# Über eine spezielle Klasse reeller periodischer Funktionen.

Von **Celestyn Burstin** in Wien.

Nachdem ich in einem ersten einleitenden Kapitel eine Reihe von Sätzen, die sich auf das Verhältnis zwischen den im Lebesgueschen Sinne meßbaren Funktionen und den Funktionen der ersten Klasse der Baireschen $E$-Menge beziehen und die ich zum Teil in einer früheren Arbeit bewiesen, [1]) aufgestellt habe, verwende ich dieselben zur Untersuchung einer speziellen Klasse reell periodischer Funktionen, die folgende Eigenschaften haben. Die Werte der Perioden, mit denen diese Funktionen periodisch sind, liegen in dem Definitionsintervall dieser Funktionen überall dicht und ich habe mir daher erlaubt, solche Funktionen überall dicht periodisch zu nennen. Ich wende die aus dieser Untersuchung hervorgerufenen Sätze auf einige besondere Funktionen dieser Klasse an, die sich aus der Darstellung reeller Irrationalzahlen in bestimmten Zahlensystemen und aus ihren Kettenbruchentwicklungen ergeben und gelange so zu allgemeinen Resultaten, in denen bereits aufgestellte Theoreme von Borel[2]) und Bernstein[3]) zum Teil als spezielle Fälle enthalten sind.

## § 1.

Erster Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine endliche Funktion $f(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ meßbar im Sinne $L$ ist, besteht in der Existenz einer zweiten Funktion $\varphi(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ von der ersten Klasse, welche wesentlich der Funktion $f(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ gleich ist.[4])

Diesen Satz habe ich in meiner Arbeit[5]) für Funktionen von einer Variablen mit Hilfe des Tangentensatzes von Lebesgue bewiesen. In dieser Arbeit beweise ich den Satz mit ganz elementaren Hilfsmitteln für Funktionen von zwei Variablen; der Beweis für $n$ Variablen ist ganz analog.

---

[1]) Eigenschaften meßbarer und nichtmeßbarer Mengen. Sitzungsberichte der Kais. Akad. d. Wissensch. in Wien, math.-naturw. Klasse. Bd. CXXIII, Abt. 2 *a*. Juli 1914 (Seite 1525—51).

[2]) Rendiconti del circolo mat. di Palermo. Bd. 27, Seite 258—260.

[3]) Math. Annalen. Bd. 71, Seite 417—439.

[4]) F. Hausdorf, Grundzüge der Mengenlehre, 1914. S. 447.

[5]) Eigenschaften meßbarer und nichtmeßbarer Mengen.

α) Die Bedingung ist hinreichend; denn ist $f(x_1 x_2) \backsim \varphi(x_1 x_2)$, [1]) so ist $f(x_1 x_2) = \varphi(x_1 x_2) + \eta(x_1 x_2)$, wo $\eta(x_1 x_2)$ überall, höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge, Null ist. Es ist also $f(x_1 x_2)$ als Summe von zwei meßbaren Funktionen selbst meßbar.

β) Die Bedingung ist notwendig. Wir beweisen es zuerst für Funktionen, die nur zwei Werte 0 und 1 annehmen. Es sei $M_0$ die Menge der Punkte, wo $f(x_1 x_2)$ [2]) gleich 0 ist, und $M_1$ die Menge der Punkte, wo $f(x_1 x_2)$ gleich 1 ist.

Es sei $I(M_0) = k$, also $I(M_1) = 1 - k$. Wir bilden jetzt eine unendliche Folge von Quadratenmengen, die wir mit $\Sigma^{(1)} \Sigma^{(2)} \ldots \Sigma^{(n)} \ldots$ bezeichnen. Die Quadratenmenge $\Sigma^{(n)}$ enthält eine abzählbare Menge von Quadraten $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \delta_3^{(n)} \ldots \delta_{(m)}^{(n)} \ldots$ von folgenden Eigenschaften, 1. $\Sigma^{(n)}$ ist ganz in $\Sigma^{(n-1)}$ enthalten, 2. $\Sigma^{(n)}$ enthält alle Punkte der Menge $M_0$, 3. $\sum_{m=1}^{\infty} \delta_m^{(n)} = k + \varepsilon_n$, 4. $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$. Die Möglichkeit der Bildung einer solchen Folge $\Sigma^{(1)} \Sigma^{(2)} \ldots \Sigma^{(n)} \ldots$ folgt unmittelbar aus der Definition des Lebesgueschen Inhalts.

Man sieht unmittelbar, daß $I(D\{\Sigma^{(1)} \Sigma^{(2)} \ldots \Sigma^{(n)} \ldots\}) = I(M_0)$ und $D(\Sigma^{(1)} \Sigma^{(2)} \ldots \Sigma^{(n)} \ldots) \backsim M_0$ ist. Wir definieren jetzt eine Funktion $f_n(x_1 x_2)$ folgendermaßen:

$$f_n(x_1 x_2) = 0 \text{ für die Punkte der Menge } D(\Sigma^{(n)}, E)$$
$$f_n(x_1 x_2) = 1 \text{ für die Punkte der Menge } C\{D(\Sigma^n, E)\}$$

die Funktionenfolge $f_1 f_2 \ldots f_n \ldots$ ist konvergent, wie man leicht einsehen kann, es sei also $\lim_{n=\infty} f_n(x_1 x_2) = \Phi(x_1 x_2)$ und aus $D(\Sigma^{(1)} \Sigma^{(2)} \ldots \Sigma^{(n)} \ldots) \backsim M_0$ folgt, daß $\Phi(x_1 x_2) \backsim f(x_1 x_2)$ ist. Die Funktion $f_n(x_1 x_2)$ ist höchstens von der zweiten Klasse [3]), also die Funktion $\Phi(x_1 x_2)$ also Grenzfunktion von $f_1 f_2 \ldots f_n \ldots$ höchstens von der dritten Klasse. Nach einem Satz von Frechet [4]) ist aber jede Funktion der Baireschen Menge einer Funktion erster Klasse wesentlich gleich; es ist also $\Phi(x_1 x_2) \backsim \varphi(x_1 x_2)$, wo $\varphi(x_1 x_2)$ von der ersten Klasse ist. Daraus folgt also, daß $\varphi(x_1 x_2) \backsim f(x_1 x_2)$ ist.

Nimmt die Funktion $f(x_1 x_2)$ die Werte $a$ und $b$ an, so nimmt die Funktion $\dfrac{f(x_1 x_2) - a}{b - a}$ die Werte 0 und 1 an; es gibt also eine

---

[1]) D. h. $f(x_1 x_2)$ ist höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge gleich $\varphi(x_1 x_2)$.

[2]) $f(x_1 x_2)$ soll im Quadrate $E(0 \leqq x_1 \leqq, 0 \leqq x_2 \leqq 1)$ definiert sein.

[3]) Bezeichnen wir mit $f_n^{(m)}(x_1 x_2)$ eine Funktion, welche für die Punkte der Quadrate $\delta_{(1)}^{(n)}, \delta_{(2)}^{(n)}, \ldots \delta_{(m)}^{(n)}$ gleich Null ist und sonst überall Eins. Die Funktion $f_n^{(m)}(x_1 x_2)$ ist also höchstens von der ersten Klasse, da sie punktweise unstetig ist. Andrerseits ist $\lim_{m=\infty} f_n^{(m)}(x_1 x_2) = f_n(x_1 x_2)$, also $f_n(x_1 x_2)$ höchstens von der zweiten Klasse.

[4]) Rendiconti del circolo matematico. Bd. 22, Seite 14.

Funktion $\psi(x_1 x_2)$ von der ersten Klasse von der Eigenschaft, daß $\frac{f(x_1 x_2) - a}{b - a} \sim \psi(x_1 x_2)$ ist; es ist also

$$f(x_1 x_2) \sim a + (b - a)\psi(x_1 x_2) \sim \varphi(x_1 x_2),$$

wo $\varphi(x_1 x_2)$ von der ersten Klasse ist.

Nimmt die Funktion $f(x_1 x_2)$ $n$ Werte an, z. B. $a_1 a_2 \ldots a_n$, so bilden wir die Funktionen $F_1(x_1 x_2)$, $F_2(x_1 x_2) \ldots F_n(x_1 x_2)$, wo

$$F_k(x_1 x_2) = f(x_1 x_2) \text{ ist, wenn } f(x_1 x_2) = a_k$$

ist, sonst überall Null ist. Es ist also $f(x_1 x_2) = F_1(x_1 x_2) + F_2(x_1 x_2) + \ldots + F_n(x_1 x_2)$, jede dieser Funktionen ist meßbar und nimmt nur zwei Werte an. Es gibt also $n$ Funktionen $\varphi_1(x_1 x_2)$, $\varphi_2(x_1 x_2) \ldots \varphi_n(x_1 x_2)$ von der ersten Klasse von der Eigenschaft, daß $F_k(x_1 x_2) \sim \varphi_k(x_1 x_2)$ $(k = 1, 2 \ldots n)$ ist. Es ist also $f(x_1 x_2) = F_1(x_1 x_2) + F_2(x_1 x_2) + \ldots + F_n(x_1 x_2) \sim \varphi_1(x_1 x_2) + \varphi_2(x_1 x_2) + \ldots + \varphi_n(x_1 x_2) = \varphi(x_1 x_2)$ oder $f(x_1 x_2) \sim \varphi(x_1 x_2)$; da aber $\varphi(x_1 x_2)$ als eine endliche Summe von Funktionen von der ersten Klasse, selbst von der ersten Klasse ist, so ist also $f(x_1 x_2)$ wesentlich gleich einer Funktion von der ersten Klasse.

Um den Satz für den allgemeinen Fall zu beweisen, müssen wir zuerst einen Hilfssatz beweisen:

1. Hilfssatz: Ist $f_1 f_2 \ldots f_n \ldots$ irgend eine Folge von Funktionen der Baireschen Klasse, so ist dann auch die Funktion $F(x_1 x_2) = \limsup_{n=\infty} f_n(x_1 x_2)$ eine Funktion der Baireschen Klasse.

In der Tat ist $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ irgend eine Folge von Zahlen und $\limsup_{n=\infty} a_n = a$, so ist dann $a = \lim_{k=\infty} \lim_{n=\infty} M_{\substack{k,n\\ k \leqq n}}(a_k a_{k+1} \ldots a_n)$, wo $M_{\substack{k,n\\ k \leqq n}}(a_k a_{k+1} \ldots a_n)$ die größte Zahl zwischen den Zahlen $a_k a_{k+1} \ldots a_n$ bedeutet. Bezeichnet man analog mit $M_{\substack{k,n\\ k \leqq n}}(f_k(x_1 x_2), f_{k+1}(x_1 x_2 \ldots f_n(x_1 x_2))$ den größten Wert unter den Werten $f_k(x_1 x_2), f_{k+1}(x_1 x_2), \ldots f_n(x_1 x_2)$, so ist, wie man leicht einsehen kann, die Funktion $M_{\substack{k,n\\ k \leqq n}}(f_k(x_1 x_2), f_{k+1}(x_1 x_2), \ldots f_n(x_1 x_2))$ eine Funktion der Baireschen Klasse, da aber $F(x_1 x_2) = \lim_{k=\infty} \lim_{n=\infty} M_{\substack{k,n\\ k \leqq n}}(f_k(x_1 x_2), f_{k+1}(x_1 x_2), \ldots f_n(x_1 x_2))$ ist, so ist $F(x_1 x_2)$ als Doppelgrenze von Funktionen der Baireschen Klasse selbst eine Funktion der Baireschen Klasse. Dasselbe gilt für $\liminf_{n=\infty} f_n(x_1 x_2) = \varphi(x_1 x_2)$.

Nachdem wir den Hilfssatz bewiesen haben, gehen wir zum Beweis des allgemeinen Falles über.

Es sei $f(x_1 x_2)$ eine meßbare, geschränkte Funktion. Es gibt also zwei Zahlen $l$ und $L$ von der Eigenschaft, daß $l < f(x_1 x_2) < L$

ist. Wir können dann zu jedem noch so kleinen $\varepsilon$ eine Funktion $f_n(x_1 x_2)$ wählen, welche nur eine endliche Anzahl von Werten annimmt und die Eigenschaft besitzt, daß $|f(x_1 x_2) - f_n(x_1 x_2)| < \varepsilon$ ist.[1]) Die Funktionenfolge $f_1 f_2 \ldots f_n \ldots$ konvergiert also gleichmäßig gegen die Funktion $f(x_1 x_2)$. Nach dem vorhergehenden ist $f_n(x_1 x_2) \sim \varphi_n(x_1 x_2)$, wo $\varphi_n(x_1 x_2)$ eine Funktion von der ersten Klasse ist. Die Funktionenfolge $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n \ldots$ konvergiert also überall höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge gegen die Funktion $f(x_1 x_2)$. Bezeichnen wir mit $\Phi(x_1 x_2)$ den $\limsup\limits_{n=\infty} \varphi_n(x_1 x_2)$, so ist $\Phi(x_1 x_2)$ eine Funktion der Baireschen Klasse und es ist $f(x_1 x_2) \sim \Phi(x_1 x_2)$, da für die Punkte, wo $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(x_1 x_2)$ existiert: $\lim\limits_{n=\infty} \varphi(x_1 x_2) = \limsup\limits_{n=\infty} \varphi_n(x_1 x_2)$ ist. Die Funktion $\Phi(x_1 x_2)$ ist als eine Funktion der Baireschen Klasse wesentlich gleich einer Funktion $\varphi(x_1 x_2)$ von der ersten Klasse. Es ist also $f(x_1 x_2) \sim \varphi(x_1 x_2)$, w. z. b. w.

Ist $f(x_1 x_2)$ meßbar und nicht geschränkt (aber endlich), so führt man dieselbe Transformation ein, die ich in meiner Arbeit eingeführt habe,[2]) wodurch das Problem auf zwei geschränkte Funktionen zurückgeführt wird. Dadurch ist der Satz vollständig bewiesen.

2. **Satz**: Ist $M$ irgend eine meßbare Menge, welche im Bereiche $0 \leqq x_1 \leqq 1$, $0 \leqq x_2 \leqq 1 \ldots 0 \leqq x_n \leqq 1$ definiert ist, so gibt es in einem $n$ dimensionalen Parallelotop[3]) ein $n$ dimensionales Parallelotop von der Seitenlänge $\delta$, wo $I(M) = \delta^n$ oder 0 ist.

Der Beweis dieses Satzes wird geführt, indem man die Funktion $f(x_1 x_2 \ldots x_n)$ einführt, so daß

$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 1 \text{ für die Punkte der Menge } M$$
$$f(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0 \text{ für die Punkte der Menge } C(M) = N \text{ ist.}$$

Nach dem 1. Satze gibt es eine Funktion $\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)$ von der ersten Klasse, welche der Funktion $f(x_1 x_2 \ldots x_n)$ wesentlich gleich ist. Es sei:

$$\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n) = 1 \text{ für die Punkte der Menge } M_1$$
$$\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0 \text{ für die Punkte der Menge } N_1,$$

so muß $I(M) = I(M_1) = I\{D(M, M_1)\}$ und $I(N) = I(N_1) = I\{D(N, N_1)\}$ sein. Bezeichnet man $D(M, M_1)$ mit $M_2$ und

[1]) Lebesgue, Leçons sur l'intégration. Seite 101.

