Arch. math. Logik 14 (1971), 38—53.

MEHRSORTIGE LOGISCHE SYSTEME MIT UNENDLICH LANGEN FORMELN I* **

Von Werner Carstengerdes, München

Herrn Professor Dr. Kurt Schütte zum 60. Geburtstag gewidmet.

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

Einleitung 38
§ 1. Das System *L1* der mehrsortigen Logik mit unendlich langen Formeln 39
§ 2. Ergebnisse aus der Theorie der rekursiven Funktionen und deren Anwendung auf *L*1 48
Literaturverzeichnis 53
§ 3. Die Schnitt-Elimination in *L1* . . . .
§ 4. Das formale System *L2* . . . .
§ 5. Der Interpolationssatz . . . .
§ 6. Die Systeme $L1(\Sigma_n)$ und $L2(\Sigma_n)$ . . .
folgt in Heft 14/3—4

Einleitung

In dieser Arbeit werden mehrsortige logische Systeme mit abzählbar unendlich langen Formeln behandelt. In § 1 wird die diesen Systemen zugrunde liegende Sprache aufgebaut, wobei gleichzeitig eine Arithmetisierung vorgenommen wird. Dabei läßt man Disjunktionen von abzählbar unendlich vielen Formeln nur zu, wenn die Menge der Nummern dieser Formeln rekursiv aufzählbar ist. Damit werden also die unendlichen Disjunktionen in einem gewissen konstruktiven Sinne beschränkt, wie es auch bei Kino und Takeuti in [2] und bei Lopez-Escobar in [6] auftritt.

Bei der Definition der Herleitbarkeit werden die Begriffe „Positivteil" und „Positivform" benutzt und damit eine Erweiterung des Schütte-Systems der Prädikatenlogik aus [7] in bezug auf unendlich lange Formeln gegeben. Dabei wird das Axiomensystem aber wie in Tait [9] etwas allgemeiner gehalten. Wie das Schütte-System der Prädikatenlogik eine Verallgemeinerung des prädikatenlogischen Sequenzenkalküls ist, so sind die hier aufgebauten Systeme auch Verallgemeinerungen von Sequenzenkalkülen mit unendlich bzw. endlich vielen Antezedens- und Sukzedensformeln.

Es wird gezeigt, daß in den Systemen *L1* und *L2* der Schnitt eine zulässige Schlußregel ist. Dies wird nicht wie in Lopez-Escobar [5] durch einen Vollständigkeitssatz

* Eingegangen am 21. 11. 1969.
** Diese Arbeit ist als Dissertation von der Universität München angenommen worden.

sondern rein syntaktisch nachgewiesen, wobei transfinite Induktionen benutzt werden. In § 2 werden zunächst einige Hilfsmittel aus der Theorie der rekursiven Funktionen bereitgestellt. Die §§ 3 und 4 bestehen im wesentlichen aus den Schnitt-Eliminationssätzen, bei deren Beweisen man ähnlich wie in Schütte [7] beim System Ω der vollständigen Zahlentheorie vorgeht. Die Ordinalzahlschranken bei den Schnitt-Eliminationen haben die gleichen Größenordnungen wie die entsprechenden in Tait [9] und Feferman [1]. In § 4 wird außerdem noch gezeigt, daß die Systeme *L1* und *L2* äquivalent sind. In § 5 werden zwei Interpolationssätze bewiesen, wozu aber eine Einschränkung des Axiomensystems vorgenommen wird.

In § 6 werden die Systeme *L1* und *L2* zu Systemen $L1(\Sigma_n)$ und $L2(\Sigma_n)$ mit $n \geqq 1$ erweitert. Dabei bauen sich diese Systeme auf *L1* und *L2* auf, wie die Hierarchie der arithmetischen Mengen, die durch pränexe Formeln mit einem Existenzquantor als erstem Quantor charakterisiert werden, auf die rekursiv aufzählbaren Mengen. Für diese Systeme sind zu den Sätzen über *L1* und *L2* analoge Sätze gültig. In Feferman [1] ist das schwächste System, das stärker als die Prädikatenlogik ist, ein System, das mit hyperarithmetischen Mengen zusammenhängt. Die hier betrachteten Systeme bilden eine Kette, die in diesem Zwischenstück liegt.

Herrn Professor Dr. Kurt Schütte möchte ich für die Themenstellung und die wertvollen Gespräche zu dieser Arbeit herzlich danken.

§ 1. Das System *L1* der mehrsortigen Logik mit unendlich langen Formeln

$\mathbb{N}$ sei die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen, R_n und PR_n für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen der n-stelligen rekursiven bzw. partiell rekursiven Funktionen, R und PR die Mengen der rekursiven bzw. partiell rekursiven Funktionen. Für $\varphi \in PR$ sei $\bar{\varphi}$ eine Gödelnummer der Funktion φ. p_n bezeichne die n-te ungerade Primzahl, d. h. $p_0 = 2$, $p_1 = 3, \ldots$. Für $0 < n \in \mathbb{N}$ sei $(n)_i$ der Exponent von p_i in der Primfaktorzerlegung von n, es sei $(0)_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. lg sei die einstellige primitiv rekursive Funktion mit:

$$lg(n) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } n = 0 \text{ oder } n = 1 \text{ ist,} \\ k, \text{ wenn } (n)_k \neq 0 \text{ und } (n)_i = 0 \text{ für alle } i > k \text{ ist.} \end{cases}$$

$[n_0, \ldots, n_i]$ mit $i \geqq 0$ bezeichne die Zahl $\prod_{k=0}^{i} p_k^{n_k}$.

1.1. *Signaturen*

$S = (\Sigma, N_1, \langle m_i \rangle_{i \in N_1}, \langle \tau_i \rangle_{i \in N_1}, N_2, \langle n_i \rangle_{i \in N_2})$ ist eine *Signatur*, wenn folgendes gilt:

1.1.1. $\Sigma \subseteq \mathbb{N}$, $N_1 \subseteq \mathbb{N}$, $N_2 \subseteq \mathbb{N}$.

1.1.2. $\Sigma \neq \emptyset$. (Σ ist eine Menge von Sortenbezeichnungen.)

1.1.3. Für $i \in N_1$ ist $m_i \in \mathbb{N}$ und $\tau_i \in \Sigma^{m_i+1}$. ($m_i$ ist die Stellenzahl, τ_i der Typ des i-ten Funktionszeichens.)

1.1.4. Für $i \in N_2$ ist $n_i \in \mathbb{N}$. (n_i ist die Stellenzahl des i-ten Relationszeichens.)

Im folgenden sei $S = (\Sigma, N_1, \langle m_i \rangle_{i \in N_1}, \langle \tau_i \rangle_{i \in N_1}, N_2, \langle n_i \rangle_{i \in N_2})$ eine Signatur.

1.2. Variablen der Sprache $\mathbb{L}(S)$

1.2.1. Für $i \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in \Sigma$ gelte: $v_i^\sigma \in \mathbb{V}^\sigma$, $w_i^\sigma \in \mathbb{W}^\sigma$, $N(v_i^\sigma, [0, i, \sigma])$ und $N(w_i^\sigma, [1, i, \sigma])$.

1.2.2. $\mathbb{V}(\Sigma) = \bigcup \{\mathbb{V}^\sigma : \sigma \in \Sigma\}$.

