollte man erwarten, daß in unserem Falle der Steinersche Kreis sich entbehren und durch eine einfachere Figur ersetzen läßt.

Um so überraschender war das Resultat des Herrn M. Bauer. Er hat nämlich den Beweis erbracht,[2]) daß der Steinersche Kreis sich auch bei den Étalonkonstruktionen nicht auf ein Polygon reduzieren läßt. Soweit ich die Literatur übersehen kann,[3]) gibt es noch immer keinen rein geometrischen Beweis für diesen merkwürdigen Satz. Herrn Bauers Beweis ist ein arithmetischer und stützt sich auf den Satz, daß jeder orthoide Bereich,[4]) der in einem Rationalitätsbereich enthalten ist, wieder einen Rationalitätsbereich bildet.

Zu gewissen Vereinfachungen konnte man doch gelangen. Ich kann z. B. beweisen, daß alle unsere Konstruktionen mit dem Lineal allein ausgeführt werden können, wenn in der Ebene irgendwo ein beliebig kleiner — aber endlicher — Bogen eines Kreises samt Mittelpunkt vorgezeichnet sind.

Es kommen folgende Fundamentalkonstruktionen in Betracht: 1. die Parallele, 2. die Senkrechte zu ziehen, 3. das Winkel- und 4. das Streckenübertragen.[5])

Die 3. Aufgabe kann durch 1. und 2. gelöst werden. Zur linearen Ausführung von 1. und 2. genügen schon der Mittelpunkt und fünf Peripheriepunkte eines Kreises. Das Streckenübertragen ist identisch mit der Winkelhalbierung. (Dies geht aus der Figur Kürscháks hervor.) Diese letzte Aufgabe lösen wir mit dem Lineal, wenn ein gegebener Kreisbogen vorliegt.

Wir schlagen etwa das folgende Verfahren ein:

Das Zentrum des Kreises sei O, der Zentriwinkel des Bogens α, der zu halbierende Winkel φ.

Ist
$$\varphi \leqq \alpha,$$
so kopieren wir φ aus O auf einen der Schenkel von α (nach innen). Den erhaltenen Winkel halbiert man mit Halbierung einer Sehne. $\frac{\varphi}{2}$ wird jetzt aus dem Scheitel von φ auf einen seiner Schenkel kopiert.

---

[1]) Herr Detlev Cauer hat vor kurzer Zeit (November 1912) bewiesen, daß der Mittelpunkt unentbehrlich ist (Math. Ann. 73, p. 90).

[2]) Mathematikai és Physikai Lapok 12, p. 251. Mathematische und naturw. Berichte aus Ungarn 20, pag 43.

[3]) Wenigstens findet sich in dem Jahrb. ü. d. Fortschritte d. Math. 1902—1908 nichts verzeichnet. Herr Vahlen macht in seinem jüngst erschienenen Buche pag. 61 die Bemerkung: „Der Streckenübertrager ist keinem gezeichnet vorliegenden Datum äquivalent, da ein solches, aus Punkten und Geraden bestehend, lediglich deren Koordinaten, aber keine sonstigen Irrationalitäten einführen würde." Wir glauben, diese Bemerkung wiederlegt die im Text ausgesprochene Meinung nicht.

[4]) Ü. diese Terminologie siehe man: J. König: Einl. in die allgem. Theorie d. algebr. Größen. Leipzig, Teubner.

[5]) Hilbert a. a. O. (3. Auflage, p. 108).

Ist hingegen
$$\varphi > \alpha,$$
so kopieren wir in den Winkel φ den Winkel α so oft hinein, bis der Rest φ_1
$$\varphi_1 < \alpha$$
wird.

Damit haben wir den vorausgeschickten Satz bewiesen.[1])

Eine andere interessante Reduktion entwickelt Herr Vahlen in einem an M. Bauer gerichteten Briefe. Er bemerkt, daß das Étalon doch nicht auf jeder Geraden aufgetragen werden muß. Man denke an den bekannten Satz von Steiner, daß zum Zeichnen paralleler Linien schon das Lineal genügt, wenn in der Zeichnungsebene ein Parallelogramm gegeben ist. Es gilt also der Satz, daß jede Konstruktion zweiten Grades, deren Lösung das Stetigkeitsaxiom nicht erheischt, mit dem Lineal ausführbar ist, im Falle eine Strecke aus einem Punkte in jede beliebige Richtung aufgetragen werden kann.

Durch diesen Verzicht auf die freie Beweglichkeit des Étalons — Vahlen nennt dieses Instrument den „Einheitsdreher" — erleiden die gewöhnlich gebrauchten Konstruktionen nur eine Parallelverschiebung. Da das Hilfsparallelogramm ohne Schwierigkeit rechtwinklig gewählt werden kann, so ist es wahrscheinlich, daß dadurch die eine oder die andere Konstruktion einfacher wird, als es auf den ersten Blick erscheinen würde. Es gibt mehrere Sätze von Steiner, die den Ausgangspunkt dieser Untersuchungen bilden könnten.

Auf diese Reduktionen will ich aber jetzt nicht eingehen. Wir behandeln vielmehr eine Aufgabe, die wir mit dem beweglichen Eichmaß ausführen werden. (Wobei übrigens das Eichmaß nur aus einem einzigen Punkte abgemessen wird.)

Wir errichten auf eine Gerade in einem gegebenen Punkte das Lot.