[2]) Eigenschaften meßbarer und nichtmeßbarer Mengen. Seite 1527.

[3]) d. h. $n$ dimensionaler Bereich von der Eigenschaft, daß $|x_k' - x_k''| \leqq \delta$ ist, wo $k = 1, 2 \ldots n$ ist. Ich benenne nachher immer ein $n$ dimensionales Parallelotop $n$ dimensionales Intervall $\delta$.

$D(N, N_1)$ mit $N_2$, so gibt es kein $n$-dimensionales Intervall, wo $M_2$ und $N_2$ überall dicht wären, da sonst $\varphi(x_1 x_2 \ldots x_n)$ in diesem $n$-dimensionalen Intervall total unstetig wäre. Daraus folgt also der 2. Satz.

3. Satz: Ist $I(M)$ in jedem noch so kleinem $n$-dimensionalen Intervall von Null verschieden, so muß ein $n$-dimensionales Intervall von der Seitenlänge $\delta$ existieren, wo $I(M) = \delta^n$ ist.

Nach dem 2. Satze muß ein $n$-dimensionales Intervall von der Seitenlänge $\delta$ existieren, wo $I(M) = \delta^n$ oder 0 ist; da aber in jedem noch so kleinen Intervall $I(M)$ von Null verschieden ist, so muß in dem $n$-dimensionalen Intervall von der Seitenlänge $\delta$, $I(M) = \delta^n$ sein.

Die Beweise der Sätze 2 und 3 sind für den Fall $n = 1$ in der Arbeit [1]) auf dieselbe Weise geführt worden.

4. Satz: Es seien gegeben zwei Mengen $M$ und $N$, wo $N = C(M)$ ist. Ist in jedem noch so kleinen $n$-dimensionalen Intervall $I_a(M) > 0$, so gibt es ein $n$-dimensionales Intervall von der Seitenlänge $\delta$, wo $I_a(M) = I_a(N) = \delta^n$ ist. In dem Intervall ist $M$ und $N$ nicht meßbar im Sinne $L$.

Der Beweis wird geführt auf dieselbe Weise, wie der Beweis des 2. Satzes in § 2 in meiner Arbeit. [2])

Sind zwei Mengen $P$ und $Q$, welche nicht elementenfremd sein brauchen, gegeben, und ist in jedem noch so kleinen Intervall $I_a(P) > 0$ und $I_a(Q) > 0$, so gibt es ein Intervall $\delta$, wo $I_a(P) = I_a(Q) = \delta^n$ ist; speziell sind die Mengen meßbar (z. B. Komplementärmengen nirgends dichter perfekter Mengen), so gibt es ein Intervall $\delta$, wo $I(P) = I(Q) = \delta^n$ ist. Dasselbe gilt für jede endliche Anzahl von Mengen $P_1 P_2 \ldots P_m$, es gibt also ein Intervall $\delta$, wo $I_a(P_1) = I_a(P_2) = \ldots = I_a(P_m) = \delta^n$ ist, speziell, wenn $P_1 P_2 \ldots P_m$ meßbar sind, ist $I(P_1) = I(P_2) = \cdots = I(P_m) = \delta^n$. Man sieht aber unmittelbar, daß der Satz für abzählbar viele Mengen $P_1 P_2 \ldots P_m \ldots$ nicht gelten muß. Um das zu zeigen, konstruiere ich folgendes Beispiel: Es seien die Mengen $P_1 P_2 \ldots P_m \ldots$ alle meßbar linear und im Intervall von der Länge 1 enthalten. Es sei $C(P_m)$ die Komplementärmenge der Menge $P_m$ in bezug auf das Intervall $\overline{0 - 1}$ und es sei die Menge $C(P_m)$ nirgends dicht perfekt vom Inhalt $1 - \varepsilon_m$, wo $\lim_{m=\infty} \varepsilon_m = 0$ ist. [3]) Für jede Menge $P_m$ gilt also die Beziehung $I(P_m) > 0$ in jedem noch so kleinen Intervall und doch gibt es nicht ein Intervall $\delta$, wo $I(P_1) = I(P_2) = \ldots I(P_m) = \ldots = \delta$ ist, da wie klein auch die Größe $\delta$ sein mag, es immer möglich ist, einen Index $n$ zu finden von der Eigenschaft, daß $\varepsilon_n < \delta$ ist; es

[1]) Eigenschaften meßbarer und nichtmeßbarer Mengen. Seite 1523.

[2]) Dieselbe Arbeit. Seite 1533.

[3]) Die Menge $C(C(P_1) + C(P_2) + \ldots C(P_m) + \ldots)$ ist von der zweiten Kategorie und vom Inhalt Null.

hat also die Menge $P_n$ den Inhalt $\varepsilon_n$, also einen kleineren Inhalt als $\delta$. Für nichtmeßbare Mengen gilt auch dieselbe Bemerkung (um das zu zeigen, muß man $P_m$ nichtmeßbar voraussetzen).

## § 2.

Wir wollen jetzt die Resultate des § 1 auf überall dichtperiodische Funktionen anwenden. Unter einer überall dichtperiodischen Funktion $f(x)$ verstehe ich folgendes. Es sei $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ irgend eine abzählbare überall dichte Menge auf der Strecke $(0 - 1)$, dann soll immer die Relation gelten: [1]

$$f(x + a_i) = f(x), \text{ wo } i = 1, 2 \ldots n \ldots$$

ist. Es gibt sehr einfache überall dichtperiodische Funktionen, z. B. $f(x) = 1$ für die rationale Punkte und $f(x) = 0$ für die irrationale Punkte. Diese Funktion hat überall dichte Perioden, und zwar sind alle rationalen Zahlen Perioden. Wir wollen uns hier nur mit meßbaren überall dichtperiodischen Funktionen beschäftigen. [2]

1. **Satz**: Jede stetige überall dichtperiodische Funktion ist konstant.

Denn es ist $f(o + a_i) = f(a_i) = f(o) = A$ und da die Menge $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ überall dicht liegt, so existiert für jeden Punkt $x$ eine Folge $a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_n} \ldots$, welche in der Menge $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ enthalten ist, von der Eigenschaft, daß $\lim\limits_{n=\infty} a_{k_n} = x$ ist. Wegen der Stetigkeit ist also $\lim\limits_{n=\infty} f(a_{k_n}) = f(\lim\limits_{n=\infty} a_{k_n})$, also $f(x) = f(o) = A$.

2. **Satz**: Jede unstetige überall dichtperiodische Funktion ist total unstetig.

In der Tat ist $f(x)$ irgend eine unstetige überall dichtperiodische Funktion, so nimmt sie mindestens zwei Werte, die voneinander verschieden sind, an. Bezeichnen wir diese Werte mit $b_1, b_2$ und sei $b_1 - b_2 = d$. Da $f(x)$ überall dichtperiodisch ist, so nimmt $f(x)$ die Werte $b_1, b_2$ in jedem noch so kleinen Intervall an, es ist also die Schwankung der Funktion $f(x)$ in jedem noch so kleinen Intervall mindestens gleich $d$, also $f(x)$ ist total unstetig. Es folgt daraus, daß $f(x)$ keine Funktion von der ersten Klasse sein kann, also keine Grenzfunktion von stetigen Funktionen.

3. **Satz**: Jede meßbare überall dichtperiodische Funktion ist höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge konstant.

In der Tat sei $f(x)$ irgend eine überall dichtperiodische Funktion, von der wir einstweilen voraussetzen, daß sie geschränkt ist. Es existieren also zwei Zahlen $l$ und $L$ von der Eigenschaft, daß $l < f(x) < L$ ist. Betrachten wir die Funktion $f(x)$ im Intervall

[1] Die Einschränkung ist nicht wesentlich. Die Menge $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ kann auch überall dicht zwischen $(-\infty, +\infty)$ liegen.

[2] Eine nichtmeßbare überall dichtperiodische Funktion ist die vom **Vitali** definierte Funktion, auch die in meiner Arbeit im § 4 definierte nichtmeßbare Funktion ist überall dichtperiodisch.

$0-1$; alle Eigenschaften der Funktion $f(x)$ gelten dann für jedes Intervall. Aus der Eigenschaft der überall dichten Periodizität folgt unmittelbar, daß, wenn der Inhalt der Menge $E(a < f(x) \leqq b)$, wo $a$ und $b$ irgend welche Zahlen sind, in irgend einem Intervall von Null verschieden ist, daß dann der Inhalt der Menge $E(a < f(x) \leqq b)$ in jedem noch so kleinen Intervall von Null verschieden ist und umgekehrt, ist der Inhalt der Menge $E(a < f(x) \leqq b)$ in irgend einem Intervall gleich Null, so ist der Inhalt der Menge $E(a < f(x) \leqq b)$ überall gleich Null (also ist $E(a < f(x) \leqq b)$ eine Nullmenge).

Es ist $I\{E(l < f(x) < L)\} = 1$ im Intervall $0-1$. Wir bezeichnen mit $l_1$ die Zahl $\frac{L+l}{2}$, dann ist

$$E(l < f(x) < L) = E(l < f(x) \leqq l_1) + E(l_1 < f(x) < L).$$

Eine von diesen Mengen muß eine Nullmenge sein, denn wären beide vom Inhalt größer als Null, so wären beide in jedem noch so kleinen Intervall von Null verschieden, also nicht meßbar nach dem vierten Satze im § 1. Wir haben aber vorausgesetzt, daß $f(x)$ meßbar ist. Es sei also die Menge $E(l_1 < f(x) < L)$ eine Nullmenge.[1] Wir bezeichnen jetzt mit $l_2$ die Zahl $\frac{l_1+l}{2}$, dann ist $E(l < f(x) \leqq l_1) = E(l < f(x) \leqq l_2) + E(l_2 < f(x) \leqq l_1)$, dann gilt wieder derselbe Schluß, es sei also $E(l < f(x) \leqq l_2)$ eine Nullmenge; allgemein bezeichnen wir die Menge $E(l_n < f(x) \leqq l_{n+1})$, zu der wir auf dieselbe Weise nach $n$ Schritten gelangen. Die Menge $E(l_n < f(x) \leqq l_{n+1})$ soll folgende Eigenschaften haben, erstens es soll $I\{E(l_n < f(x) \leqq l_{n+1})\} = 1$ im Intervall $0-1$ und zweitens soll $l_{n+1} - l_n = \frac{L+l}{2^n}$ sein. (Zu dieser Menge müssen wir nach $n$ Schritten gelangen, wie man leicht einsehen kann.) Wir bezeichnen jetzt mit $l_{n+2}$ die Zahl $\frac{l_{n+1}+l_n}{2}$, dann ist $E(l_n < f(x) \leqq l_{n+1}) =$ $= E(l_n < f(x) \leqq l_{n+2}) + E(l_{n+2} < f(x) \leqq l_{n+1})$, und es muß mindestens eine von diesen beiden Mengen eine Nullmenge sein; es sei das die Menge $E(l_n < f(x) \leqq l_{n+2})$. Den Durchschnitt aller so definierten Mengen vom Inhalt Eins bezeichnen wir mit $D$, dann gilt folgende Relation:

$$E(l < f(x) < L) = E(l_1 < f(x) < L) + E(l < f(x) \leqq l_2) + \dots$$
$$\dots + E(l_n < f(x) \leqq l_{n+2}) + \dots + D.$$

Es ist also

$$1 = I\{E(l < f(x) < L)\} = I\{E(l_1 < f(x) \leqq L)\} + I\{E(l \leqq f(x) \leqq l_2)\} + \dots$$
$$\dots + I\{E(l_n < f(x) \leqq l_{n+2})\} + \dots + I(D).$$

[1]) Es ist also $I\{E(l < f(x) \leqq l_1)\} = 1$ im Intervall $0-1$.

Da jede der Mengen $E(l_n < f(x) \leqq l_{n+2})$ eine Nullmenge ist, so muß $I(D) = 1$ im Intervall $0 - 1$ sein. Für die Punkte der Menge $D$ ist $f(x)$ gleich einer und nur einer Zahl, und diese Zahl ist nichts anderes als der Durchschnitt der Intervalle $(l_n - l_{n+2})$ (da die Intervalle $(l_n - l_{n+2})$ mit wachsendem $n$ gegen Null konvergieren, so definiert der Durchschnitt eine und nur eine Zahl, die wir mit $c$ bezeichnen). $f(x)$ ist also höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge im Intervall $(0 - 1)$, also auf einer Menge vom Inhalt Eins gleich $c$, w. z. b. w.

Ist die Funktion $f(x)$ nicht geschränkt, so können wir voraussetzen, daß sie positiv ist, denn es ist entweder $E(f(x) \leqq 0)$ oder $E(f(x) < 0)$ eine Nullmenge. Ist $E(f(x) < 0)$ eine Nullmenge,[1]) so ist $I\{E(f(x) \geqq 0)\} = 1$ im Intervall $0 - 1$; die Funktion $f(x) + k$, wo $k > 0$ ist, ist auch überall dichtperiodisch; also es ist $I\{E(f(x) + k \geqq 0)\} = 1$. Die Funktion $\frac{1}{f(x) + k} = \varphi(x)$ ist also auch eine überall dichtperiodische und hat die Eigenschaft, die Menge $E(f(x) + k \geqq 0)$ in die Menge $E\left(0 \leqq \varphi(x) \leqq \frac{1}{k}\right)$ überzuführen. Es ist also $I\left\{E\left(0 < \varphi(x) \leqq \frac{1}{k}\right)\right\} = 1$ und für die Funktion $\varphi(x)$ gilt die Eigenschaft, die wir bewiesen haben, also auch für die Funktion $f(x)$. Dadurch ist der Beweis vollständig erbracht.

4. Satz: Jede im Sinne $B$[2]) meßbare überall dicht periodische Funktion ist höchstens mit Ausnahme einer Menge erster Kategorie konstant.

In der Tat sei $f(x)$ irgend eine im Sinne $B$ meßbare, überall dichtperiodische Funktion, von der wir voraussetzen, daß sie geschränkt ist. Es existieren zwei Zahlen $l$ und $L$ von der Eigenschaft, daß $l < f(x) < L$ ist. Aus der Eigenschaft der überall dichten Periodizität folgt unmittelbar, daß, wenn die Menge $E(a < f(x) \leqq b)$ in irgend einem Intervall von der ersten bezw. von der zweiten Kategorie ist, daß dann die Menge $E(a < f(x) \leqq b)$ überall von der ersten bezw. von der zweiten Kategorie ist.

Die Menge $E(l < f(x) < L)$ ist also im ganzen Intervall $(0 - 1)$ von der zweiten Kategorie. Bezeichnen wir $l_1$ die Zahl $\frac{L - l}{n}$, wo $n > 2$ ist, dann ist $E(l < f(x) < L) = E(l < f(x) \leqq l + l_1) + E(l + l_1 < f(x) \leqq l + 2l_1) + \ldots + E(l + (n-1)l_2 < f(x) < L)$; von diesen $n$ Mengen können höchstens zwei aneinander stoßende

[1]) Ist $I\{E(f(x) < 0)\} = 1$, so ist $I\{E(-f(x) > 0)\} = 1$.