1.2.3. $\mathbb{W}(\Sigma) = \bigcup \{\mathbb{W}^\sigma : \sigma \in \Sigma\}$.

$\mathbb{V}^\sigma$ ist die Menge der *freien Variablen* der Sorte σ.
$\mathbb{W}^\sigma$ ist die Menge der *gebundenen Variablen* der Sorte σ.
Gilt $N(u, n)$, so ist n die *Nummer* der Variablen u.

1.3. Induktive Definition der Quasiterme der Sprache $\mathbb{L}(S)$

1.3.1. Für $u^\sigma \in \mathbb{V}^\sigma \cup \mathbb{W}^\sigma$ gelte: $u^\sigma \in \mathbb{T}^\sigma(S)$ und $Vu^\sigma = \{u^\sigma\}$.

1.3.2. Ist $i \in N_1$, $\tau_i = (\sigma_0, \ldots, \sigma_{m_i})$ und $N(s_k, n_k)$ und $s_k \in \mathbb{T}^{\sigma_k}(S)$ für alle $k = 1, \ldots, m_i$, so gelte: $f_i(s_1, \ldots, s_{m_i}) \in \mathbb{T}^{\sigma_0}(S)$,
$N(f_i(s_1, \ldots, s_{m_i}), [2, i, n_1, \ldots, n_{m_i}])$,
$Vf_i(s_1, \ldots, s_{m_i}) = \bigcup \{Vs_k : k = 1, \ldots, m_i\}$.
Ist $m_i = 0$, so ist dann $f_i \in \mathbb{T}^{\sigma_0}(S)$, $N(f_i, [2, i])$ und $Vf_i = \emptyset$.

1.3.3. $\mathbb{T}(S) = \bigcup \{\mathbb{T}^\sigma(S) : \sigma \in \Sigma\}$.

1.3.4. $T^\sigma(S) = \{t^\sigma : t^\sigma \in \mathbb{T}^\sigma(S),\ Vt^\sigma \subseteq \mathbb{V}(\Sigma)\}$.

$\mathbb{T}^\sigma(S)$ ist die Menge der *Quasiterme* der Sorte σ, $T^\sigma(S)$ die Menge der *Terme* der Sorte σ. Gilt $N(s, n)$, so ist n die Nummer des Quasitermes s. Vs ist die Menge der in s auftretenden Variablen.
Für das Folgende wird ein hinreichend starkes und einfaches Ordinalzahlensystem mit der Ordnungsrelation „$\leqq.$" zugrunde gelegt. Über die Stärke wird später Näheres ausgeführt. Die Ordinalzahlen werden durch α, β, γ mitgeteilt.

1.4. Induktive Definition der Quasiformeln der Sprache $\mathbb{L}(S)$

1.4.1. Ist $i \in N_2$, $N(s_k, m_k)$ und $s_k \in \mathbb{T}(S)$ für alle $k = 1, \ldots, n_i$, so gelte: $r_i(s_1, \ldots, s_{n_i}) \in \mathbb{F}_0(S)$,
$N(r_i(s_1, \ldots, s_{n_i}), [3, i, m_1, \ldots, m_{n_i}])$, $Vr_i(s_1, \ldots, s_{n_i}) = \bigcup \{Vs_k : k = 1, \ldots, n_i\}$, $Wr_i(s_1, \ldots, s_{n_i}) = \emptyset$
und $r_i(s_1, \ldots, s_{n_i}) \leqq : \alpha$ für jede Ordinalzahl α. Ist $n_i = 0$, so ist dann $r_i \in \mathbb{F}_0(S)$, $N(r_i, [3, i])$, $Vr_i = \emptyset$, $Wr_i = \emptyset$ und $r_i \leqq : \alpha$ für jede Ordinalzahl α.

1.4.2. $\mathbb{F}_0(S) \subseteq \mathbb{F}(S)$.

1.4.3. Ist $U \in \mathbb{F}(S)$ und $N(U, n)$, so gelte: $\neg U \in \mathbb{F}(S)$, $N(\neg U, [4, n])$, $V \neg U = VU$ und $W \neg U = WU$. Ist $U \leqq : \beta$ und $\beta <. \alpha$, so gilt $\neg U \leqq : \alpha$.

1.4.4. Ist $U_i \in \mathbb{F}(S)$ und $N(U_i, n_i)$ für $i = 0, 1$, so gelte: $(U_0 \vee U_1) \in \mathbb{F}(S)$, $N((U_0 \vee U_1), [5, n_0, n_1])$, $V(U_0 \vee U_1) = VU_0 \cup VU_1$ und $W(U_0 \vee U_1) = WU_0 \cup WU_1$. Ist $U_i \leqq : \alpha_i$ und $\alpha_i <. \alpha$ für $i = 0, 1$, so gelte: $(U_0 \vee U_1) \leqq : \alpha$.

1.4.5. Ist $\varphi \in R_1$, $U_n \in \mathbb{F}(S)$ mit $N(U_n, \varphi(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\bigcup \{VU_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup \{VU_n : n \in \mathbb{N}, n \leqq k\}$, so gelte: $\overset{n}{\vee} U_n \in \mathbb{F}(S)$, $N(\overset{n}{\vee} U_n, [6, \bar{\varphi}, k])$, $V \overset{n}{\vee} U_n = \bigcup \{VU_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $W \overset{n}{\vee} U_n = \bigcup \{WU_n: n \in \mathbb{N}\}$. Dabei bezeichnet $\overset{n}{\vee} U_n$ die unendliche Disjunktion $\vee (U_0, U_1, \ldots)$ der Quasiformeln U_n. Ist $U_n \leqq : \alpha_n$ und $\alpha_n <. \alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gelte: $\overset{n}{\vee} U_n \leqq : \alpha$.

1.4.6. Ist $U \in \mathbb{F}(S)$, $x \in \mathbb{W}(\Sigma)$, $x \notin WU$, $N(x, m)$ und $N(U, n)$, so gelte: $\vee xU \in \mathbb{F}(S)$, $N(\vee xU, [7, m, n])$, $V \vee xU = VU \setminus \{x\}$ und $W \vee xU = WU \cup \{x\}$. Ist $U \leqq : \beta$ und $\beta <. \alpha$, so gelte $\vee xU \leqq : \alpha$.

1.4.7. $F_0(S) = \{P : P \in \mathbb{F}_0(S), VP \subseteq \mathbb{V}(\Sigma)\}$.

1.4.8. $F(S) = \{A : A \in \mathbb{F}(S), VA \subseteq \mathbb{V}(\Sigma)\}$.

$\mathbb{F}(S)$ ist die Menge der *Quasiformeln*, $F_0(S)$ die Menge der *Primformeln* und $F(S)$ die Menge der *Formeln*. Gilt $N(U, n)$, so ist n eine *Nummer* der Quasiformel U. VU ist die Menge der in U *frei auftretenden* Variablen und WU die Menge der in U *gebunden auftretenden* Variablen. $U \leqq : \alpha$ besagt, daß U einen *Rang* hat, der kleiner oder gleich α ist. Aus der Definition 1.4. ergibt sich, daß VU für $U \in \mathbb{F}(S)$ endlich ist.