Hilbert löst in seinem schon zitierten Buche sehr schön die Aufgabe, auf eine Gerade nur mit Hilfe des Lineals und des Eichmaßes die Senkrechte zu fällen. Seine Lösung hat aus unserem Gesichtspunkte den Mangel, daß sie das Lot nicht in einem in vorhinein bezeichneten Punkte liefert. Seine Bestimmung erfordert also das Ziehen einer Parallelen.

---

[1]) Herr Vahlen beweist in seinem schon erwähnten Buche „Konstruktionen und Approximationen" Leipzig (Teubners Sammlung von Lehrbüchern der mathematischen Wissenschaften Bd. XXXIII), pag. 49, daß die projektiven quadratischen Konstruktionen mit dem Lineal allein lösbar sind, wenn ein beliebig kleines, aber endliches Stück eines Kegelschnittes gegeben ist. Der Mittelpunkt der Kurve braucht nicht bekannt zu sein.

Das ist nicht identisch mit unserem Ergebnis — das ich schon vor Erscheinen des Vahlenschen Buches hatte, jedoch ist es, wie mir Herr Vahlen am 24. April 1911 schrieb, implizite in seinem enthalten.

Da sich unser Satz auf metrische Konstruktionen bezieht, sind die Beweise vollkommen verschieden.

Auch die übrigen Autoren, die solche Konstruktionen angaben,[1]) befassen sich nicht mit unserer Aufgabe.

Wir stellen also das Lot an die gegebene Gerade a, in ihrem im voraus bestimmten Punkte A.

Die Lösung ist die folgende:

Von A ausgehend mißt man die Einheit auf a ab, der Endpunkt heiße O. Durch O ziehe man zwei beliebige Geraden, auf die wir das Eichmaß gleich nach beiden Richtungen übertragen. Ihre Endpunkte sind mit B_1, B_2 bezw. C_1, C_2 bezeichnet. $A\,C_2$ schneidet $B_1\,B_2$ in B; $A\,B_2$ schneidet $C_1\,C_2$ in C. Der Schnittpunkt von $B\,C$ mit $B_1\,C_1$ ist A_1. Dann ist $A\,A_1$ das gesuchte Lot.

Unser Vorgehen kann sehr leicht verifiziert werden. A ist nämlich der Mittelpunkt einer zirkularen Involution, die mit den Strahlenpaaren $A\,B_1$, $A\,B_2$; $A\,C_1$, $A\,C_2$ vollständig bestimmt ist und in welcher unser Verfahren dem a entsprechenden Strahl $A\,A_1$ liefert. ($A\,C_1$ und $A\,B_1$ sind in der Figur nicht gezeichnet.)

Die mitgeteilte Lösung kann auch durch den Pascalschen Satz gerechtfertigt werden, wenn man dran denkt, daß die Tangente den Berührungsradius senkrecht schneidet. Nun ist aber $A\,A_1$ die Tangente des Kreises $A\,B_1\,C_2\,B_2\,C_1$; bei der in der Figur gewählten Konstruktion ist $B\,C\,A_1$ die Pascalsche Gerade. Das Sechseck ist $A\,C_2\,C_1\,B_1\,B_2\,A$.

Elementarer gelang mir der Beweis nicht.

Es sei nun gestattet, die angegebene Konstruktion kurz mit der Hilbertschen zu vergleichen.

Beide benützen sechs Hilfslinien, das Eichmaß wird bei Hilbert viermal angesetzt und abgetragen, bei uns fünfmal.[2]) Die Anzahl der Elementaroperationen beträgt bei uns 29, bei Hilbert 26, wir erhalten aber das Lot im gewünschten Punkte. Die Erreichung dieses Ergebnisses erfordert bei Gebrauch des Hilbertschen Verfahrens noch das Ziehen einer Parallelen. Diese Konstruktion erfordert bei Beschränkung auf das Eichmaß weitere vier Linien, Einfachheitsgrad 19 bezw. 45.

Unsere Konstruktion kann also in der Praxis jedenfalls reiner vollzogen werden. Hilberts Verfahren hat den nicht zu unterschätzenden Vorzug, daß es mit einem so elementaren Satze begründet werden kann, daß es auch den Schülern höherer Schulen zugänglich ist, während wir an einige Grundbegriffe, bezw. leichte Sätze der projektivischen Geometrie angewiesen waren.

[1]) Ich kenne die folgenden Arbeiten: Feldblum: Ü. elementargeometr. Konstr. Göttinger Inauguraldissertation. Warschau 1899. Adler: Theorie d. geom. Konstruktionen. Leipzig, Sammlung Schubert Bd. 52. Wallenberg: Sitzungsberichte d. Berliner Math. Ges. 4, pag 21.

[2]) Über die Geometrographie der Eichmaßkonstruktionen ist mir nichts bekannt. Bei der Zählung im Text wurden — in möglichster Anlehnung an Lemoine — das Ansetzen des Lineals oder des Eichmaßes, das Ziehen einer Geraden und das Abmessen des Étalons als gleichberechtigte Einheiten gezählt. Ich glaube jedoch, daß da das Eichmaß in der Praxis wohl immer durch zwei am Lineal angebrachte Striche dargestellt wird, so könnte vielleicht das Anlegen des Lineals und des Eichmaßes in gewissen Fällen als eine einzige Grundoperation angesehen werden.