[2]) Die im Sinne $B$ meßbaren Funktionen gehören der $E$-Menge an, d. i. der Menge aller Funktionen, die man aus den stetigen durch (beliebig oft) wiederholte Grenzprozesse erzeugen kann. Diese Funktionen haben die Eigenschaft $m\{\omega'(f)\} = 0$ auf jeder perfekten Menge, d. h. sie sind höchstens punktweise unstetig nach Ausschluß einer Menge erster Kategorie.

Mengen von der zweiten Kategorie sein, denn sonst wäre $m\{\omega'(f)\} \overline{\gtrless} l_1 > 0$. [1]) Es seien das die Intervallmengen $E(l+ +(r-1)l_1 < f(x) \leqq l + r l_1)$ und $E(l + r l_1 < f(x) \leqq l+(r+1)l_1)$, mit der Summe dieser beiden Mengen verfahren wir auf dieselbe Weise und wir kommen wie bei dem Beweise des 3. Satzes zu der Menge $D^{(1)}$ [2]), die, wie man unmittelbar sieht, von der zweiten Kategorie ist. Für die Punkte dieser Menge ist $f(x)$ gleich einem konstanten $c^{(1)}$, w. z. b. w.

Wäre $f(x)$ nicht geschränkt, so verfahren wir wie beim Beweise des 3. Satzes.

Die Mengen $D$ und $D^{(1)}$ müssen nicht identisch sein. Wir wollen das an einem Beispiel zeigen. Es sei $P$ irgend eine perfekte nirgends dichte Menge vom Inhalt größer als Null und es sei $a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots a_n \ldots$ die Menge aller rationalen Zahlen. Wir bezeichnen dann mit $P_{a_m}$ die Menge, welche aus der Menge $P$ durch die Translation um die Strecke $a_m$ entsteht. Bezeichnen wir jetzt mit $\Pi$ die Menge aller Punkte, die mindestens in einer der Mengen $P_{a_1} P_{a_2} \ldots P_{a_n} \ldots$ vorkommen, so hat die Menge $\Pi$ die Eigenschaft $\Pi_{a_n} \equiv \Pi$, d. h. die Menge, welche aus der Menge $\Pi$ durch die Translation um die Strecke $a_n$ (wo $n = 1, 1 \ldots m \ldots$ ist) entsteht, ist mit der Menge $\Pi$ identisch. Die Menge $\Pi$ ist von der ersten Kategorie als abzählbare Menge von Mengen erster Kategorie und hat in jedem noch so kleinen Intervall einen von Null verschiedenen Inhalt. [3]) Die Komplementärmenge der Menge $\Pi$, die wir mit $Q$ bezeichnen, ist von der zweiten Kategorie (überall) und hat auch die Eigenschaft, daß $Q_{a_n} \equiv Q$ ist. Es muß also $Q$ eine Nullmenge sein, denn wäre $Q$ in einem noch so kleinen Intervall vom Inhalt größer als Null, so wäre überall $Q$ vom Inhalt größer als Null. Das ist aber unmöglich, da $Q$ meßbar im Sinne $L$ ist und daher beide Mengen $\Pi$ und $Q$ nicht überall vom Inhalt größer als Null sein können. Wir definieren jetzt eine Funktion $f(x)$ folgendermaßen:

$$f(x) = 1 \text{ für die Punkte der Menge } \Pi$$
$$f(x) = 0 \text{ für die Punkte der Menge } Q.$$

Die Funktion $f(x)$ hat, wie man sieht, die verlangte Eigenschaft, denn als Menge $D$ ergibt sich die Menge $P$, als Menge $D^{(1)}$ die Menge $Q$.

Wir bezeichnen irgend einen Punkt $z_1\, z_2 \ldots z_n$ in dem $n$-dimensionalen Raume mit $z_1 i_1 + z_2 i_2 + \cdots + z_n i_n$, wo $i_1\, i_2 \ldots i_n$ irgend welche Einheitsvektoren des $n$-dimensionalen Raumes sind; wir ordnen also ganz einfach jedem Zahlkomplex $z_1\, z_2 \ldots z_n$ einen Vektor zu. Die Funktion $f(z_1\, z_2 \ldots z_n)$ können wir also in der Form schreiben

---

[1]) Alle $n$ Mengen können nicht von der ersten Kategorie sein, denn sonst wäre auch $E(l < f(x) < L)$ von der ersten Kategorie.

[2]) $D^{(1)}$ ist der Durchschnitt für analog (wie beim Beweis des Satzes 3) gebildete Mengen zweiter Kategorie.

[3]) Die Menge $P$ ist meßbar als Vereinigungsmenge einer abzählbaren Menge von meßbaren Mengen.

$f(z_1 i_1 + z_2 i_2 + \ldots + z_n i_n)$. Wir ordnen jedem Vektor $(z_1 i_1 + z_2 i_2 + \ldots + z_n i_n)$ die Zahl $f(z_1 i_1 + z_2 i_2 + \ldots + z_n i_n)$ zu, die wir mit $y$ bezeichnen; es ist also $y = f(z_1 i_1 + z_2 i_2 + \ldots + z_n i_n)$ nicht anderes, als die reelle Funktion von $n$ Veränderlichen $z_1 z_2 \ldots z_n$. Es sei $f(z_1 i_1 + z_2 i_2 + \ldots + z_n i_n)$ eine überall dichtperiodische Funktion, d. h. es gibt eine überall dichte Menge von $n$ dimensionalen Vektoren, die wir mit $\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)} \ldots \mathfrak{A}^{(m)} \ldots$ bezeichnen von der Eigenschaft, daß

$$f(Z + \mathfrak{A}^{(i)}) = f(Z)$$

ist, wo $i = 1, 2 \ldots m \ldots$ und $Z = z_1 i_1 + z_2 i_2 + \ldots + z_n i_n$ ist.

Die Sätze 1, 2, 3, 4, die wir für die überall dichtperiodischen Funktionen einer Veränderlichen bewiesen haben, gelten ohne weiteres für diese Funktionen, wie man leicht beweisen kann.

Wir ordnen irgend einem $n$ dimensionalen Vektor $Z^{(n)} = z_1^{(n)} i_1 + z_2^{(n)} i_2 + \ldots + z_n^{(n)} i_n$ irgend einen $m$ dimensionalen Vektor $Z^{(m)} = z_1^{(m)} i_1 + z_2^{(m)} i_2 + \ldots + z_m^{(m)} i_m$ zu und bezeichnen diese Zuordnung mit $Z^{(m)} = \Phi(Z^{(n)})$. Diese Zuordnung ist nichts anderes als eine Funktion. Es sei $\Phi(Z^{(n)})$ eine überall dichtperiodische Funktion, d. h. es gibt eine überall dichte Menge von $n$ dimensionalen Vektoren, die wir mit $\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(2)} \ldots \mathfrak{A}^{(k)} \ldots$ bezeichnen von der Eigenschaft, daß

$$\Phi(Z^{(n)} + \mathfrak{A}^{(i)}) = \Phi(Z^{(n)})$$

ist, wo $i = 1, 2 \ldots k \ldots$ ist.

Die Sätze 1, 2, 3, 4, die wir für die überall dichtperiodischen Funktionen einer Veränderlichen bewiesen haben, gelten ohne weiteres für diese Funktionen, nur entspricht hier der Zahl $y$ der Funktion $f(x)$, der Vektor $Z^{(m)}$ der Funktion $\Phi(Z^{(n)})$.

## § 3.

1. Die Menge aller überall dichtperiodischen Funktionen, welche meßbar im Sinne $B$ sind, ist von der Mächtigkeit des Kontinuums. Wir wollen hier den Satz beweisen:

1. Satz: Die Menge aller überall dichtperiodischen Funktionen, welche meßbar im Sinne $L$ sind, ist von der Mächtigkeit $f$, d. i. von der Mächtigkeit der Menge aller reellen Funktionen.

Beweis: Es sei $A$ irgend eine überall dichte und abzählbare Menge von Zahlen $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ von der Eigenschaft, daß $A + a_n = A$ und $P$ irgend eine Nullmenge von der Mächtigkeit des Kontinuums. Wir bezeichnen mit $P_{a_m}$ (so wie im § 2) die Menge, welche aus der Menge $P$ durch die Translation um die Strecke $a_m$ entsteht. Es sei $\Pi$ die Menge aller Punkte, die mindestens in einer der Mengen $P_{a_1} P_{a_2} P_{a_3} \ldots P_{a_n} \ldots$ vorkommen, so daß die Menge $P$ die Eigenschaft $\Pi_{a_m} \equiv \Pi$ besitzt, d. h. die Menge, welche aus der Menge $\Pi$ durch die Translation um die Strecke $a_m (m = 1, 2 \ldots n \ldots)$ entsteht, ist mit der Menge $\Pi$ identisch. Die Menge $\Pi$ ist, wie man unmittelbar sieht, eine Nullmenge (als abzählbare Menge von Nullmengen).

Aus der Menge $\Pi$ greifen wir folgende Teilmenge $Q$ heraus: sind $b$ und $c$ irgend welche Zahlen der Menge $Q$, so soll nicht die Beziehung $b + a_k = c + a_l$ (wo $a_k$ und $a_l$ irgend welche Zahlen der Menge $A$ sind) bestehen. Die Menge $Q$ (wenn sie besteht) hat die Mächtigkeit des Kontinuums. In der Tat bezeichnen wir mit $x$ die Mächtigkeit der Menge $Q$, so ist, wie man unmittelbar sieht,

$$\aleph_0 \cdot x = c,$$

also nach einem Satze [1]) $x = c$.

Die Existenz der Menge $Q$ kann man sehr leicht auf Grund der Wohlordnung des Kontinuums zeigen. Da die Menge $Q$ die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt, so ist die Menge aller möglichen Teilmengen der Menge $Q$ von der Mächtigkeit $f = \aleph^c$. Es sei $B$ irgend eine Teilmenge der Menge $Q$, und $\Gamma$ die Menge aller Punkte, die mindestens in einer der Menge $B_{a_1} B_{a_2} \ldots B_{a_n} \ldots$ vorkommen, so definieren wir eine Funktion $f_B(x)$, welche der Teilmenge $B$ entspricht:

$$f_B(x) = 1 \text{ für die Punkte der Menge } \Gamma$$
$$f_B(x) = 0 \text{ für die Punkte der Menge } C(\Gamma).$$

Man sieht unmittelbar, daß $f_B(x)$ überall dichtperiodisch und meßbar im Sinne $L$ ist. Da anderseits, wenn $B_1$ und $B_2$ irgend welche zwei verschiedene Teilmengen der Menge $Q$ sind, auch die entsprechenden überall dichtperiodischen Funktionen $f_{B_1}(x)$ und $f_{B_2}(x)$ voneinander verschieden, so ist die Mächtigkeit der überall dichtperiodischen und im Sinne $L$ meßbaren Funktionen mindestens gleich $f = \aleph^c$, also gleich $f$. w. z. b. w.

Unter Zugrundelegung der rationalen Zahlen $a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ als Periodensystem einer überall dichtperiodischen Funktion, kann man ohne Wohlordnung die Existenz dieser Menge $Q$ zeigen, also den Satz beweisen, daß die Menge aller überall dichtperiodischen Funktionen von der Mächtigkeit $\aleph^c = f$ ist. Diese Bemerkung und Beispiel, das ich hier zur Beweisführung dieser Bemerkung anführe, verdanke ich dem Herrn Dr. Wilh. Groß.

Jede Zahl läßt sich bekanntlich eineindeutig in der Form (Normalform) [2])

---

[1]) Eigenschaften meßbarer und nichtmeßbarer Mengen. Seite 1544—1547.

[2]) Die rationalen Zahlen lassen zwei verschiedene Darstellungen zu, eine endliche und eine unendliche Darstellung. Wenn man aber die Bedingung hinzufügt, daß es keine Darstellungen der Zahlen $(x)$ gibt, in welchen, von einer bestimmten Stelle $n$ angefangen, alle Zähler $e_n = n - 1$ sind, so ist dadurch die Darstellung jeder Zahl $x$ eindeutig. Es sollen also in jeder Darstellung der Zahlen $(x)$ unendlich viele Zahlen $e_n$ vorkommen, für welche $e_n < n - 1$ ist.

$$e+\frac{e_2}{2!}+\frac{e_3}{3!}+\ldots+\frac{e_n}{n!}+\ldots$$

darstellen, wo $e$ irgend eine ganze Zahl und die $e_n$ den Bedingungen $0 \leqq e_n < n$ unterworfen sind. Speziell lassen sich die rationalen Zahlen in der Form darstellen, wo nur endlich viel nullverschiedenen Zahlen $e_2 e_3 \ldots e_n \ldots$ vorkommen.

Es sei $R$ die Menge der Zahlen $x$, wo

$$x=(x_1 x_2 \ldots x_n)\ldots=\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{10^2}+\ldots+\frac{x_n}{10^n}\ldots$$

ist, und wo jedes $x_n$, 1 oder 2 ist. Diese Menge ist, wie man ohne weiteres einsehen kann, perfekt. Wir ordnen jetzt der Zahl $x$ eine Zahl $y$ folgendermaßen:

$$y=\frac{x_1}{3!}+\frac{x_2}{(3+x_1)!}+\frac{x_3}{(3+10x_1+x_2)!}+\ldots+ \\ +\frac{x_n}{(3+10^{n-1}x_1+\ldots+x_{n-1})!}+\ldots$$

zu. Diese Zuordnung ist, wie man leicht beweisen kann, eineindeutig und stetig, [1]) es ist also die zugeordnete Menge auch perfekt. Bezeichnen wir sie mit $Q$. Wir wollen jetzt zeigen, daß die Differenz zweier Zahlen $y_1, y_2$ der Menge $Q$ nie eine rationale Zahl sein kann. In der Tat, wäre $y_1 - y_2 = r\ (y_1 > y_2)$ eine rationale Zahl, so wäre $y_1 = y_2 + r$, wir wollen zeigen, daß das unmöglich ist. Sind $y_1$ und $y_2$ zwei verschiedene Zahlen der Menge $Q$, so sind von irgend einem Index $n$ alle folgenden Nenner in der gewählten Darstellung voneinander verschieden. Das folgt unmittelbar aus der Zuordnung der Menge $R$ der Menge $Q$. Anderseits läßt sich die Zahl $r$ darstellen in einer Form, wo nur endlich viele von Null verschiedene Zahlen $e_2 e_3 \ldots e_n \ldots$ vorkommen; es gibt einen Index $m$ von der Eigenschaft, daß alle $e_\varrho$, wo $\varrho \geqq m$ ist, verschwinden. Bezeichnen wir mit $p$ die größere von den beiden Zahlen $m$ und $n$, so sind die Nenner der Zahlen $y_1$ und $y_2 + r$ von dem Index $p$ angefangen voneinander verschieden, anderseits wären die $p-1$ ersten Stellen der Zahl $y_2 + r$ nicht in der Normalform, so kann man das ohne weiteres machen und man sieht leicht, daß dadurch alle folgenden Stellen $\sigma$, wo $\sigma \geqq p$ ist, nicht beeinflußt werden. Es sind also vom Index $p$ angefangen alle Nenner der Zahlen $y_1$ und $(y_2 + r)$ voneinander verschieden, was aber unmöglich ist, da die Darstellung in der Normalform eindeutig ist. Es muß also $r$ eine irrationale Zahl sein.