Mitteilungszeichen

a^σ, b^σ	für freie Variablen der Sorte σ,
x^σ, y^σ	für gebundene Variablen der Sorte σ,
u^σ	für beliebige Variablen der Sorte σ,
s^σ	für Quasiterme der Sorte σ,
t^σ	für Terme der Sorte σ,
U	für Quasiformeln,
P, Q	für Primformeln,
A, B, C, D, E	für Formeln,
Γ, Δ	für endliche (evtl. leere) Mengen von Formeln.

Diese Mitteilungszeichen werden auch mit unteren Indizes verwendet. Die oberen Indizes werden manchmal fortgelassen. Das Zeichen „$\equiv$“ wird als Identität von Zeichenreihen benutzt.

1.5. Induktive Definition der Substitution

Im folgenden sei u eine Variable und t ein Term von derselben Sorte wie u.

1.5.1. Für $u_0 \in \mathbb{V}(\Sigma) \cup \mathbb{W}(\Sigma)$ sei

$$\left(u_0 \binom{u}{t}\right) \equiv \begin{cases} t, \text{ wenn } u_0 \equiv u \text{ ist,} \\ u_0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

1.5.2. $\left(f_i(s_1, \ldots, s_{m_i}) \binom{u}{t}\right) \equiv f_i\left(\left(s_1 \binom{u}{t}\right), \ldots, \left(s_{m_i} \binom{u}{t}\right)\right)$.

1.5.3. $\left(r_i(s_1,\ldots,s_{n_i})\binom{u}{t}\right) \equiv r_i\left(\left(s_1\binom{u}{t}\right),\ldots,\left(s_{n_i}\binom{u}{t}\right)\right)$.

1.5.4. $\left(\neg U\binom{u}{t}\right) \equiv \neg\left(U\binom{u}{t}\right)$.

1.5.5. $\left((U_0 \vee U_1)\binom{u}{t}\right) \equiv \left(\left(U_0\binom{u}{t}\right) \vee \left(U_1\binom{u}{t}\right)\right)$.

1.5.6. $\left(\overset{n}{\vee} U_n\binom{u}{t}\right) \equiv \overset{n}{\vee}\left(U_n\binom{u}{t}\right)$.

1.5.7. $\left(\bigvee xU\binom{u}{t}\right) \equiv \begin{cases} \bigvee xU, \text{ wenn } x \equiv u \text{ ist}, \\ \bigvee x\left(U\binom{u}{t}\right) \text{ sonst.} \end{cases}$

1.5.8. $\Gamma\binom{u}{t} = \left\{\left(A\binom{u}{t}\right) : A \in \Gamma\right\}$.

Die äußeren Klammern werden fortgelassen, wenn dies nicht zu Mißverständnissen führt. Wie sofort zu sehen ist, ist $s\binom{u}{t}$ ein Quasiterm. In § 2 wird gezeigt, daß auch $U\binom{u}{t}$ eine Quasiformel ist.

1.6. Induktive Definition der Positivform

Im folgenden sei $0 < m \in \mathbb{N}$.

1.6.1. Für $A \in F(S)$ gelte: $A \in \mathbb{P}_m(S)$, $IA = \emptyset$ und $(A\,[A_1,\ldots,A_m]) \equiv A$.

1.6.2. Für $1 \leqq i \leqq m$ gelte: $X_i \in \mathbb{P}_m(S)$, $N(X_i, [8, i])$, $VX_i = \emptyset$, $IX_i = \{i\}$, $(X_i\,[A_1,\ldots,A_m]) \equiv A_i$ und $X_i \leqq: \alpha$ für alle Ordinalzahlen α.

1.6.3. Ist $\mathfrak{A} \in \mathbb{P}_m(S)$ und $N(\mathfrak{A}, n)$, so gelte: $\neg\neg\mathfrak{A} \in \mathbb{P}_m(S)$, $N\big(\neg\neg\mathfrak{A}, [4, [4, n]]\big)$, $V\neg\neg\mathfrak{A} = V\mathfrak{A}$, $I\neg\neg\mathfrak{A} = I\mathfrak{A}$ und $(\neg\neg\mathfrak{A}\,[A_1,\ldots,A_m]) \equiv \neg\neg(\mathfrak{A}\,[A_1,\ldots,A_m])$. Ist $\mathfrak{A} \leqq: \alpha_0$ und $\alpha_0 <.\ \alpha_1 <.\ \alpha$, so gelte $\neg\neg\mathfrak{A} \leqq: \alpha$.

1.6.4. Ist für $i = 0, 1$ $\mathfrak{A}_i \in \mathbb{P}_m(S)$ und $N(\mathfrak{A}_i, n_i)$ und $I\mathfrak{A}_0 \cap I\mathfrak{A}_1 = \emptyset$, so gelte: $(\mathfrak{A}_0 \vee \mathfrak{A}_1) \in \mathbb{P}_m(S)$, $N((\mathfrak{A}_0 \vee \mathfrak{A}_1), [5, n_0, n_1])$, $V(\mathfrak{A}_0 \vee \mathfrak{A}_1) = V\mathfrak{A}_0 \cup V\mathfrak{A}_1$, $I(\mathfrak{A}_0 \vee \mathfrak{A}_1) = I\mathfrak{A}_0 \cup I\mathfrak{A}_1$ und $((\mathfrak{A}_0 \vee \mathfrak{A}_1)\,[A_1,\ldots,A_m]) \equiv ((\mathfrak{A}_0[A_1,\ldots,A_m]) \vee (\mathfrak{A}_1[A_1,\ldots,A_m]))$. Ist $\mathfrak{A}_i \leqq: \alpha_i$ und $\alpha_i <.\ \alpha$ für $i = 0, 1$, so gelte $(\mathfrak{A}_0 \vee \mathfrak{A}_1) \leqq: \alpha$.

1.6.5. Ist $\varphi \in R_1$, $\mathfrak{A}_n \in \mathbb{P}_m(S)$ mit $N(\mathfrak{A}_n, \varphi(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $I\mathfrak{A}_i \cap I\mathfrak{A}_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ mit $i, j \in \mathbb{N}$ und existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $\bigcup\{V\mathfrak{A}_n : n \in \mathbb{N}\} = \bigcup\{V\mathfrak{A}_n : k \geqq n \in \mathbb{N}\}$ und $I\mathfrak{A}_i = \emptyset$ für $i \geqq k$, so gelte: $\overset{n}{\vee}\mathfrak{A}_n \in \mathbb{P}_m(S)$, $N\big(\overset{n}{\vee}\mathfrak{A}_n, [6, \bar{\varphi}, k]\big)$, $V\overset{n}{\vee}\mathfrak{A}_n = \bigcup\{V\mathfrak{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$, $I\overset{n}{\vee}\mathfrak{A}_n = \bigcup\{I\mathfrak{A}_n : n \in \mathbb{N}\}$ und $\big(\overset{n}{\vee}\mathfrak{A}_n[A_1,\ldots,A_m]\big) \equiv \overset{n}{\vee}(\mathfrak{A}_n[A_1,\ldots,A_m])$. $\overset{n}{\vee}\mathfrak{A}_n$ bezeichnet die unendliche Disjunktion $\bigvee(\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots)$ der $\mathfrak{A}_n$. Ist $\mathfrak{A}_n \leqq: \alpha_n$ und $\alpha_n <.\ \alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gelte $\overset{n}{\vee}\mathfrak{A}_n \leqq: \alpha$.