Bezeichnen wir mit $Q_{a_n}$ die Menge, die aus der Menge $Q$ durch Translation um $a_n$ entsteht, so haben zwei Mengen $Q_{a_{n'}}$ und $Q_{a_{n''}}$,

---

[1]) Siehe: Baire R., Acta Math. Bd. 32, Seite 106.

wo $a_{n'} \neq a_{n''}$ ist, keinen Punkt gemeinsam. Dasselbe gilt für jede Teilmenge der Menge $Q$ und da es $2^c = f$ verschiedene Teilmengen der Menge $Q$ gibt (weil $Q$ die Mächtigkeit $c$ als perfekte Menge besitzt), so gibt es, wie wir gesehen haben, auch $2^c = f$ verschiedene überall dichtperiodische Funktionen, die, wie man leicht beweisen kann, im Sinne $L$ meßbar sind. [1]

Wir wollen jetzt noch die Menge $Q$ anwenden, um einen Satz zu beweisen, daß innerhalb jeder Funktionenklasse der Menge $E$ überall dichtperiodische Funktionen existieren. Eine Ausnahme bilden die Funktionen ersten Klasse, wie wir gesehen haben. Ist also $\alpha$ irgend eine Klassenzahl, die kleiner als $\Omega_1$ und größer als 1 ist, so gibt es eine Funktion $f(x)$, wie wir zeigen wollen, von der $\alpha^{\text{ten}}$ Klasse, welche überall dichtperiodisch ist. Wir setzen also voraus, daß es Funktionen jeder Klasse $\alpha < \Omega_1$ gibt, [2] und wollen dasselbe für die überall dichtperiodischen Funktionen zeigen. Unter dieser Voraussetzung muß es auf jeder perfekten nirgendwo dichten Menge Funktionen jeder Klasse $\alpha < \Omega_1$ geben, denn sonst existierten überhaupt von einer Klassenzahl $\beta$ angefangen keine Funktionen, von Klasse $\alpha \geqq \beta$, was gegen die Voraussetzung ist. Es existieren also auf der Menge $Q$ Funktionen jeder Klasse $\alpha < \Omega_1$. Ist $f(x)$ irgend eine Funktion, z. B. der Klasse $\beta$, so wollen wir zeigen, daß wir eine Funktion $f(x)$ mittels dieser Funktion $\varphi(x)$ definieren können, die überall dichtperiodisch und vor der $\beta^{\text{ten}}$ Klasse ist. Wir definieren $f(x)$ folgendermaßen:

$$f(x) = \varphi(x) \text{ für die Punkte der Menge } Q$$
$$f(x + a_n) = f(x) \text{ für die Punkte der Menge } \sum_{n=1}^{\infty} Q_{a_n}$$

(wo $a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$ die Menge aller rationalen Zahlen ist) $(a_0 = 0)$ und $f(x) = 0$ für die Restmenge $C\left(\sum_{n=0}^{\infty} Q_{a_n}\right)$.

Die so definierte Funktion $f(x)$ ist überall dichtperiodisch, mit den Perioden $a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots$, wie man leicht einsehen kann. Anderseits ist $f(x)$ mindestens von der $\beta^{\text{ten}}$ Klasse, da sie auf der Menge $Q$ von der $\beta^{\text{ten}}$ Klasse ist. [3] Wir wollen noch zeigen, daß $f(x)$ höchstens von der $\beta^{\text{ten}}$ Klasse ist. In der Tat, da $\varphi(x)$ von der $\beta^{\text{ten}}$ Klasse ist, so gibt es keine Funktionenfolge $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n \ldots$

---

[1] Die Menge $Q$ ist perfekt und vom Inhalt Null. In der Tat, wäre $I(Q) = \delta > 0$, so wäre der Inhalt der Menge $D(E, \sum_{n=1}^{\infty} Q_{a_n})$ vom Inhalt größer als jede Zahl (unendlich), was aber unmöglich ist, da $I(E) = 1$ ist.

[2] Den Beweis für die Existenz von Funktionen jeder Klasse $\alpha < \Omega_1$ hat Lebesgue in seiner Arbeit: Sur les fonctions représentables analytiquement (Journal de math. 1905) gegeben.

[3] Ist eine im Sinne $B$ meßbare Funktion auf irgend einer perfekten Menge von der $\beta^{\text{ten}}$ Klasse, so ist diese mindestens von der $\beta^{\text{ten}}$ Klasse.

von der $\beta - 1^{\text{ten}}$ Klasse, so daß $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ ist (auf der Menge $Q$). Wir definieren jetzt die Funktionenfolge $f_1 f_2 \ldots f_n \ldots$, wo $f_n(x) = \varphi_n(x)$ für die Punkte der Menge $\sum\limits_{k=0}^{k} Q_{\alpha_k}$ sonst überall Null. Die Funktion $f_n(k)$ ist also höchstens von der $\beta - 1^{\text{ten}}$ Klasse (als Summe von endlich vielen Funktionen $\beta - 1^{\text{ten}}$ Klasse), anderseits ist, wie man leicht einsehen kann, $\lim\limits_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$, also ist $f(x)$ höchstens von der $\beta^{\text{ten}}$ Klasse. Das gilt für jede Klasse. Wäre $\beta$ eine Limeszahl, so kann man eine unendliche Anzahl von Klassenzahlen $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n \ldots$ finden, von der Eigenschaft, daß $\lim\limits_{n=\infty} \alpha_n = \beta$ ist. Es gibt also eine Funktionenfolge $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n \ldots$ von der Eigenschaft, daß $\varphi_n(x)$ von der $\alpha_n{}^{\text{ten}}$ Klasse ist und daß

$$\lim \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

ist.[1] Der Beweis wird in diesem Falle nicht geändert. Es gibt also überall dichtperiodische Funktionen innerhalb jeder Funktionenklasse der Menge $E$ (mit Ausnahme der $1^{\text{ten}}$ Klasse).

2. Es sei im Intervall $(0, 1)$ gegeben irgend eine überall dichte abzählbare Menge $A = (a_1 a_2 \ldots a_n \ldots)$, dann sollen zwei Zahlen $b$ und $c$ wesentlich kongruent in bezug auf die Elemente der Menge $A$ heißen, wenn die Beziehung

$$b + a_k = c + a_l \quad (a_k \neq a_l)$$

für irgend ein Paar innerhalb der Menge $A$ gilt.

2. Satz: Ist $P$ irgend eine im Sinne $L$ meßbare Menge vom Inhalt $\delta > 0$, so gibt es innerhalb der Menge $P$ mindestens ein wesentlich kongruentes Zahlenpaar in bezug auf die Elemente der Menge $A$. Bezeichnet man die Menge der Zahlen $b$, für welche mindestens eine Zahl $c$ existiert[2]) von der Eigenschaft, daß die Beziehung (1) besteht, mit $P^{(1)}$, so ist die Menge $P^{(1)}$ meßbar im Sinne $L$ und vom Inhalt $\delta$.

Beweis: In der Tat wäre der erste Teil des Satzes falsch, so hätten irgend welche zwei Mengen $P_{a_k}$ und $P_{a_l}$ $(a_k \neq a_l)$ keinen Punkt miteinander gemein. Da $I(P) = \delta > 0$ ist, so kann man eine ganze Zahl $n$ finden von der Eigenschaft, daß $n\delta > 2 + \varepsilon$ ist. Es hätte also die Menge $\sum\limits_{k=1}^{n} P_{a_k}$ den Inhalt $I\left(\sum\limits_{k=1}^{n} P_{a_k}\right) > 2 + \varepsilon$, was aber unmöglich, da die Menge im Intervall höchstens von der Länge 2 enthalten ist. Es gibt also mindestens ein Zahlenpaar $b$ und $c$, für welches die Beziehung (1) besteht.

Wir wollen jetzt den zweiten Teil des Satzes beweisen. Ist $P$ meßbar und vom Inhalt $\delta$, so kann man eine abzählbare Menge von perfekten Mengen $P_1 P_2 \ldots P_n \ldots$ finden, welche 1. in der

[1]) $\varphi(x)$ soll von der $\beta^{\text{ten}}$ Klasse sein.
[2]) $b$ und $c$ Zahlen der Menge $P$.

Menge $P$ enthalten sind, 2. einen von Null verschiedenen Inhalt haben, 3. und für die $\sum_{n=1}^{\infty} I(P_n) = I(P)$ ist.

Es soll $I(P_n) = \delta_n > 0$ sein, wir wollen zeigen, daß $I(P_n^{(1)}) = \delta_n$ ist. Zu diesem Zwecke nehmen wir irgend welche zwei Zahlen $a_k$ und $a_l$ $(a_k \neq a_l)$ und suchen die Gesamtheit $M_{kl}^{(n)}$ aller Zahlen $b$ und $c$ innerhalb $P_n$ von der Eigenschaft, daß

$$b + a_k = c + a_l$$

ist. Die Menge dieser Zahlen ist abgeschlossen; in der Tat ist irgend eine unendliche Menge $b_1\, b_2 \ldots b_n \ldots$ gegeben von der Eigenschaft, daß $b_n + a_k = c_n + a_l$ ist $(n = 1, 2 \ldots m \ldots)$ und daß $\lim b_n = b$ ist, so kann man aus der Menge $c_1\, c_2 \ldots c_n \ldots$ eine Teilmenge $c_{n_1}\, c_{n_2} \ldots c_{n_m} \ldots$ herausgreifen, welche gegen ein Grenzelement konvergiert. Es sei also $\lim_{m=\infty} c_{n_m} = c$, dann ist

$$\lim_{m=\infty} b_{n_m} + a_k = \lim_{m=\infty} c_{n_m} = a_l \quad \text{also}$$

$$b + a_k = c + a_l.$$

Es hat also das Grenzelement $b$ auch die Eigenschaft:

$$b + a_k = c + a_l$$

und da die Menge $P_n$ perfekt ist, so gehören $b$ und $c$ der Menge $P_n$ an. Es ist also diese Gesamtheit $M_{kl}^{(n)}$ abgeschlossen, also meßbar. Wenn wir jetzt alle möglichen Mengen

$$M_{kl}^{(n)}\,(k = 1, 2 \ldots n \ldots,\ l = 1, 2 \ldots n \ldots,$$

nehmen und mit $M^{(n)}$ die Menge aller Zahlen, die mindestens in einer der Mengen $M_{kl}^{(n)}$ enthalten ist, bezeichnen, so ist die Menge $M^{(n)}$ mit der Menge $P_n^{(1)}$ identisch und im Sinne $L$ meßbar. Die $M^{(n)}$ hat den Inhalt $\delta_n$. In der Tat wäre $I(M^{(n)}) = \delta_n' < \delta_n$, so könnten wir eine perfekte Menge $P_n''$ innerhalb der Menge $P_n - M^{(n)}$ finden, welche einen von Null verschiedenen Inhalt hätte. Für diese Menge existieren mindestens zwei Zahlen $b$ und $c$ mit der Beziehung (1), andrerseits wären diese Zahlen in der Menge $M^{(n)}$ nicht enthalten, was gegen die Definition der Menge $M^{(n)}$ verstößt. Es ist also die Menge $M^{(n)} \equiv P_n^{(1)}$ vom Inhalt $\delta_n$.

Die Menge $\sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(1)}$ ist in der Menge $P$ enthalten, hat den Inhalt $\delta$ und besitzt nur wesentlich kongruente Elemente in bezug auf die Menge $A$. Die Menge $P^{(1)}$ enthält also die Menge $\sum_{n=1}^{\infty} P_n^{(1)}$ und ist ihr wesentlich gleich, w. z. b. w.

Der Satz 2 gilt auch für die Beziehung:

$$a_k b = a_l c. \quad (a_k \neq a_l)$$

und für äquivalente Zahlen, wie man leicht beweisen kann.

Es sei gegeben irgend eine im Sinne $L$ meßbare Menge $P$ vom Inhalt $\delta > 0$. Wir verteilen jetzt die Zahlen der Menge $P$ in eine Menge von Klassen, und zwar so, daß einer und derselben Klasse alle und nur die Zahlen $b$, $c$, $d\ldots$ angehören, für welche die Beziehung: $b + a_k = c + a_l$ besteht. Wir greifen jetzt aus jeder dieser Klasse eine bestimmte Zahl heraus; die Gesamtheit dieser Zahlen bestimmt eine Menge, die wir mit $Q$ bezeichnen,[1] und die Menge $Q$ hat die Eigenschaft, daß, wenn $b_1$ und $b_2$ irgend zwei Zahlen der Menge $Q$ sind, daß dann nie die Bezeichnung:

$$b_1 + a_k = b_2 + a_l \begin{pmatrix} k = 1, 2\ldots n\ldots \\ l = 1, 2\ldots n\ldots \end{pmatrix}$$

bestehen kann.

Wir wollen zeigen, daß die Menge $Q$ im Sinne $L$ nicht meßbar ist.

In der Tat, wäre die Menge $Q$ meßbar, so müßte sie den Inhalt Null haben (nach dem 2. Satze), anderseits wäre die Menge $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Q_{a_n}$ eine Nullmenge und die Menge $P$ wäre in der Menge $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Q_{a_n}$ enthalten, also auch eine Nullmenge, was gegen die Voraussetzung ist.

Der Satz 2 gilt auch, wie man unmittelbar aus der Definition der Meßbarkeit im Sinne $B$ einsehen kann, für Mengen $P_1$ zweiter Kategorie in bezug auf die Strecke $0-1$, welche im Sinne $B$ meßbar sind. Die Menge $Q_1$, die in bezug auf die Menge $P_1$ dieselben Eigenschaften besitzt, wie die Menge $Q$ in bezug auf die Menge $P$, ist im Sinne $B$ nicht meßbar und es gibt mindestens ein Intervall, wo $Q_1$ von der zweiten Kategorie ist.

## § 4.

Betrachten wir eine irrationale[2] Zahl $x$ zwischen 0 und 1 und entwickeln sie in einem dyadischen Bruch:

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{2^n} + \ldots \quad = (x_1 x_2 \ldots x_n \ldots)$$

wo $x_n = 0$ oder 1 ist.

Unter den $n$ ersten Ziffern mögen sich $p$ Nullen, also $q = n - p$ Einser befinden. Dann gilt der Satz (E. Borel):[3]

[1] Um die Menge $Q$ zu definieren, muß man das Auswahlprinzip von Zermelo oder die Wohlordnung des Kontinuums als gültig voraussetzen.

[2] Die Menge der rationalen Zahlen bildet eine Menge vom Inhalt Null und ist deshalb ohne Einfluß auf die Resultate des 1. Satzes.

[3] Rendiconti del circolo mat. di Palermo. Bd. 27, Seite 258—260.

1. Satz: Die Menge der Zahlen $x$, für welche $\lim\limits_{n=\infty} \frac{p}{n} = \frac{1}{2}$ ist, hat den Inhalt Eins.

Wir wollen hier einen viel spezielleren Satz beweisen, aus dem durch gewöhnliche Abschätzung[1] der Satz von Borel gefolgert werden kann. Dieser Satz lautet folgendermaßen:

Es gibt eine Zahl $\alpha \geqq \frac{1}{2}$, so daß die Menge der Zahlen $x$, für welche $\lim\limits_{n=\infty} \sup \frac{p}{n} = \alpha$ ist, den Inhalt Eins besitzt.

Wir beweisen diesen Satz, indem wir uns auf den Satz 3 in § 2 stützen. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit $p_{x,n}$ und $q_{x,n}$ die der Zahl $x$ für ein bestimmtes $n$ entsprechenden Zahlen $p$ und $q$ und bilden die Funktion:

$$f(x) = \lim_{n=\infty} \sup \frac{p_{x,n}}{n}\,.\text{[2]}$$

Die Funktion $f(x)$ ist überall dichtperiodisch, und zwar mit den Perioden $a_m = \frac{\alpha_m}{2^m}$, wo $m = 1, 2 \ldots k \ldots$ ist und $\alpha_m$ irgend eine ganze Zahl ist. In der Tat ist $y = x + a_m$, so ist $\lim\limits_{n=\infty} \sup \frac{p_{y,n}}{n} = \lim\limits_{n=\infty} \sup \frac{p_{x,n}}{n}$ da sich die Zahl $y$ von der Zahl $x$ höchstens in $m$ ersten Stellen unterscheidet. Es ist also:

$$f(x + a_m) = f(x).$$

Wir wollen noch zeigen, daß $f(x)$ meßbar im Sinne $B$ ist. In der Tat bezeichnen wir mit $f_n(x) = \frac{p_{x,n}}{n}$, so ist $f_n(x)$ eine Funktion erster Klasse, da sie streckenweise konstant ist und nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten besitzt. Andrerseits ist aber $f(x) = \lim\limits_{n=\infty} \sup f_n(x)$, also nach dem Hilfssatz in § 1 eine Funktion der Baireschen Klasse.

Da $f(x)$ überall dichtperiodisch und meßbar im Sinne $B$ ist, so ist $f(x)$ nach dem 3. Satz im § 2 höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge gleich einer Konstanten. Diese Konstante $\alpha$ muß mindestens $\frac{1}{2}$ gleich sein. Wäre $\alpha < \frac{1}{2}$, so wäre für die Menge der Punkte $1 - x$, $\lim\limits_{n=\infty} \sup \frac{p_{1-x,n}}{n} > \frac{1}{2}$, wenn $\lim\limits_{n=\infty} \sup \frac{p_{x,n}}{n} < \frac{1}{2}$ ist.[3] Da die Menge $M_x$ (d. i. die Menge der Punkte, wo

---

[1] Hausdorff, Mengenlehre. S. 419—421.

[2] Die Funktion $f(x)$ ist dadurch auch zwischen $-\infty$ und $+\infty$ definiert und überall dichtperiodisch.

[3] Es ist $\lim\limits_{n=\infty} \sup \frac{p_{x,n}}{n} + \lim\limits_{n=\infty} \inf \frac{q_{x,n}}{n} = 1$, also $\lim\limits_{n=\infty} \sup \frac{p_{x,n}}{n} + \lim\limits_{n=\infty} \inf \frac{p_{1-x,n}}{n} = 1$. Ist also $\lim\limits_{n=\infty} \sup \frac{p_{x,n}}{n} = \alpha$, so ist $\lim\limits_{n=\infty} \inf \frac{p_{1-x,n}}{n} = 1 - \alpha$, also $\lim\limits_{n=\infty} \sup \frac{p_{1-x,n}}{n} \geqq 1 - \alpha > \frac{1}{2}$.

$\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p_{x,n}}{n} = \alpha$ ist) denselben Inhalt Eins wie die Menge $M_{1-x}$ hat, so sind wir hiemit auf einen Widerspruch gekommen. Es muß also $\alpha \geqq \frac{1}{2}$ sein. [1])

Es sei $x$ irgend eine irrationale Zahl zwischen 0 und 1, wir entwickeln sie in irgend einem System, z. B. im g-adischen System, es ist also:

$$x = \frac{x_1}{g} + \frac{x_2}{g^2} + \frac{x_3}{g^3} + \ldots + \frac{x_n}{g^n} + \ldots = (x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots)$$

wo $x_n = 0, 1, 2 \ldots g-1$ ist. Es gilt dann folgender Satz:

Es gibt eine Zahl $\alpha \geqq \frac{g-1}{2}$, so daß die Menge der Zahlen $x$, für welche $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \alpha$ ist, den Inhalt Eins besitzt.

Durch ähnliche Abschätzung, wie bei den Zahlen im dyadischen System, kann man zeigen, daß $\alpha = \frac{g-1}{2}$ ist, also daß die Menge der Zahlen, für welche $\lim\limits_{n=\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{g-1}{2}$ ist, den Inhalt Eins hat.

Der Beweis dieses Satzes wird auf dieselbe Weise wie der vorhergehende geführt.

Es sei $g_1\, g_2 \ldots g_n \ldots$ irgend eine Menge von Zahlen von der Eigenschaft, daß $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{g_1 + g_2 + \ldots + g_n}{n} = A$ ist, wo $A$ eine beliebige Zahl ist. Ist $x$ irgend eine irrationale Zahl zwischen 0 und 1 und

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{2^n} + \ldots = (x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots)$$

die Zahl $x$ im dyadischen System, so bilden wir den Ausdruck $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{(g\,x)_n}{n}$, wo $(g\,x)_n = g_1\, x_1 + g_2\, x_2 + \ldots + g_n\, x_n$ ist.

2. Satz: Bezeichnen wir mit $y = f(x)$ eine Funktion, welche für die Zahl $x = (x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots)$ gleich $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{(g\,x)}{n}$ ist, so ist

---

[1]) Wäre $\alpha = \frac{1}{2}$, so wäre für eine Menge vom Inhalt Eins $\liminf\limits_{n=\infty} \frac{p_{x,n}}{n} = \limsup\limits_{n=\infty} \frac{p_{x,n}}{n} = \lim\limits_{n=\infty} \frac{p_{x,n}}{n}$. Jedenfalls ist die Menge der Zahlen $x$, für welche (1) $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p_{x,n}}{n} = \alpha$ und (2) $\liminf\limits_{n=\infty} \frac{p_{x,n}}{n} = 1 - \alpha$ ist, vom Inhalt Eins.

höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge $f(x)$ gleich einer Konstanten, die mindestens $\frac{A}{2}$ gleich ist.

Der Beweis wird auf dieselbe Weise, wie der Beweis des Satzes 1 geführt, da die Funktion $f(x)$ überall dichtperiodisch und meßbar im Sinne $B$ ist.

Setzt man für $g_n = \log_e l_n$, so erhält man folgenden Satz:

3. Satz: Bezeichnen wir mit $y = f(x)$ eine Funktion, welche für die Zahl $x = (x_1 x_2 \dots x_n \dots)$, wo $x_{k_1} = x_{k_2} = \dots = x_{k_n} = \dots = 1$ und alle anderen Ziffern Null sind, gleich $\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{l_{k_1} l_{k_2} \dots l_{k_n}}$ ist, so ist höchstens mit einer Ausnahme Nullmenge $f(x)$ gleich einer Konstanten, die mindestens $\frac{\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{l_1 l_2 \dots l_n}}{2}$ gleich ist.

Es sei $x$ irgend eine Zahl, wir entwickeln sie im g-adischen System, also es ist

$$x = \frac{x_1}{g} + \frac{x_2}{g^2} + \dots + \frac{x_n}{g^n} + \dots = (x_1 x_2 \dots x_n \dots),$$

wo $x_n = 0, 1, \dots g-1$ ist.

Unter den $n$ ersten Ziffern mögen sich $p^{(k)}$ Ziffern, welche gleich $k$ sind,[1] befinden. Dann gilt folgender Satz:

4. Satz: Die Menge der Zahlen $x$, für welche $\limsup_{n=\infty} \frac{p^{(k)}}{n} = \alpha$ ist, wo $\alpha$ mindestens $\frac{1}{g}$ ist, hat den Inhalt Eins. Um den Satz zu beweisen, bilden wir die Funktion

$$f(x) = i_0 \limsup_{n=\infty} \frac{p^{(0)}_{x,n}}{n} + i_1 \limsup_{n=\infty} \frac{p^{(1)}_{x,n}}{n} + \dots + i_{g-1} \limsup_{n=\infty} \frac{p^{(g-1)}_{x,n}}{n}\,.^{2)}$$

Die Funktion $f(x)$ ist überall dichtperiodisch und meßbar im Sinne $B$, sie ist also (3. Satz in § 2) gleich einem konstanten Vektor höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge. Man kann auch beweisen, daß, wenn dieser konstante Vektor gleich $A_0 i_0 + A_1 i_1 + \dots + A_{g-1} i_{g-1}$ ist, daß dann $A_0 = A_1 = \dots = A_k = \dots = A_{g=1}$ ist. In der Tat, es seien $k$ und $l$ irgend welche ganze Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2 \dots g-1$, so wollen wir zeigen, daß $A_k = A_l$ ist. Zu diesem Zwecke bilden wir eine Funktion $f(x)$, die folgendermaßen definiert ist: ist $x$ irgend eine irrationale Zahl, welche im g-adischen System geschrieben ist, dann ersetzen wir in ihr alle $k$ durch $l$ und alle $l$ durch $k$ und bezeichnen diese Zahl mit $(y_x)$; die Funktion $f(x)$ sei an der Stelle $x$ gleich $y_x$, für die rationalen Punkte aber

[1] $k = 0, 1, 2 \dots g-1$.

[2] Wo $i_0, i_1 \dots i_{g-1}$ Einheitsvektoren sind.

Null. Die Funktion $f(x)$ ist auf der Menge der irrationalen Punkte eineindeutig und stetig. [1]) Die Funktion ist also überall, mit Ausnahme der Menge der rationalen Zahlen stetig, also nach einem Satze von Baire, [2]) höchstens von der zweiten Klasse. Außerdem hat die Funktion $f(x)$ die wichtige Eigenschaft, daß sie jede meßbare Menge vom Inhalt $\delta$ in eine Menge von demselben Inhalt überführt. In der Tat, ist $\delta$ irgend ein Intervall von der Länge $\frac{1}{g^n}$ mit den Endpunkten $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ und $(x_1 x_2 x_3 \ldots x_n) + \frac{1}{g^n}$, so entspricht diesem Intervall in $x$ (wenn man von rationalen Zahlen absieht, was ja ohne Einfluß auf unsere Betrachtungen ist) ein Intervall von derselben Länge in $y_x$, und zwar mit dem Endpunkte $(y_1 y_2 \ldots y_n)$ und $(y_1 y_2 \ldots y_n) + \frac{1}{g^x}$, wo $(y_1 y_2 \ldots y_n)$ aus der Zahl $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ durch Vertauschung von $l$ in $k$ und $k$ in $l$ entstanden ist. Ist $\delta$ kein Intervall, dessen Endpunkte die Form $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ und $(x_1 x_2 \ldots x_n) + \frac{1}{g^n}$ haben, so kann man $\delta$, wenn seine Endpunkte im g-adischen System endlich darstellbar sind, als eine endliche Summe von lauter Intervallen mit Endpunkten von der Form $(x_1 x_2 \ldots x_n)$ und $(x_1 x_2 \ldots x_n) + \frac{1}{g^n}$ darstellen, es wird also jedes Intervall $\delta$ in $x$, dessen Endpunkte endlich darstellbar im g-adischen System sind, in ein Intervall von derselben Länge $\delta$ in $y_x$ übergeführt. Es folgt daraus unmittelbar, daß jede Menge vom Inhalt $\delta$ (in $x$) in eine Menge vom Inhalt $\delta$ (in $y_x$) überführt wird. Es wird also jede Nullmenge (oder eine Menge vom Inhalt Eins) in eine Nullmenge (oder eine Menge vom Inhalt Eins) überführt.

Da für jede Zahl $x$ der Menge $M_x$ die Beziehung

$$\limsup_{n=\infty} \frac{p^{(l)}_{x,n}}{n} = \limsup_{n=\infty} \frac{p^{(k)}_{y_x,n}}{n}$$

gilt, so entspricht der Menge, für welche $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p^{(l)}_{x,n}}{n} = A_l$ ist und welche in der Menge $M_x$ enthalten ist (also vom Inhalt Eins ist), die Menge mit dem $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p^{(k)}_{y_x,n}}{n} = A_l$ in $y_x$. Es ist also die Menge, für welche $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p^{(k)}_{y_x,n}}{n} = A_l$ ist, vom Inhalt Eins. Da aber die

---

[1]) Unter Stetigkeit auf einer Menge $M$ verstehen wir folgendes: Ist irgend ein Punkt der Menge $M$ und zugleich Grenzpunkt dieser Menge, und ist $z = \lim\limits_{n=\infty} z_n$ (wo $z_1 z_2 \ldots z_n \ldots$ der Menge $M$ angehören), so soll $\lim\limits_{n=\infty} f(z_n) = f(z)$ sein.

[2]) Acta mathematica, Bd. 32. S. 97—175.

Menge, für welche $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p_{x,n}^{(k)}}{n} = A_k$ ist, vom Inhalt Eins ist, so folgt daraus, daß $A_l = A_k$ ist.

Da diese Gleichung $A_k = A_l$ für jedes $k$ und $l$ der Reihe $0, 1, 2 \ldots g-1$ gilt, so folgt daraus, daß $A_0 = A_1 = \ldots = A_{g-1}$ ist. Auf dieselbe Weise zeigt man, daß $a_0 = a_1 = \ldots = a_{g-1}$ ist, wo $a_l = \liminf\limits_{n-\infty} \frac{p_{x,n}^{(l)}}{n}$ ist (überall höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge).

Da

$$\limsup_{n=\infty} \frac{p_{x,n}^{(0)}}{n} + \limsup_{n=\infty} \frac{p_{x,n}^{(1)}}{n} + \ldots + \limsup_{n=\infty} \frac{p_{x,n}^{(g-1)}}{n} \geqq$$

$$\geqq \limsup_{n=\infty} \frac{p_{x,n}^{(0)} + p_{x,n}^{(1)} + \ldots + p_{x,n}^{(g-1)}}{n} = 1$$

ist, so folgt daraus, daß $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p_{x,n}^{(l)}}{n} \geqq \frac{1}{g}$ ist, [1]) w. z. b. w.