1.6.6. $P_m(S) = \{\mathfrak{P} : \mathfrak{P} \in \mathbb{P}_m(S), I\mathfrak{P} = \{1,\ldots,m\}\}$.

Die äußeren Klammern bei $(\mathfrak{A}[A_1, \ldots, A_m])$ werden fortgelassen, wenn dies nicht zu Mißverständnissen führt. $\mathbb{P}_m(S)$ ist die Menge der *m-stelligen Nennformen* und $P_m(S)$ die Menge der *m-stelligen Positivformen.* Gilt $N(\mathfrak{A}, n)$, so ist n eine *Nummer* der Nennform $\mathfrak{A}$. $V\mathfrak{A}$ ist die Menge der in $\mathfrak{A}$ auftretenden freien Variablen, $I\mathfrak{A}$ die *Indexmenge* derjenigen i, für die das *Nennzeichen* X_i in $\mathfrak{A}$ auftritt und $\mathfrak{A}[A_1, \ldots, A_m]$ das Ergebnis der Substitution von A_i für X_i. Die Menge $V\mathfrak{A}$ ist endlich, wie man sofort aus der Definition 1.6. erkennt. Ist $\mathfrak{A} \in \mathbb{P}_m(S)$ und sind $A_1, \ldots, A_m$ Formeln, so ist $\mathfrak{A}[A_1, \ldots, A_m]$ eine Formel. Dies wird in § 2 bewiesen. Ist $\mathfrak{P} \in P_m(S)$, so tritt A_i in der Formel $\mathfrak{P}[A_1, \ldots, A_m]$ an genau einer bezeichneten Stelle als *Positivteil* auf $(i = 1, \ldots, m)$.

Ein *minimaler Positivteil* einer Formel ist ein Positivteil, der außer sich selbst keinen Positivteil mehr enthält. Es treten als Minimalteile auf: P, $\neg P$, $\neg(A_0 \vee A_1)$, $\neg \overset{n}{\vee} A_n$, $\bigvee xU$ und $\neg \bigvee xU$.

Als Mitteilungszeichen für Nennformen verwenden wir: $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0, \ldots$. Als Mitteilungszeichen für m-stellige Positivformen verwenden wir: $\mathfrak{P}^m, \mathfrak{P}^m_0, \mathfrak{P}^m_1, \ldots$. Für $m = 1$ lassen wir den oberen Index fort. Im folgenden wird mit Z die leere Zeichenreihe bezeichnet.

1.7. Induktive Definition der Streichung $\mathfrak{A}[\ ]_i$

Im folgenden sei $0 < i \in \mathbb{N}$.

1.7.1. Für $A \in F(S)$ gelte: $(A[\ ]_i) \equiv A$.

1.7.2. Für $0 < j \in \mathbb{N}$ gelte:

$$(X_j[\ ]_i) \equiv \begin{cases} Z, & \text{wenn } i = j \text{ ist,} \\ X_j & \text{sonst.} \end{cases}$$

1.7.3. $$(\neg\neg\mathfrak{A}[\ ]_i) \equiv \begin{cases} Z, \text{ wenn } (\mathfrak{A}[\ ]_i) \equiv Z \text{ ist,} \\ \neg\neg(\mathfrak{A}[\ ]_i) \text{ sonst.} \end{cases}$$

1.7.4. $$((\mathfrak{A}_0 \vee \mathfrak{A}_1)[\ ]_i) \equiv \begin{cases} \mathfrak{A}_0, \text{ wenn } (\mathfrak{A}_1[\ ]_i) \equiv Z \text{ ist,} \\ \mathfrak{A}_1, \text{ wenn } (\mathfrak{A}_0[\ ]_i) \equiv Z \text{ ist,} \\ ((\mathfrak{A}_0[\ ]_i) \vee (\mathfrak{A}_1[\ ]_i)) \text{ sonst.} \end{cases}$$

1.7.5. $\left(\overset{n}{\vee}\mathfrak{A}_n[\ ]_i\right) \equiv \overset{n}{\vee}\mathfrak{B}_n$ mit

$$\mathfrak{B}_k \equiv \begin{cases} (\mathfrak{A}_{k+1}[\ ]_i), \text{ wenn } (\mathfrak{A}_j[\ ]_i) \equiv Z \text{ für ein } j \leq k \text{ ist,} \\ (\mathfrak{A}_k[\ ]_i) \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die äußeren Klammern von $(\mathfrak{A}[\ ]_i)$ werden fortgelassen, wenn dies nicht zu Mißverständnissen führt. Für $i = 1$ wird $\mathfrak{A}[\ ]$ an Stelle von $\mathfrak{A}[\ ]_1$ geschrieben. In § 2 wird gezeigt, daß $\mathfrak{A}[\ ]_i$ eine Nennform ist. $\mathfrak{A}[\ ]_i$ entsteht aus $\mathfrak{A}$, indem das Nennzeichen X_i gestrichen wird. Für eine einstellige Positivform $\mathfrak{P}$ ist also $\mathfrak{P}[\ ]$ eine Formel.

1.8. Definition eines Axiomensystems $\mathbb{A}$

Ein Axiomensystem ist eine nichtleere Menge $\mathbb{A}$ von nichtleeren endlichen Formelmengen mit folgenden Eigenschaften:

1.8.1. *Primformel-Eigenschaft.* Die Elemente von $\mathbb{A}$ enthalten keine anderen Formeln als Primformeln und einfach negierte Primformeln.

1.8.2. *Schnitt-Eigenschaft.* Ist $\Gamma \cup \{P\} \in \mathbb{A}$ und $\Delta \cup \{\neg P\} \in \mathbb{A}$, so ist auch $\Gamma \cup \Delta \in \mathbb{A}$.

1.8.3. *Substitutions-Eigenschaft.* Ist $\Gamma \in \mathbb{A}$, so ist für alle a^σ und t^σ auch $\Gamma\binom{a^\sigma}{t^\sigma} \in \mathbb{A}$.

Bezeichnungen

Mit $\mathfrak{F}(x^\sigma)$ bezeichnen wir eine Quasiformel U, für die $VU \cap \mathbb{W}(\Sigma) \subseteq \{x^\sigma\}$ gilt. $\mathfrak{F}(t^\sigma)$ soll dann die Formel $U\binom{x^\sigma}{t^\sigma}$ bezeichnen.

Eine *Schlußregel* mit der *Prämissenmenge* $\mathfrak{M}$ und der *Konklusion* C bezeichnen wir mit $\mathfrak{M} \Rightarrow C$ oder $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow C$, wenn $\mathfrak{M} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ ist. Ist $\mathfrak{M}$ leer, so ist C eine Ausgangsformel für Herleitungen. Wir sagen, daß a^σ nicht in C auftritt, wenn $a^\sigma \notin VC$ ist. Es sei $\mathfrak{P}_0[\ ] \vee \mathfrak{P}_1[\ ] \equiv (((\mathfrak{P}_0 \vee \mathfrak{P}_1[X_2])\ [\ ]_1)\ [\ ]_2)$. $\mathfrak{P}^2[A,\ ]$ bzeichnet $(\mathfrak{P}^2[\ ]_2)\ [A]$.