Es ist also die Menge der Zahlen $x = (x_1 x_2 \ldots x_n \ldots)$, wo alle Zahlen $0, 1, \ldots g-1$ unendlich oft vorkommen, vom Inhalt Eins. Ist $x$ irgend eine Zahl im dyadischen System:

$$x = (x_1 x_2 \ldots x_n \ldots) = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{2^n} + \ldots,$$

so ist dieselbe Zahl $(x)$ im System mit der Basis $2^2$ gleich:

$$x = (2x_1 + x_2, 2x_3 + x_4 \ldots 2x_{2n+1} + x_{2n}) =$$

$$= \frac{2x_1 + x_2}{2^2} + \frac{2x_3 + x_4}{(2^2)^2} + \ldots + \frac{2x_{2n-1} + x_{2n}}{(2^2)^n} + \ldots$$

und dieselbe Zahl im System mit der Basis $2^k$ gleich:

$$x = (2^{k-1}x_1 + 2^{k-2}x_2 + \ldots + 2x_{k-1} + x_k,$$
$$2^{k-1}x_{k+1} + 2^{k-2}x_{k+2} + \ldots + 2x_{2k-1} + x_{2k} \ldots) =$$
$$= \frac{2^{k-1}x_1 + 2^{k-2}x_2 + \ldots + 2x_{k-1} + x_k}{2^k} +$$
$$+ \frac{2^{k-1}x_{k+1} + 2^{k-2}x_{k+2} + \ldots + x_{2k}}{(2^k)^2} + \ldots$$

[1]) Durch einfache Abschätzung kann man zeigen, daß $A_l = \frac{1}{g}$ ist. Siehe Hausdorff, Mengenlehre, S. 420—422.

Bezeichnen wir mit $\{x_1 x_2 \ldots x_n\}$ die Zahl

$$2^{n-1} x_1 + 2^{n-2} x_2 + \ldots + x_n,$$

so ist die Zahl $x$ im System mit der Basis $2^k$ gleich:

$$x = (\{x_1 x_2 \ldots x_k\},$$
$$\{x_{k+1} x_{k+2} \ldots x_{2k}\} \ldots \{x_{(n-1)k+1} x_{(n-1)k+2} \ldots x_{nk}\} \ldots);$$

dann ist die Menge der Zahlen $x$, in welchen die Zahl $\{x_1 x_2 \ldots x_k\}$, wo $\{x_1 x_2 \ldots x_k\}$ irgend eine von den Zahlen $0, 1, 2 \ldots 2^k - 1$ ist, unendlich oft vorkommt, vom Inhalt Eins. Das gilt für jedes $k = 1, 2 \ldots n \ldots$ Bezeichnen wir mit $M_k$ die Menge der Zahlen $(x)$, für welche jede der Zahlen $\{x_1 x_2 \ldots x_k\}$, wo $\{x_1 x_2 \ldots x_k\}$ irgend eine der Zahlen $0, 1, 2 \ldots 2^k - 1$ ist, unendlich oft vorkommt, und zwar so, daß $\limsup_{n=\infty} \frac{p_{x,n}^{\langle x_1 x_2 \ldots x_k \rangle}}{n} = A_{\langle x_1 x_2 \ldots x_k \rangle}$ ist, so ist die Menge $D(M_1 M_2 \ldots M_n \ldots) = M$ auch vom Inhalt Eins. [1]) Daraus können wir folgendes schließen:

Die Menge der Zahlen $x$, in welchen jede ganze Zahl $q$, wo $2^{k-1} \leqq q < 2^k$ ist, unendlich oft vorkommt, und zwar so, daß $\limsup_{n=\infty} \frac{p_{x,n}^{(q)}}{n} \geqq \frac{1}{2^k}$ ist, hat den Inhalt Eins.

Ist $x$ irgend eine Zahl im dyadischen System, also

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{2^n} + \ldots = (x_1 x_2 \ldots x_n \ldots),$$

so ordnen wir der Zahl $x$ zwei Zahlen $x^{(1)}$ und $x^{(2)}$ zu, wo

$$x^{(1)} = (x_1 x_3 x_5 \ldots x_{2n-1} \ldots) \text{ und } x^{(2)} = (x_2 x_4 x_6 \ldots x_{2n} \ldots) \text{ ist.}$$

Diese Zuordnung bezeichnen wir mit $i_1 x^{(1)} + i_2 x^{(2)} = f(x)$. Wie man leicht einsehen kann, hat diese Zuordnung die Eigenschaft, daß jeder Nullmenge in $(x)$ eine Nullmenge in $(x^{(1)}, x^{(2)})$ und jeder Menge vom Inhalt größer als Null in $(x)$ eine Menge vom Inhalt größer als Null in $(x^{(1)}, x^{(2)})$ entspricht.

5. Satz: Die Menge der Zahlen $(x^{(1)}, x^{(2)})$, [2]) für welche

$$\limsup_{n=\infty} \frac{p_{x,n}^{(1)}}{n^{(1)}} = a \leqq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \limsup_{n=\infty} \frac{p_{x,n}^{(2)}}{n^{(2)}} = a \geqq \frac{1}{2} \,^{3)} \qquad (1)$$

---

[1]) Die Zahlen der Menge $M$ könnte man mit Borel als Normalzahlen bezeichnen, und zwar Normalzahlen in bezug auf das System mit den Basiszahlen $2, 2^2, \ldots 2^k, \ldots$

[2]) $0 \leqq x^{(1)} \leqq 1$ und $0 \leqq x^{(2)} \leqq 1$.

[3]) $n^{(1)} = n^{(2)} = \frac{n}{2}$.

ist, hat den Inhalt Eins. Bezeichnet man die Menge der Zahlen $x$, für welche $\limsup_{n=\infty} \frac{p_{x,n}}{n} = \alpha \geqq \frac{1}{2}$ ist, mit $M_x$ und die Menge, welche auf Grund der Zuordnung $i_1 x^{(1)} + i_2 x^{(2)} = f(x)$ der Menge $M_x$ entspricht mit $M_{x_1 x_2}$, so hat die Menge der Punkte, für welche

$$\limsup_{n=\infty} \frac{p^{(1)}_{x,n}}{n^{(1)}} = \alpha \geqq \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \limsup_{n=\infty} \frac{p^{(2)}_{x,n}}{n^{(2)}} = \alpha \geqq \frac{1}{2} \tag{2}$$

ist und welche zugleich der Menge $M_{x^{(1)}x^{(2)}}$ angehören, den Inhalt Eins.

Der Beweis dieses Satzes folgt unmittelbar aus dem 1. Satze und aus der Eigenschaft der Zuordnung $i_1 x^{(1)} + i_2 x^{(2)} = f(x)$.

Der Satz 5 gilt für allgemeinere Zuordnungen, und zwar ist $x$ irgend eine Zahl im dyadischen System:

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{2^n} + \ldots = (x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots),$$

so ordnen wir der Zahl $x$ zwei Zahlen $x^{(k)}$ und $x^{(l)}$ zu, wo

$$x^{(k)} = (x_{k_1}\, x_{k_2} \ldots x_{k_n} \ldots) \text{ und } x^{(l)} = (x_{l_1}\, x_{l_2} \ldots x_{l_n} \ldots)$$

ist und wo die Menge der Indizes $k_1\, k_2 \ldots k_n \ldots l_1\, l_2 \ldots l_n \ldots$ mit der Menge der Indizes $1, 2 \ldots n \ldots$ zusammenfällt.[1] Für diese Zuordnung gilt auch, wie man unmittelbar einsehen kann, ein dem Satze 5 analoger Satz.

Ist $x$ irgend eine Zahl im dyadischen System, also

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \ldots + \frac{x_n}{2^n} + \ldots (x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots),$$

so ordnen wir der Zahl $x$ $m$ Zahlen $x^{(1)} x^{(2)} \ldots x^{(m)}$, wo

$$x^{(1)} = (x^{(1)}_{k_1}\, x^{(1)}_{k_2} \ldots x^{(1)}_{kn} \ldots),\ x^{(2)} = (x^{(2)}_{k_1}\, x^{(2)}_{k_2} \ldots x^{(2)}_{kn} \ldots)$$

und

$$x^{(m)} = (x^{(m)}_{k_1}\, x^{(m)}_{k_2} \ldots x^{(m)}_{kn} \ldots)$$

ist und wo die Menge der Indizes

$$k^{(1)}_1\, k^{(1)}_2 \ldots k^{(1)}_n \ldots,\ k^{(2)}_1\, k^{(2)}_2 \ldots k^{(2)}_n \ldots,\ k^{(m)}_1\, k^{(m)}_2 \ldots k^{(m)}_n \ldots$$

mit der Menge der Indizes $1, 2 \ldots n \ldots$ zusammenfällt.[2] Für diese Zuordnung gilt derselbe Satz, den wir für die Zuordnung $(x^{(1)} x^{(2)})$ bewiesen haben.

---

[1] Hiebei hat man unter $n^{(1)}$ die Anzahl der $k_1, k_2, \ldots \leqq n$ zu verstehen.

[2] Der Satz gilt auch, wenn die Menge der Indizes $k^{(1)}_1\, k^{(1)}_2 \ldots k^{(1)}_n \ldots k^{(2)}_1\, k^{(2)}_2 \ldots k^{(2)}_n \ldots k^{(m)}_1\, k^{(m)}_2 \ldots k^{(m)}_n \ldots$ eine Teilmenge der Menge der Indizes $1, 2 \ldots n \ldots$ ist.

6. Satz: Ist

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (x_{11}\,x_{12}\ldots x_{1n}\ldots), \quad \text{wo } 0 \leqq x^{(1)} \leqq 1 \text{ ist,}\\ x^{(2)} &= (x_{21}\,x_{22}\ldots x_{2n}\ldots), \quad \text{wo } 0 \leqq x^{(2)} \leqq 1 \text{ ist,}\\ &\vdots\\ x^{(m)} &= (x_{m1}\,x_{m2}\ldots x_{mn}\ldots), \quad \text{wo } 0 \leqq x^{(m)} \leqq 1 \text{ ist,}\\ &\vdots \end{aligned}$$

und wo die Zahlen $x^{(1)}\,x^{(2)}\ldots x^{(m)}\ldots$ im dyadischen System gebildet sind, so ordnen wir jeder Zahl $(x^{(1)}\,x^{(2)}\ldots x^{(m)}\ldots)$ die Zahl $x = (x_{11}\,x_{12}\,x_{21}\,x_{13}\,x_{22}\,x_{31}\ldots x_{1n}\,x_{2\,n-1}\ldots x_{n1}\ldots)$ zu. Diese Zuordnung, die wir mit $f(x)$ bezeichnen, ist eineindeutig. Bezeichnet man die Menge der Zahlen $x$, für welche $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p_{x,n}}{n} = \alpha \geqq \frac{1}{2}$ ist, mit $M_x$ und die Menge der Zahlen, welche auf Grund der Zuordnung $f(x)$ der Menge $M_x$ entspricht, mit $M_{x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(n)}\ldots}$, so hat die Menge der Zahlen, für welche (1) $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p_{x^{(m)}}}{n_{x^{(m)}}} = \alpha \geqq \frac{1}{2}$ ist $(m = 1, 2 \ldots k \ldots)$ und welche zugleich (2) der Menge $M_{x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}\ldots}$ angehören, auf jeder Strecke $0 \leqq x^{(m)} \leqq 1$ $(m = 1, 2 \ldots k \ldots)$ den Inhalt Eins. Der Beweis des Satzes folgt unmittelbar aus dem Satze 5, da dieser Satz für jede Zuordnung $x \sim (x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)})$, wo $m$ irgend eine ganze Zahl ist, gilt und da die Menge auf der Strecke $0 \leqq x_1 \leqq 1 : M_{x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}\ldots} = D\,(M_{x^{(1)}},\ M_{x^{(1)}x^{(2)}}\ldots M_{x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}}\ldots)$ ist und auf der Strecke $0 \leqq x^{(k)} \leqq 1 : M_{x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(m)}\ldots} = D\,(M_{x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(k)}}\ldots M_{x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(k)}\ldots x^{(n)}},\ldots)$ ist. Die Menge $M_{x^{(1)}x^{(2)}\ldots x^{(n)}\ldots}$ als Durchschnitt von Mengen, deren Inhalt gleich Eins ist, ist auf jeder Strecke $0 \leqq x^{(m)} \leqq 1$ $(m = 1, 2 \ldots k \ldots)$ vom Inhalt Eins. Der Satz 6 gilt, wie man unmittelbar einsehen kann, auch für andere Zuordnungen der Zahlen $(x)$ und der Zahlen $(x^{(1)}\,x^{(2)}\ldots x^{(m)}\ldots)$.

## § 5.

Betrachten wir eine Zahl $x$ zwischen 0 und 1 und entwickeln sie in einen dyadischen Bruch

$$x = \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_k}{2^k} + \cdots + \frac{x_n}{2^n} + \cdots = (x_1\,x_2\ldots x_k\ldots x_n\ldots),$$

$$x_n = 0 \text{ oder } 1.$$

Bezeichnen wir mit $x^{(k)}$ die Zahl

$$x^{(k)} = \frac{x_k}{2} + \frac{x_{k+1}}{2^k} + \cdots \frac{x_n}{2^{n-k+1}} + \cdots = (x_k\,x_{k+1}\ldots x_n\ldots),$$

so gilt der folgende Satz:

1. Satz: Die Menge der Zahlen $x$, für welche $\limsup_{k=\infty} x^{(k)} = 1$ ist, hat den Inhalt Eins. [1])

Beweis: Wir definieren eine Funktion $f(x)$ folgendermaßen:

$$f(x) = \limsup_{k=\infty} x^{(k)}.$$

Die Funktion $f(x)$ ist überall dichtperiodisch, da $f(x)$ den Wert nicht ändert, wenn man in der Zahl $x$ die $n$ ersten Ziffern beliebig abändert. Es ist also

$$f(x) = f(x + a_n),$$

wo $a_n = \frac{\alpha_n}{2^n}$ ist ($n = 1, 2 \ldots m \ldots$ und $\alpha_n = 0, 1, \ldots 2^n - 1$).

Wir wollen noch zeigen, daß $f(x)$ meßbar im Sinne $B$ ist. Zu diesem Zwecke definieren wir eine Funktionenfolge:

$$f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x) \ldots, \text{ wo } f_k(x) = x^{(k)}$$

ist. Die Funktion $f_k(x)$ ist von der ersten Klasse, da sie abteilungsweise monoton ist und eine endliche Anzahl von Unstetigkeiten besitzt. Da aber $f(x) = \limsup_{n=\infty} f_k(x)$ ist, so ist $f(x)$ nach dem 1. Hilfssatze in § 1 eine Funktion der Baireschen Klasse. Nach dem 3. Satze in § 2 ist also $f(x)$ höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge eine Konstante. Wir wollen zeigen, daß diese Konstante gleich Eins ist. Wäre diese Konstante $\alpha < 1$, so könnten wir eine Zahl $n$ finden von der Eigenschaft, daß $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} > \alpha$ ist. Bezeichnen wir die Zahl $2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1$ mit $q$, so ist $\frac{q}{2^n} > \alpha$. Da die Menge der Zahlen $x$, in welchen die ganze Zahl $q$ unendlich oft vorkommt, vom Inhalt Eins ist, so ist jedenfalls $\limsup_{n=\infty} x^{(k)}$ mindestens gleich $\frac{q}{2^n} > \alpha$ mit Ausnahme einer Nullmenge. Da aber $\limsup_{k=\infty} x^{(k)} \leqq 1$ ist, so folgt daraus, daß $\limsup_{k=\infty} x^{(k)} = f(x)$ höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge gleich Eins ist, w. z. b. w.

Wir verstehen unter $[x]$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $x$ ist, und bezeichnen die Differenz $x - [x]$ mit $(x)$, dann ist, wie man unmittelbar sieht, $x^{(k)} = (2^k . x)$. Es ist also die Menge der Zahlen $x$, für welche $\limsup_{k=\infty} (2^k . x) = 1$ ist, vom Inhalt Eins.

---

[1]) Die Menge der Zahlen $x$, für welche $\liminf_{k=\infty} x^{(k)} = 0$ ist, hat den Inhalt Eins; der Beweis wird auf dieselbe Weise geführt, wie für $\limsup_{k=\infty} x^{(k)} = 1$. Es ist also der Inhalt der Zahlen $x$, für welche 1. $\limsup_{k=\infty} x^{(k)} = 1$ und 2. $\liminf_{k=\infty} x^{(k)} = 0$ ist, gleich Eins.

Man kann auch leicht beweisen, daß die Menge der Zahlen, wo $\limsup_{k=\infty} (2^{n_k} . x) = 1$ ist (wo $n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$ irgend welche stets wachsende Folge ganzer Zahlen ist), vom Inhalt Eins ist, also, daß die Konstante $\alpha$ gleich 1 ist. [1])

Dasselbe gilt für jede andere Zahl, wir können ganz allgemein den Satz aussprechen: Ist $m$ irgend eine ganze Zahl und $n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$ irgend welche stets wachsende Folge ganzer Zahlen, so ist die Menge der Zahlen, für welche 1. $\limsup_{k=\infty} (m^{n_k} . x) = 1$ und 2. $\liminf_{k=\infty} (m^{n_k} . x) = 0$ ist, vom Inhalt Eins.

---

[1]) Die Zahl $\alpha$ ist jedenfalls höchstens gleich 1. Wir wollen zeigen, daß $\alpha = 1$ ist. In der Tat, wäre $\alpha < 1$, so könnten wir eine Zahl $n$ von der Eigenschaft finden, daß $\alpha < \frac{2^n - 1}{2^n}$ ist. Da $\limsup_{k=\infty} (2^{n_k} x) = \alpha < 1$ sein soll, so müßte für jede Teilfolge $n_1' n_2' \ldots n_k' \ldots$ (der Folge $n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$) $\limsup_{k=\infty} (2^{n_k'} x) = \beta \leq \alpha$ sein. Wir wollen zeigen, daß sich aus der Folge $n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$ eine Teilfolge $n_1'' n_2'' \ldots n_k'' \ldots$ herausgreifen läßt, für welche $\limsup_{k=\infty} (2^{n_k''} x) > \alpha$ ist. In der Tat, sei $n_1'' n_2'' \ldots n_k'' \ldots$ eine Teilfolge der Folge $n_1 n_2 \ldots n_k \ldots$ von der Eigenschaft, daß

$$n_{k+1}'' > n_k'' + n + 1$$

ist (die Möglichkeit einer solchen Teilfolge kann man ohne weiteres einsehen), dann ordnen wir der Zahl $x = (x_1 x_2 \ldots x_n \ldots)$ im dyadischen System das Zahlenpaar $x^{(1)} x^{(2)}$; wo

$$x^{(1)} = (x_{n_1''+1}, x_{n_1''+2} \ldots x_{n_k''+n}, x_{n_2''+1}, x_{n_2''+2} \ldots x_{n_2''+n} \ldots x_{n_k''+1} \ldots x_{n_k''+n} \ldots)$$

und

$$x^{(2)} = (x_{l_1} x_{l_2} \ldots x_{l_n} \ldots)$$

ist, und wo die Menge der Indizes $l_1 l_2 \ldots l_n \ldots n_1''+1,\ n_1''+2 \ldots n_2''+1 \ldots n_k''+1 \ldots$ mit der Menge der Indizes $1, 2, 3 \ldots n \ldots$ übereinstimmt. Die Zahl $(2^{n_k''} x)$ beginnt mit dem Index $n_k'' + 1$ und stimmt mit der Zahl $x$ von dem $n_k'' + 1$ Index an überein. Anderseits ist die Abbildung $x \backsim (x^{(1)} x^{(2)})$ eineindeutig und stetig (höchstens mit Ausnahme der rationalen Stellen) und hat die Eigenschaft, daß sie Nullmengen (Mengen vom Inhalt Eins) in Nullmengen (Mengen vom Inhalt Eins) überführt. Die Menge der Punkte in $(x^{(1)} x^{(2)})$, für welche in $x^{(1)}: 2n$ aufeinanderfolgende Einser unendlich oft vorkommen, ist vom Inhalt Eins; ihr entspricht in $(x)$ eine Menge vom Inhalt Eins, welche die Eigenschaft besitzt, daß in ihr $n$ aufeinanderfolgende Einser unendlich oft vorkommen, und zwar an den Stellen $n_1'' + 1,\ n_1'' + 2, \ldots n_1'' + n, \ldots n_k'' + 1,\ n_k'' + 2, \ldots n_k'' + n \ldots$, wie man unmittelbar einsehen kann. Es folgt daraus, daß $\limsup_{k=\infty} (2^{n_k''} x) \geq \frac{2^n - 1}{2^n}$ ist (höchstens mit Ausnahme der Nullmenge), was gegen die Voraussetzung ist. Es muß also $\limsup_{k=\infty} (2^{n_k} x) = 1$ sein (höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge). Auf dieselbe Weise zeigt man, daß $\liminf_{k=\infty} (2^{n_k} x) = 0$ ist (höchsens mit Ausnahme einer Nullmenge).

Es sei $y_1\, y_2 \,..\, y_n \ldots$ irgend eine Menge der Zahlen zwischen 0 und 1. Es sei $\limsup\limits_{n=\infty} y_n = y$, und es sei

$$\begin{array}{llll} y_1 = (x_{11}\, x_{12} \ldots x_{1m} \ldots) & \text{die Zahl } y_1 & \text{im dyadischen System} \\ y_2 = (x_{21}\, x_{22} \ldots x_{2m} \ldots) & \text{die Zahl } y_2 & \text{im dyadischen System} \\ \vdots & \vdots & \\ y_n = (x_{n1}\, x_{n2} \ldots x_{nm} \ldots, & \text{die Zahl } y_n & \text{im dyadischen System} \\ \vdots & \vdots & \end{array}$$

Wir ordnen der Menge $y_1\, y_2 \ldots y_n \ldots$ die Zahl $x$ zu, [1]) wo

$$x = (x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{13}, x_{22}, x_{31}, \ldots x_{1m}, x_{2,m-1} \ldots x_{m1} \ldots) \quad \text{ist.}$$

Wir können folgenden Satz beweisen:

2. Satz: Unter Zugrundelegung der Zuordnung der Zahlen $y_1\, y_2 \ldots y_n \ldots$ zu der Zahl $x$ bezeichnen wir mit $f(x)$ die Funktion

$$f(x) = \limsup_{n=\infty} y_n = y,$$

dann ist die Menge der Zahlen $x$, für welche $f(x)$ gleich einer Konstanten ist, welche gleich Eins ist, vom Inhalt Eins.

Beweis. Die Funktion $f(x)$ ist überall dichtperiodisch, da $\limsup\limits_{n=\infty} y_n = y$ den Wert nicht ändert, wenn man in der Zahl $x$, die $n$ ersten Ziffern beliebig ändert. Es ist also

$$f(x + a_n) = f(x), \text{ wo } a_n = \frac{\alpha_n}{2^n} \text{ ist}$$

$$(n = 1, 2, \ldots m \ldots, \ \alpha_n = 0, 1, \ldots 2^n - 1).$$

Andrerseits ist die Funktion $f(x)$ meßbar im Sinne $B$; in der Tat, bezeichnen wir die Funktion $f_k(x)$, wo

$$f_k(x) = y_k = (x_{k1}, x_{k2} \ldots x_{kn} \ldots),$$

so ist, wie man leicht einsehen kann, die Funktion $f_k(x)$ eine Funktion höchstens von der zweiten Klasse. Es ist also $f(x)$ als $\limsup\limits_{k=\infty} f_k(x)$ eine im Sinne $B$ meßbare Funktion. Es folgt daraus, daß $f(x)$ höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge gleich einer Konstanten $\alpha$ ist. Mittels kurzer Überlegung kann man zeigen, daß $\alpha = 1$ ist.

Die Menge der Zahlen $x$, für welche $\liminf\limits_{n=\infty} y_n = 0$ ist, ist vom Inhalt Eins. Der Beweis wird auf dieselbe Weise wie für

---

[1]) Das Cantorsche Diagonalverfahren.

$\limsup_{n=\infty} y_n$ geführt. Es ist also der Inhalt der Zahlen, für welche

$$\limsup_{n=\infty} y_n = 1 \quad \text{und} \quad \liminf_{n=\infty} y_n = 0$$

ist, vom Inhalt Eins.

Es sei $f(z)$ irgend eine analytische Funktion

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

wo die Koeffizienten positive reelle Zahlen sind, welche höchstens gleich 1 sind.

Es seien

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = (x_{01}\, x_{02} \ldots x_{0m} \ldots) \\ a_1 = (x_{11}\, x_{12} \ldots x_{1m} \ldots) \\ \vdots \\ a_n = (x_{n1}\, x_{n2} \ldots x_{nm} \ldots) \\ \vdots \end{array}\right\} \text{im dyadischen System geschrieben,}$$

so ordnen wir der Funktion $f(z)$ die Zahl $x$ zu, wo

$$x = (x_{01}\, x_{02}\, x_{11}\, x_{03}\, x_{12}\, x_{21} \ldots x_{0m}\, x_{1,m-1} \ldots x_{m0} \ldots)$$

ist.[1]) Wir beweisen jetzt folgenden Satz:

3. Satz: Bezeichnen wir mit $\Phi(x)$ die Funktion, welche für $x$ gleich dem Konvergenzradius der Funktion $f(z)$ ist, wo die Funktion $f(z)$ der Zahl $x$ zugeordnet ist, so ist $\Phi(x)$ höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge gleich 1.

Beweis. Es ist also $\Phi(x) = \dfrac{1}{\limsup_{n=\infty} \sqrt[n]{a_n}}$, es folgt daraus unmittelbar, daß $\Phi(x)$ überall dichtperiodisch ist. Anderseits ist $\Phi(x)$ eine im Sinne $B$ meßbare Funktion, da $\Phi_k(x) = \dfrac{1}{\sqrt[k]{a_k}}$ eine Funktion höchstens von der zweiten Klasse ist, und da $\Phi(x) = \liminf_{k=\infty} \dfrac{1}{\sqrt[k]{a_k}} = \liminf_{k=\infty} \Phi_k(x) = \dfrac{1}{\limsup_{k=\infty} \sqrt[k]{a_k}}$ ist. Es muß $\Phi(x)$ höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge gleich einer Konstanten $\alpha$ sein. Wir wollen zeigen, daß $\alpha = 1$ ist. In der Tat wäre $\alpha$ von Eins verschieden, so wäre $\alpha > 1$. Bezeichnen wir die Menge der Zahlen $x$, für welche $\Phi(x) = \alpha$ ist, mit $M_x$, so hat die Menge der Zahlen $1 - x$ (also $M_{1-x}$) denselben Inhalt, also sie muß mit der Menge $M_x$ bis auf eine Nullmenge zusammenfallen. Es müßten also zwei Werte $x_1$ und $1 - x_1$ existieren, welche gleichzeitig der Menge

[1]) Also nach dem Cantorschen Diagonalverfahren.

$M_x$ angehörten (denn wäre dies nicht der Fall, so wäre $M_x$ nicht vom Inhalt Eins). Wäre also auf der Menge $M_x : \Phi(x_1) = \alpha > 1$, so wäre auch $\Phi(1 - x_1) = \alpha > 1$. Das ist aber unmöglich, denn einerseits hätten die Potenzreihen, die den Werten $x_1$ und $1 - x_1$ entsprechen, den Konvergenzradius $\alpha > 1$, anderseits hätte die Summe dieser Potenzreihen $(1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \ldots)$ den Konvergenzradius 1, was unmöglich ist. Es muß also $\alpha = 1$ sein.

Bemerkung. Da alle in §§ 3 und 4 untersuchten Funktionen im Sinne $B$ meßbar sind, so gelten nach dem 4. Satze in § 2 alle Sätze in §§ 3 und 4 für Mengen der Zahlen $x$ höchstens mit Ausnahme einer Menge erster Kategorie. [1])

## § 6

1. Es sei $x$ irgend eine reelle irrationale Zahl und

$$\cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \cfrac{1}{x_4 + \cdots + \cfrac{1}{x_n + \cdots}}}}} = (x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots)$$

die Zahl $x$ in einen Kettenbruch entwickelt.

[1]) Wenn wir aus der Menge der Zahlen im g-adischen System eine Menge $P$ herausgreifen, wo eine der Ziffern, z. B. $g - 1$ fehlt, so ist die Menge $P$ nach dem Satze 1 in § 4 vom Inhalt Null. Da anderseits eine eineindeutige und stetige (höchstens mit Ausnahme einer abzählbaren Menge) Transformation zwischen den Zahlen der Menge $P$ und den Zahlen $x$ im „$g - 1$-System" existiert von der Eigenschaft, daß der Zahl $y = \frac{x_1}{g} + \frac{x_2}{g^2} + \ldots + \frac{x_n}{g^n} \ldots$ aus der Menge $P$ die Zahl $y = \frac{x_1}{g-1} + \frac{x_2}{(g-1)^2} + \ldots \frac{x_n}{(g-1)^n} + \ldots = (x_1\, x_2 \ \ldots x_n \ldots)$, im $g - 1$-System entspricht, so entspricht der Menge zweiter Kategorie im Intervall $\overline{0-1}$ eine Menge zweiter Kategorie in der Menge $P$. Es ist also die Menge der Zahlen $x$ in der Menge $P$, wo $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \alpha \geqq \frac{g-2}{2}$ und $\liminf\limits_{n=\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = g - 2 - \alpha \leqq \frac{g-2}{2}$ ist, von der zweiten Kategorie. Dasselbe kann man beweisen, wenn nicht eine Ziffer, sondern mehrere Ziffern fehlen. Es folgt daraus, daß die Menge der Zahlen $x$, wo $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = = \alpha \geqq \frac{1}{2}$ und $\liminf \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = 1 - \alpha \leqq \frac{1}{2}$, und wo $x = (x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots)$ $(x_i = 0$ oder $1)$ ist, in bezug auf die Menge $x = (x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots)$ von der zweiten Kategorie ist, unabhängig davon, in welchem System man die Zahlen $x$ betrachtet.

Es sei

$$x^{(2)} = \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \cfrac{1}{x_4 + \cdots + \cfrac{1}{x_n + \cdots}}}} = (x_2\, x_3 \ldots x_n \ldots)$$

und allgemein

$$x^{(k)} = \cfrac{1}{x_k + \cfrac{1}{x_{k+1} + \cfrac{1}{x_{k+2} + \cdots + \cfrac{1}{x_{k+n} + \cdots}}}}$$

$$= (x_k\, x_{k+1}\, x_{k+2} \ldots x_{k+n} \ldots),$$

so können wir folgenden Satz beweisen.

1. Satz: Die Menge der Zahlen $x$, für welche

$$\limsup_{k=\infty} x^{(k)} = \alpha \tag{1}$$

($\alpha$ eine Konstante) ist, hat den Inhalt Eins.