1.9. *Grundschlußregeln des Systems L1 (bez. eines Axiomensystems $\mathbb{A}$)*

(S0) $\Rightarrow \mathfrak{P}^n[A_1, \ldots, A_n]$, wenn $\{A_1, \ldots, A_n\} \in \mathbb{A}$ gilt.

(S1) $\mathfrak{P}[\neg A], \mathfrak{P}[\neg B] \Rightarrow \mathfrak{P}[\neg (A \vee B)]$.

(S2) $\mathfrak{P}[\neg \mathfrak{F}(a^\sigma)] \Rightarrow \mathfrak{P}[\neg \bigvee x^\sigma \mathfrak{F}(x^\sigma)]$, wenn a^σ nicht in der Konklusion auftritt.

(S3) $\mathfrak{P}[\bigvee x^\sigma \mathfrak{F}(x^\sigma)] \vee \mathfrak{F}(t^\sigma) \Rightarrow \mathfrak{P}[\bigvee x^\sigma \mathfrak{F}(x^\sigma)]$.

(S4) $\{\mathfrak{P}[\neg A_n] : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \mathfrak{P}\left[\neg \overset{n}{\vee} A_n\right]$.

1.10. *Weitere Schlußregeln*

(S5) $\mathfrak{P}_0[A], \mathfrak{P}_1[\neg A] \Rightarrow \mathfrak{P}_0[\ ] \vee \mathfrak{P}_1[\ ]$.

(S6) $\mathfrak{P}^2[A, B] \Rightarrow \mathfrak{P}^2[B, A]$.

(S7) $\mathfrak{P}[A] \Rightarrow \mathfrak{P}[\mathfrak{P}_0[A]]$.

(S8) $\mathfrak{P}^2[A, A] \Rightarrow \mathfrak{P}^2[A,\ ]$.

Die in der Konklusion einer Grundschlußregel bezeichneten minimalen Positivteile werden *Hauptteile* der jeweiligen Schlußregel genannt. Die Variable a^σ in (*S2*) wird *Eigenvariable* von (*S2*) und die Formel A in (*S5*) *Schnittformel* von (*S5*) genannt. Die Regeln (*S0*)–(*S5*) nennen wir *starke Schlüsse* und (*S6*)–(*S8*) *schwache Schlüsse.*

1.11. *Induktive Definition der Normalherleitung in L1*

1.11.1. Ist $\Rightarrow \mathfrak{P}^n[A_1, \ldots, A_n]$ ein Grundschluß (*S0*) mit $\{A_1, \ldots, A_n\} \in \mathbb{A}$, $N(\mathfrak{P}^n, l)$ und $N(A_i, m_i)$ für $i = 1, \ldots, n$, so gelte: $\vdash \mathfrak{P}^n[A_1, \ldots, A_n]$, $NH(\mathfrak{P}^n[A_1, \ldots, A_n], [0, l, m_1, \ldots, m_n])$ und $[0, l, m_1, \ldots, m_n] \leqq: \alpha$ für alle Ordinalzahlen α.

1.11.2. Ist $C_0, C_1 \Rightarrow \mathfrak{P}[\neg (A \vee B)]$ ein Grundschluß (*S1*) mit dem bezeichneten Teil $\neg (A \vee B)$ als Hauptteil, $\vdash C_0$, $\vdash C_1$, $N(\mathfrak{P}, l_0)$, $N(\neg (A \vee B), l_1)$ und $NH(C_i, m_i)$ für $i = 0, 1$, so gelte: $\vdash \mathfrak{P}[\neg (A \vee B)]$ und $NH(\mathfrak{P}[\neg (A \vee B)],$

$[1, l_0, l_1, m_0, m_1]$). Gilt $m_i \leqq: \alpha_i$ und $\alpha_i <. \alpha$ für $i = 0, 1$, so gelte $[1, l_0, l_1, m_0, m_1] \leqq: \alpha$.

1.11.3. Ist $A \Rightarrow \mathfrak{P}[B]$ ein Grundschluß (*Si*) mit $i = 2, 3$, der bezeichnete Teil B der Hauptteil von (*Si*), $\vdash A$, $N(\mathfrak{P}, l_0)$, $N(B, l_1)$ und $NH(A, m)$, so gelte: $\vdash \mathfrak{P}[B]$ und $NH(\mathfrak{P}[B], [i, l_0, l_1, m])$. Ist $m \leqq: \beta$ und $\beta <. \alpha$, so gelte $[i, l_0, l_1, m] \leqq: \alpha$.

1.11.4. Ist $\{B_n : n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \mathfrak{P}\left[\neg \overset{n}{\vee} A_n\right]$ ein Grundschluß (*S4*) mit dem bezeichneten Teil $\neg \overset{n}{\vee} A_n$ als Hauptteil, $N(\mathfrak{P}, l_0)$, $N\left(\neg \overset{n}{\vee} A_n, l_1\right)$, $\varphi \in R_1$ und $\vdash B_n$ mit $NH(B_n, \varphi(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gelte: $\vdash \mathfrak{P}\left[\neg \overset{n}{\vee} A_n\right]$ und $NH\left(\mathfrak{P}\left[\neg \overset{n}{\vee} A_n\right], [4, l_0, l_1, \bar{\varphi}]\right)$. Ist $\varphi(n) \leqq: \alpha_n$ und $\alpha_n <. \alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gelte $[4, l_0, l_1, \bar{\varphi}] \leqq: \alpha$.

1.11.5. Ist $\mathfrak{P}_0[A], \mathfrak{P}_1[\neg A] \Rightarrow \mathfrak{P}_0[\ ] \vee \mathfrak{P}_1[\ ]$ ein Schluß (*S5*) mit der bezeichneten Formel A als Schnittformel, $\vdash \mathfrak{P}_0[A]$, $\vdash \mathfrak{P}_1[\neg A]$, $N(\mathfrak{P}_i, l_i)$ und $NH(\mathfrak{P}_i[(\neg) A], m_i)$ für $i = 0, 1$, so gelte: $\vdash \mathfrak{P}_0[\ ] \vee \mathfrak{P}_1[\ ]$ und $NH(\mathfrak{P}_0[\ ] \vee \mathfrak{P}_1[\ ], [5, l_0, l_1, m_0, m_1])$. Ist $m_i \leqq: \alpha_i$ und $\alpha_i <. \alpha$ für $i = 0, 1$, so gelte $[5, l_0, l_1, m_0, m_1] \leqq: \alpha$.

1.11.6. Ist $\mathfrak{P}^2[A, B] \Rightarrow \mathfrak{P}^2[B, A]$ ein Schluß (*S6*), $\vdash \mathfrak{P}^2[A, B]$, $N(\mathfrak{P}^2, l_0)$, $N(B, l_1)$, $N(A, l_2)$ und $NH(\mathfrak{P}^2[A, B], m)$, so gelte: $\vdash \mathfrak{P}^2[B, A]$ und $NH\left(\mathfrak{P}^2[B, A], \left[6, l_0, [l_1, l_2], m\right]\right)$. Ist $m \leqq: \alpha$, so gelte $\left[6, l_0, [l_1, l_2], m\right] \leqq: \alpha$.

1.11.7. Ist $\mathfrak{P}[A] \Rightarrow \mathfrak{P}\left[\mathfrak{P}_0[A]\right]$ ein Schluß (*S7*), $\vdash \mathfrak{P}[A]$, $N(\mathfrak{P}, l_0)$, $N(\mathfrak{P}_0, l_1)$, $N(A, l_2)$ und $NH(\mathfrak{P}[A], m)$, so gelte: $\vdash \mathfrak{P}\left[\mathfrak{P}_0[A]\right]$ und $NH\left(\mathfrak{P}[\mathfrak{P}_0[A]], \left[7, [l_0, l_1], l_2, m\right]\right)$. Ist $m \leqq: \alpha$, so gelte $\left[7, [l_0, l_1], l_2, m\right] \leqq: \alpha$.

1.11.8. Ist $\mathfrak{P}^2[A, A] \Rightarrow \mathfrak{P}^2[A,\ ]$ ein Schluß (*S8*), $\vdash \mathfrak{P}^2[A, A]$, $N(\mathfrak{P}^2, l_0)$, $N(A, l_1)$ und $NH(\mathfrak{P}^2[A, A], m)$, so gelte: $\vdash \mathfrak{P}^2[A,\ ]$ und $NH(\mathfrak{P}^2[A,\ ], [8, l_0, l_1, m])$. Ist $m \leqq: \alpha$, so gelte $[8, l_0, l_1, m] \leqq: \alpha$.

$\vdash C$ bedeutet, daß C *herleitbar* ist und daß eine *Normalherleitung* der *Endformel* C existiert. Gilt $NH(C, n)$, so ist n eine *Herleitungsnummer* einer Normalherleitung von C. Treten in einer Normalherleitung nur Grundschlüsse (*S0*)–(*S4*) auf, so nennen wir sie eine *Grundherleitung*. Wenn von dem System *L1* gesprochen wird, so sei der Begriff der Grundherleitung als Herleitbarkeitsbegriff zugrunde gelegt. Herleitungen werden mit $H, H_0, H_1, \ldots$ bezeichnet und wir schreiben auch $H \vdash C$ für $\vdash C$. Dementsprechend wird auch $H \leqq: \alpha$ für $NH(C, m)$ und $m \leqq: \alpha$ geschrieben, wenn mit H eine Herleitung mit einer Herleitungsnummer m bezeichnet ist. Man sagt dann, daß H eine *Ordnung* kleiner oder gleich $\alpha (\leqq: \alpha)$ hat. $A <: \alpha$ und $H <: \alpha$ bedeutet, daß ein β mit $\beta <. \alpha$ und $A \leqq: \beta$ bzw. $H \leqq: \beta$ existiert. Hat in einer Normalherleitung H jede Schnittformel einen Rang kleiner als $\beta (<: \beta)$, so sagt man, daß H einen *Schnittgrad* kleiner oder gleich $\beta (\leqq: \beta)$ hat. Hat H mit $H \vdash C$ eine Ordnung $\leqq: \alpha$ und einen Schnittgrad $\leqq: \beta$, so schreibt man auch $H \vdash C(\alpha, \beta)$. Gilt $H \vdash C(\alpha, 0)$, wobei 0 die Anfangszahl des Ordinalzahlensystems bezeichnet, so ist in H keine Regel (*S5*) angewendet worden und H

ist *schnittfrei*. Der Teil einer Normalherleitung H, der sich an die Konklusion des letzten starken Schlusses anschließt, wird die *Endkette* von H genannt.

1.12. Definition der Prämissenteile

1.12.1. Sei $\mathfrak{P}_2[C]$ die Konklusion eines Grundschlusses $(S1)-(S4)$. Es werden C folgendermaßen Prämissenteile zugeordnet.

1.12.1.1. Sei $\mathfrak{P}[A] \equiv \mathfrak{P}_2[C]$ und der bezeichnete Teil A der Hauptteil eines Schlusses (Si) mit $i = 1, \ldots, 4$ und seien die beiden bezeichneten Teile fremd zueinander. (A ist Minimalteil und somit entweder Positivteil von C oder fremd zu C.)
Es existiert dann genau eine Positivform $\mathfrak{P}^2$ mit $\mathfrak{P}^2[X_1, C] \equiv \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^2[A, X_1] \equiv \mathfrak{P}_2$, so daß die Prämissen die Form $\mathfrak{P}^2[A_i, C]$ bzw. $\mathfrak{P}^2[A, C] \vee A_1$ haben. Die bezeichneten Teile C sind dann die C entsprechenden Prämissenteile.

1.12.1.2. Sei $\mathfrak{P}[A]$ wie unter 1.12.1.1. definiert. Existiert eine Positivform $\mathfrak{P}_3$ mit $\mathfrak{P}_2[\mathfrak{P}_3] \equiv \mathfrak{P}$, so sind die Prämissen $\mathfrak{P}_2[\mathfrak{P}_3[A_i]]$ bzw. $\mathfrak{P}_2[\mathfrak{P}_3[A]] \vee A_1$ und es existiert genau ein solches $\mathfrak{P}_3$. Die bezeichneten Teile $\mathfrak{P}_3[A_i]$ bzw. $\mathfrak{P}_3[A]$ seien die dem Konklusionsteil C entsprechenden Prämissenteile.

1.12.2. Sei $\mathfrak{P}_2[C]$ Konklusion eines Schlusses $(S5)$ mit den Prämissen $\mathfrak{P}_0[A]$, $\mathfrak{P}_1[\neg A]$ und der bezeichneten Formel A als Schnittformel. Sei C Minimalteil der Konklusion oder eine Formel der Gestalt $\overset{n}{\vee} C_n$. Dann gibt es zwei Fälle.

1.12.2.1. Es existiert genau eine Positivform $\mathfrak{P}^2$ mit $\mathfrak{P}^2[X_1, C] \equiv \mathfrak{P}_0$ oder $\mathfrak{P}^2[X_1, C] \equiv \mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}^2[\ , X_1] \vee \mathfrak{P}_1[\ ] \equiv \mathfrak{P}_2$ bzw. $\mathfrak{P}_0[\ ] \vee \mathfrak{P}^2[\ , X_1] \equiv \mathfrak{P}_2$, so daß die Prämissen $\mathfrak{P}^2[A, C]$, $\mathfrak{P}_1[\neg A]$ bzw. $\mathfrak{P}_0[A]$, $\mathfrak{P}^2[\neg A, C]$ sind. Dabei ist $\mathfrak{P}^2[\ , X_1] \equiv (\mathfrak{P}^2[X_2, X_1])[\ ]_2$. Der bezeichnete Teil C sei der dem Konklusionsteil C entsprechende Prämissenteil.

1.12.2.2. (Höchstens für $C \equiv \overset{n}{\vee} C_n$.) Es existiert genau ein Paar $(\mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4)$ mit $\mathfrak{P}_3[\mathfrak{P}_4] \equiv \mathfrak{P}_0$ oder $\mathfrak{P}_3[\mathfrak{P}_4] \equiv \mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3 \vee \mathfrak{P}_1[\ ] \equiv \mathfrak{P}_2$ bzw. $\mathfrak{P}_0[\ ] \vee \mathfrak{P}_3 \equiv \mathfrak{P}_2$, so daß die Prämissen $\mathfrak{P}_3[\mathfrak{P}_4[A]]$, $\mathfrak{P}_1[\neg A]$ bzw. $\mathfrak{P}_0[A]$, $\mathfrak{P}_3[\mathfrak{P}_4[A]]$ sind. Der bezeichnete Teil $\mathfrak{P}_4[A]$ bzw. $\mathfrak{P}_4[\neg A]$ sei der dem Konklusionsteil C entsprechende Prämissenteil.