Beweis. Es seien $\xi'$ und $\xi''$ zwei äquivalente Zahlen, also

$$\xi'' = \frac{\alpha_n \xi' + \beta_n}{\gamma_n \xi' + \delta_n}, \text{ wo } \alpha_n \delta_n - \beta_n \gamma_n = \varepsilon \text{ ist } (\varepsilon = \pm 1),$$

dann ist $\limsup_{k=\infty} \xi'^{(k)} = \limsup_{k=\infty} \xi''^{(k)}$, da Kettenbruchentwicklungen zweier äquivalenter Zahlen von einem gewissen Teilnenner an miteinander übereinstimmen.[1] Bezeichnen wir die Funktion $\limsup_{k=\infty} x^{(k)}$ mit $f(x)$, so ist

$$f\left(\frac{\alpha_n x + \beta_n}{\gamma_n x + \delta_n}\right) = f(x), \text{ wo } \alpha_n \delta_n - \beta_n \gamma_n = \varepsilon \text{ ist } (\varepsilon = \pm 1).$$

Wir wollen zuerst zeigen, daß $f(x)$ meßbar im Sinne $B$ ist; zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit $f_k(x) = x^{(k)}$. Die Funktion $f_k(x)$ ist, wie man leicht einsehen kann, höchstens von der zweiten Klasse, es ist also $f(x)$ als $\limsup_{n=\infty} f_k(x)$ eine Funktion der Baireschen Klasse.

[1]) Äquivalente Zahlen bilden eine überall dichte abzählbare Menge. In der Tat ist $\xi$ irgend eine Zahl und $\delta$ irgend ein Intervall, so kann man zwei Kettenbrüche finden

Die Funktion $f(x)$ ist höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge gleich einer Konstanten. In der Tat, hat die Menge $E(a \leqq f(x) < b)$ in irgend einem Intervall einen von Null verschiedenen Inhalt, so hat die Menge $E(a \leqq f(x) < b)$ in jedem noch so kleinen Intervall einen von Null verschiedenen Inhalt, [1] und ist dagegen $E(a \leqq f(x) < b)$ in einem noch so kleinen Intervall eine Nullmenge, so ist die Menge $E(a \leqq f(x) < b)$ im ganzen Intervall $0 - 1$ eine Nullmenge. Daraus folgt auf Grund derselben Überlegung, wie bei dem Beweise des 3. Satzes in § 2, daß $f(x)$ höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge gleich einer Konstanten $\alpha$ ist.

2. Es sei $x$ irgend eine reelle irrationale Zahl und

$$x = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cfrac{1}{x_3 + \cdots + \cfrac{1}{x_n + \cdots}}}} = (x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots)$$

die Zahl $x$ in einem Kettenbruch entwickelt. Unter den $n$ ersten Zahlen $x_1\, x_2 \ldots x_n$ der Zahl $x$ mögen sich $p_x^{(k)}$ Zahlen $(k)$ und $p_x^{(l)}$ Zahlen $(l)$ befinden. Dann gilt der Satz:

2. Satz: Die Menge der Zahlen $x$, für welche $\lim\sup \frac{p_x^{(l)}}{p_x^{(k)}} = A_{lk}$ ist, wo $A_{lk}$ irgend eine Konstante ist, hat den Inhalt Eins. Diese Konstante ist von Null verschieden und es ist

$$A_{kl} = A_{k'l'} \left\{ \begin{array}{l} k = 1, 2 \ldots n \ldots \\ l = 1, 2 \ldots n \ldots \\ k' = 1, 2 \ldots n \ldots \\ l' = 1, 2 \ldots n \ldots \end{array} \right.$$

wo $k \neq l$ und $k' \neq l'$ ist.

---

$$a = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_n}}} \quad \text{und} \quad b = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n+1}}}}$$

von der Eigenschaft, daß $a$ und $b$ im Intervall $\delta$ liegen, es liegt also auch die Zahl $a + \frac{1}{\xi}$ im Intervall $\delta$, da $a + \frac{1}{\xi}$ zwischen $a$ und $b$ liegt. Andrerseits ist die Zahl $a + \frac{1}{\xi}$ äquivalent der Zahl $\xi$, es ist also die Menge äquivalenter Zahlen überall dicht. Die Abzählbarkeit ist unmittelbar klar.

Beweis. Sind $\xi'$ und $\xi''$ zwei äquivalente Zahlen, also

$$\xi'' = \frac{\alpha_n \xi' + \beta_n}{\gamma_n \xi' + \delta_n}, \text{ wo } \alpha_n \delta_n - \beta_n \gamma_n = \varepsilon = \pm 1$$

ist, dann ist $\limsup_{n=\infty} \frac{p_{\xi'}^{(l)}}{p_{\xi'}^{(k)}} = \limsup_{n=\infty} \frac{p_{\xi''}^{(l)}}{p_{\xi''}^{(k)}}$. Bezeichnen wir die Funktion $\limsup_{n=\infty} \frac{p_x^{(k)}}{p_x^{(l)}}$ mit $f(x)$, so ist

$$f\left(\frac{\alpha_n x + \beta_n}{\gamma_n x + \delta_n}\right) = f(x), \text{ wo } \alpha_n \delta_n - \beta_n \gamma_n = \varepsilon - \pm 1$$

ist. Andrerseits ist die Funktion $f(x)$ im Sinne $B$ meßbar, da die Funktion $f_m(x) = \frac{p_{x(m)}^{(l)}}{p_{x(m)}^{(k)}}$, wo $p_{x(m)}^{(l)}$ die Anzahl der (l) Zahlen und $p_{x(m)}^{(k)}$ die Anzahl der $(k)$ Zahlen unter den $m$ ersten Zahlen $x_1\, x_2 \ldots x_m$ der Zahl $x$ ist, der Baireschen Klasse angehört, wie man unmittelbar einsehen kann. Da aber $f(x) = \limsup_{m=\infty} f_m(x)$ ist, so ist $f(x)$ im Sinne $B$ meßbar. Es folgt daraus, daß $f(x)$ höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge gleich einer Konstanten ist, die wir mit $A_{lk}$ bezeichnen.

Wir wollen zuerst zeigen, daß diese Konstante von Null verschieden ist. Zu diesem Zwecke definieren wir die Funktion $F(x)$. folgendermaßen: Ist $x$ irgend eine reelle irrationale Zahl entwickelt in einem Kettenbruch, so ersetzen wir in $(x)$ alle $l$ durch $k$ und alle $k$ durch $l$ und bezeichnen diese Zahl mit $y_x$, die Funktion $F(x)$ sei für die irrationalen $x$ gleich $y_x$, für die rationalen gleich Null. Die so definierte Funktion $F(x)$ ist auf der Menge der irrationalen Stellen eineindeutig und stetig, sie ist also nach einem Satze von Baire höchstens von der zweiten Klasse. [1]) Außerdem hat die Funktion $F(x)$ die wichtige Eigenschaft, daß sie jede meßbare Menge in $(x)$ vom Inhalt $\delta$ in eine Menge vom Inhalt $\delta$ in $y_x$ überführt, was man sehr leicht, wie bei den Zahlen des g-adischen Systems, einsehen kann. Da für jedes $(x)$ die Beziehung $\limsup_{n=\infty} \frac{p_x^{(l)}}{p_x^{(l)} + p_{(x)}^{k}} = \limsup_{n=\infty} \frac{p_{y_x}^{(k)}}{p_{y_x}^{(k)} + p_{y_x}^{(l)}}$ gilt [2]) und es ist $p_x^{(l)} + p_x^{(k)} =$

[1]) Acta mathematica, Bd. 32. — Baire, Sur la representation des fonctions discontinues, Seite 103.

[2]) Die Menge der Punkte, wo $\limsup_{n=\infty} \frac{p_x^{(l)}}{p_x^{(l)} + p_x^{(k)}}$ höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge gleich einer Konstanten, welche gleich $A_l$ ist, bezeichnen wir mit $M_l$; analog der Menge der Punkte, wo $\limsup_{n=\infty} \frac{p_x^{(k)}}{p_x^{(l)} + p_x^{(k)}}$ höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge gleich einer Konstanten, welche gleich $A_k$ ist, bezeichnen wir mit $M_k$.

$=p_{y_x}^{(l)}+p_{y_x}^{(k)}$, so entspricht der Menge $M_l$ in $(x)$ die Menge $M_k$ in $(y_x)$. Da $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p_x^{(l)}}{p_x^{(l)}+p_x^{(k)}} + \liminf\limits_{n=\infty} \frac{p_x^{(k)}}{p_x^{(l)}+p_x^{(k)}} = 1$ und $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p_x^{(l)}}{p_x^{(l)}+p_x^{(k)}} \geqq \liminf\limits_{n=\infty} \frac{p_x^{(l)}}{p_x^{(l)}+p_x^{(k)}}$ ist, so muß $A_l$ mindestens $\frac{1}{2}$ gleich sein. Es folgt daraus unmittelbar, daß $A_{kl} \geqq 1$ ist. Da $k$ und $l$ beliebige Zahlen sind, so ist $A_{kl} \geqq 1$ (wenn $\begin{matrix} k=1,2\ldots n\ldots \\ l=1,2\ldots n\ldots \end{matrix}$ ist) und $k \neq l$ ist. Wir wollen jetzt zeigen, daß $A_{kl}=A_{k'l'}$ ist. Zu diesem Zwecke nehmen wir irgend drei Zahlen $k$, $l$, $o$ und zeigen, daß $A_{kl}=A_{lo}=A_{ko}$ ist, da $k$, $l$, $o$ beliebige Zahlen sind, so folgt daraus unmittelbar die Behauptung. Die Funktion $F(x)$ bildet die Menge der Zahlen $(x)$, für welche $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p_x^{(l)}}{p_x^{(o)}} = A_{lo}$ ist, ab auf die Menge $(y_x)$, für welche $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p_x^{(k)}}{p_x^{(o)}} = A_{ko}$ ist, und zwar so, daß $A_{lo}=A_{ko}$ ist. Dadurch ist der Satz vollständig bewiesen.[1])

Es ist also die Menge der Zahlen

$$x=\cfrac{1}{x_1+\cfrac{1}{x_2+\cdots+\cfrac{1}{x_n+\cdots}}}=(x_1\,x_2\ldots x_n\ldots)$$

für welche $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p_x^{(l)}}{p_x^{(k)}} = A_{lk} = A$ ist, wo $k, l = 1, 2 \ldots m \ldots$ ist, $(k \neq l)$ vom Inhalt Eins.

In der Tat, bezeichnet man mit $D_{lk}$ die Menge der Zahlen $x$, für welche $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p_x^{(l)}}{p_x^{(k)}} = A_{lk}$ ist, so ist der Durchschnitt aller

[1]) Man kann sogar noch mehr beweisen. Bezeichnet man $p_x^{(l)}$ die Anzahl der Zahlen $l$ auf $n$ ersten Stellen des Kettenbruches $x$, so ist die Menge der Kettenbrüche, für welche $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p_x^{(l)}}{n} = A_l \geqq \frac{1}{2}$ ist, und zwar wo $A_1 = A_2 \ldots = A_l \ldots$ ist, vom Inhalt Eins. Der Beweis wird geführt, indem man eine ganz analoge Funktion definiert, wie bei dem Beweise des zweiten Satzes. Es folgt daraus der Satz 2, den Bernstein in seiner Arbeit (Math. Annalen, Bd. 71, Seite 428) bewiesen hat, der folgendermaßen lautet: Die irrationalen Zahlen $x\ (0<x<1)$, für welche von irgend einem $n=n^{(r)}$ an die Bedingungen: $a_n=k$ oder $a_n \geqq k$ für alle $r=0,1,2\ldots m$ (wo $n^{(r)}<n^{(r+1)}$ ist) erfüllt sind, bilden Punktmengen vom Inhalt Null.

Mengen $D_{lk}$ $(k, l = 1, 2 \ldots m \ldots)$, als Durchschnitt von einer abzählbaren Menge von meßbaren Mengen mit dem Inhalt Eins wieder eine meßbare Menge mit dem Inhalt Eins. Bezeichnen wir diesen Durchschnitt mit $D$, so enthält die Menge $D$ alle Zahlen $x$, für welche $\limsup\limits_{n=\infty} \frac{p_x^{(l)}}{p_x^{(k)}} = A_{lk} = A$ ist, wo $k, l = 1, 2 \ldots m \ldots$ ist.

Der Satz 2 gilt auch für irgend welche unendliche Teilmenge der Indizesmenge $(1, 2 \ldots n \ldots)$, also z. B. für die Indizesmenge $n_1 n_2 \ldots n_m \ldots$ Es ist also die Menge der Kettenbrüche, für welche an den Stellen $n_1 n_2 \ldots n_m \ldots$ alle möglichen ganzen Zahlen $1, 2 \ldots n \ldots$ unendlich oft vorkommen, und zwar so, daß die $\limsup\limits_{m=\infty} \frac{p_x^{(l)}}{p_x^{(k)}}$, für die Indizesmenge $n_1 n_2 \ldots n_m \ldots$ gebildet, alle gleich $A_{lk} = A$ sind, vom Inhalt Eins. Dasselbe gilt, wie man unmittelbar einsehen kann, wenn man die Menge der Indizes $(1, 2 \ldots n \ldots)$ in eine unendliche Menge von Indizesmengen spaltet, deren jede unendlich ist. Es ist also die Menge der Kettenbrüche, für welche auf jeder dieser Indizesmengen $\limsup \frac{p_x^{(l)}}{p_x^{(k)}} = A_{lk} = A$ ist, vom Inhalt Eins. Es sei $x$ dargestellt in einem Kettenbruch, also

$$x = \cfrac{1}{x_1 + \cfrac{1}{x_2 + \cdot \, \cdot \, \cdot + \cfrac{1}{x_n + \cdot \, \cdot \, \cdot}}} = (x_1 \, x_2 \ldots x_n \ldots)$$

und es sei $\{x_k \, x_{k+1} \ldots x_{k+m}\}$ irgend ein Teil in dem Kettenbruche, wo die Zahlen $x_k \, x_{k+1} \ldots x_{k+m}$ bestimmte ganze Zahlen sind, so ist die Menge der Kettenbrüche, wo der Teil $\{x_k \, x_{k+1} \ldots x_{k+m}\}$ unendlich oft vorkommt vom Inhalt Eins. Der Beweis wird auf dieselbe Weise geführt, wie der Beweis des Satzes 2. Da die Menge aller möglichen Teile endlicher Ordnung abzählbar ist, so folgt daraus, daß die Menge der Kettenbrüche, wo alle möglichen Teile unendlich oft vorkommen, vom Inhalt Eins sein muß. Es folgt daraus unmittelbar, daß $\limsup\limits_{k=\infty} x^{(k)}$, höchstens mit Ausnahme einer Nullmenge gleich 1 ist.

Da alle Funktionen, die wir in § 6 definiert haben, im Sinne $B$ meßbar und überall dichtperiodisch sind, so gelten alle diese Sätze für die Zahlen $(x)$ höchstens mit Ausnahme einer Menge erster Kategorie.