1.12.3. Ist $\mathfrak{P}_2[C]$ Konklusion eines Schlusses $(S6)$ $\mathfrak{P}^2[A, B] \Rightarrow \mathfrak{P}^2[B, A]$ und C Minimalteil von $\mathfrak{P}_2[C]$ oder eine Formel der Gestalt $\overset{n}{\vee} C_n$, so sei der C entsprechende Prämissenteil der Teil der Prämisse, der in C bei Vertauschung der bezeichneten Teile A und B übergeht.

1.12.4. Sei $\mathfrak{P}_2[C]$ Konklusion eines Schlusses $(S7)$ $\mathfrak{P}[A] \Rightarrow \mathfrak{P}[\mathfrak{P}_0[A]]$ und C Minimalteil von $\mathfrak{P}_2[C]$ oder von der Gestalt $\overset{n}{\vee} C_n$. Dann gibt es fünf verschiedene Fälle, die nach dem Auftreten von C in einem der bezeichneten Teile unterschieden sind.

1.12.4.1. Es existiert genau eine Positivform $\mathfrak{P}^2$ mit $\mathfrak{P}^2[C, X_1] \equiv \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}^2\big[X_1, \mathfrak{P}_0[A]\big] \equiv \mathfrak{P}_2$, so daß die Prämisse $\mathfrak{P}^2[C, A]$ ist. Dieser bezeichnete Teil C sei der C entsprechende Prämissenteil.

1.12.4.2. Existiert eine Positivform $\mathfrak{P}^2$ mit $\mathfrak{P}\big[\mathfrak{P}^2[C, X_1]\big] \equiv \mathfrak{P}[\mathfrak{P}_0]$ und $\mathfrak{P}\big[\mathfrak{P}^2[X_1, A]\big] \equiv \mathfrak{P}_2$, so gibt es keinen C entsprechenden Prämissenteil.

1.12.4.3. Existiert genau eine Positivform $\mathfrak{P}_3$ mit $\mathfrak{P}\big[\mathfrak{P}_0[\mathfrak{P}_3]\big] \equiv \mathfrak{P}_2$, so ist die Prämisse $\mathfrak{P}\big[\mathfrak{P}_3[C]\big]$. Dieser bezeichnete Teil C ist der C entsprechende Prämissenteil.

1.12.4.4. Existiert genau eine Positivform $\mathfrak{P}_3$ mit $\mathfrak{P}_2[\mathfrak{P}_3] \equiv \mathfrak{P}$, so ist die Prämisse $\mathfrak{P}_2\big[\mathfrak{P}_3[A]\big]$. $\mathfrak{P}_3[A]$ ist der C entsprechende Prämissenteil.

1.12.4.5. Sei $\mathfrak{P}_2 \not\equiv \mathfrak{P}$ und existiere genau ein Paar $(\mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4)$ mit $\mathfrak{P}_2[\mathfrak{P}_3] \equiv \mathfrak{P}[\mathfrak{P}_0]$ und $\mathfrak{P}_4[\mathfrak{P}_3] \equiv \mathfrak{P}_0$. Dann ist die Prämisse $\mathfrak{P}[A]$ und es gibt keinen C entsprechenden Prämissenteil.

1.12.5. Sei $\mathfrak{P}_2[C]$ Konklusion eines Schlusses $(S8)$ $\mathfrak{P}^2[A, A] \Rightarrow \mathfrak{P}^2[A, \ ]$ und C Minimalteil von $\mathfrak{P}_2[C]$ oder von der Gestalt $\overset{n}{\vee}\, C_n$. Es werden vier Fälle unterschieden.

1.12.5.1. Existiert genau eine Positivform $\mathfrak{P}^3$ mit $\mathfrak{P}^3[C, X_1, X_2] \equiv \mathfrak{P}^2$ und $\mathfrak{P}^3[X_1, A, \ ] \equiv \mathfrak{P}_2$, so ist die Prämisse $\mathfrak{P}^3[C, A, A]$. Dieser bezeichnete Teil C sei der C entsprechende Prämissenteil.

1.12.5.2. Existiert genau eine Positivform $\mathfrak{P}_3$ mit $\mathfrak{P}^2[\mathfrak{P}_3, \ ] \equiv \mathfrak{P}_2$, so ist die Prämisse $\mathfrak{P}^2\big[\mathfrak{P}_3[C], \mathfrak{P}_3[C]\big]$ und die beiden bezeichneten Teile C sind die C entsprechenden Prämissenteile.

1.12.5.3. Ist $\mathfrak{P}^2[\ ]_2 \not\equiv \mathfrak{P}_2$ und existiert genau eine Positivform $\mathfrak{P}_1^2$ mit $\mathfrak{P}_2[\mathfrak{P}_1^2] \equiv \mathfrak{P}^2$, so ist die Prämisse $\mathfrak{P}_2\big[\mathfrak{P}_1^2[A, A]\big]$. Der bezeichnete Teil $\mathfrak{P}_1^2[A, A]$ ist der C entsprechende Prämissenteil.

1.12.5.4. Existiert genau ein Paar $(\mathfrak{P}_0^2, \mathfrak{P}_3)$ mit $\mathfrak{P}_3 \not\equiv X_1$, $\mathfrak{P}^2 \equiv \mathfrak{P}_0^2[\mathfrak{P}_3, X_2]$ oder $\mathfrak{P}^2 \equiv \mathfrak{P}_0^2\big[X_1, \mathfrak{P}_3[X_2]\big]$ und $\mathfrak{P}_0^2[\ ]_2 \equiv \mathfrak{P}_2$ bzw. $\mathfrak{P}_0^2[A, X_1] \equiv \mathfrak{P}_2$, so ist die Prämisse $\mathfrak{P}_0^2\big[\mathfrak{P}_3[A], A\big]$ bzw. $\mathfrak{P}_0^2\big[A, \mathfrak{P}_3[A]\big]$. Der bezeichnete Teil $\mathfrak{P}_3[A]$ ist der C entsprechende Prämissenteil.

Die Positivformen, deren Existenz in 1.12. behauptet wird, sind durch Vergleich der gegebenen Positivformen effektiv zu ermitteln. Es ist leicht zu sehen, daß zu jedem Positivteil der Konklusion einer Grundschlußregel mindestens ein entsprechender Prämissenteil existiert. Ist C Positivteil der Konklusion eines Schlusses $(S5)$–$(S8)$ und C Minimalteil oder von der Gestalt $\overset{n}{\vee}\, C_n$, so trifft genau einer der Fälle 1.12.2.1. bis 1.12.5.4. zu, und nur in den Fällen 1.12.4.2. und 1.12.4.5. existiert kein entsprechender Prämissenteil.
Es werden nun wie in Schütte [7] große und kleine Formelbünde definiert.

1.13. Induktive Definition eines großen Formelbundes

1.13.1. Ist $\mathfrak{P}[A]$ Endformel einer Grundherleitung H, so gehöre A zum großen Formelbund von A bez. H.

1.13.2. Ist $\mathfrak{P}[B]$ Konklusion eines Grundschlusses der Grundherleitung H und gehört der bezeichnete Teil B zum großen Formelbund von A bez. H, so sollen auch die B entsprechenden Prämissenteile zum großen Formelbund von A bez. H gehören.

1.14. Induktive Definition eines kleinen Formelbundes

1.14.1. Ist $\mathfrak{P}[A]$ Endformel einer Normalherleitung H und A Minimalteil der Endformel, so gehöre A zum kleinen Formelbund von A bez. H.

1.14.2. Sei $\mathfrak{P}[B]$ Konklusion eines Schlusses (*S1*)–(*S8*) in H und der bezeichnete Teil B fremd zum Hauptteil dieses Schlusses, falls es ein Schluß (*S1*), (*S2*), (*S4*) ist. Gehört dieser Teil B zum kleinen Formelbund von A bez. H, dann sollen auch die B entsprechenden Prämissenteile, falls sie existieren, zum kleinen Formelbund von A bez. H gehören.

Diese Formelbünde haben die gleichen Eigenschaften wie die entsprechenden in Schütte [7]. Die kleinen Formelbünde bestehen aus gleichlautenden Formeln. Bei der Schnitt-Elimination in § 3 wird noch ein Formelbund einer unendlichen Disjunktion $\overset{n}{\vee} A_n$ benötigt.

1.15. Induktive Definition eines Formelbundes von $\overset{n}{\vee} A_n$

1.15.1. Ist $\mathfrak{P}\left[\overset{n}{\vee} A_n\right]$ Endformel einer Normalherleitung H, so gehöre der bezeichnete Teil $\overset{n}{\vee} A_n$ zum Formelbund von $\overset{n}{\vee} A_n$ bez. H.

1.15.2. Ist $\mathfrak{P}[B]$ Konklusion eines Schlusses (*S1*)–(*S8*) in H und gehört B zum Formelbund von $\overset{n}{\vee} A_n$ bez. H, so gehören auch die B entsprechenden Prämissenteile zum Formelbund von $\overset{n}{\vee} A_n$ bez. H, falls sie existieren.

Die Formelbünde von unendlichen Disjunktionen bestehen aus lauter unendlichen Disjunktionen. Diese Formelbünde enden nur in Konklusionen von Schlußregeln (*S0*) oder (*S7*). Betrachtet man eine Herleitung als Baum, so gehen diese Formelbünde bei Schlußregeln (*S5*) nur in einem Teil des Baumes weiter.

§ 2. Ergebnisse aus der Theorie der rekursiven Funktionen und deren Anwendung auf *L1*

In den Beweisen, die auf Induktion nach der Definition der Formel bzw. Herleitung beruhen, tritt bei den Induktionsschritten, die auf 1.4.5. bzw. 1.11.4. Bezug nehmen, folgende Schwierigkeit auf. Man will auf die Formeln bzw. Herleitungen mit den Nummern $\varphi(n)$ mit $\varphi \in R_1$ und $n \in \mathbb{N}$ die Induktionsvoraussetzung und möglicherweise wieder 1.4.5. bzw. 1.11.4. anwenden, wobei aber φ zu φ' verändert worden ist. Um nachzuweisen, daß $\varphi' \in R_1$ gilt, muß man das Beweisverfahren so arithmetisieren können, daß man eine Funktion $f \in PR_1$ angeben kann mit $\varphi(n) \in Df$ (Definitionsbereich von f) und $f(\varphi(n)) = \varphi'(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Sätze lauten dann etwa folgendermaßen: „Es gibt eine Funktion $f \in PR_1$, die jeder Nummer einer Herleitung (Formel) mit der Eigenschaft A die

Nummer einer Herleitung (Formel) mit der Eigenschaft B zuordnet". Dies wird dann nur noch so ausgedrückt: „Jede Herleitung (Formel) mit der Eigenschaft A kann rekursiv zu einer Herleitung (Formel) mit der Eigenschaft B umgeformt werden".

Die Funktion f wird entweder schon vorher definiert, oder sie ergibt sich, indem man das Beweisverfahren arithmetisiert. Ist die Funktion nicht angegeben, was in den meisten Fällen auftritt, so ist der Beweis des entsprechenden Satzes jedenfalls hinreichend konstruktiv, um ihn mit genügend großem Aufwand durch ein $f \in PR$ ausdrücken zu können. Es werden in diesem Paragraphen jedoch zunächst die Funktionen aufgestellt, die dabei immer wieder benötigt werden. Diese Funktionen werden durch Fallunterscheidung definiert, wobei aber die zu definierende Funktion in der Definition so auftritt, daß nicht unbedingt eine Rekursion benutzt werden kann und daß auch die Nummer der zu definierenden Funktion benötigt wird. Diese Definitionen werden zu Anfang dieses Paragraphen durch ein Verfahren von Kleene gerechtfertigt, das wesentlich auf dem Rekursionssatz beruht.

Mitteilungszeichen

f, g, h für partiell rekursive Funktionen,

x, y, z für Zahlenvariablen.

Die Mitteilungszeichen werden auch mit Indizes benutzt. Außerdem wird der μ-Operator wie üblich angewendet.

Bezeichnungen

Im folgenden werden Bezeichnungen aus Kleene [3, 4] übernommen. $\Phi_n(z, x_1, \ldots, x_n)$ sei eine Abkürzung für $U(\mu y\, T_n(z, x_1, \ldots, x_n, y))$ [4, pp. 278, 281, 340]. Ist $f \in PR_n$ und $(x_1, \ldots, x_n) \in Df$, so gilt $\Phi_n(\bar{f}, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leqq n$ sei Θ_n^m folgendermaßen definiert: $\Theta_n^m(z, x_1, \ldots, x_n, y)$ sei eine Abkürzung für $\Phi_n(z, x_1, \ldots, x_{n-m}, \Phi_1(x_{n-m+1}, y), \ldots, \Phi_1(x_n, y))$. Es sei $\overline{\Theta_n^m} = d_{n,m}$. Die $(m+1)$-stellige primitiv rekursive Funktion S_n^m mit $m, n \geqq 0$ sei wie in [4, p. 342] definiert, sie hat folgende Eigenschaft. Ist $f \in PR_{n+m}$, so ist für $(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n) \in Df$ $S_n^m(\bar{f}, y_1, \ldots, y_m) = \bar{g}$ mit $g(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$. Damit ist also $S_1^{n+1}(d_{n,m}, z, x_1, \ldots, x_n)$ die Nummer von $\Theta_n^m(z, x_1, \ldots, x_n, y)$ als Funktion von y aufgefaßt.

Der Rekursionssatz von Kleene wird hier in folgender Form benutzt.

2.1. Rekursionssatz. Zu jedem $f \in PR_{n+1}$ existiert ein $e \in \mathbb{N}$, so daß e eine Nummer von $f(e, x_1, \ldots, x_n)$ ist.

Beweis. $f(S_n^1(y, y), x_1, \ldots, x_n)$ ist eine partiell rekursive Funktion von $(y, x_1, \ldots, x_n)$, sie habe die Nummer k. Dann ist $S_n^1(k, k)$ eine Nummer von $f(S_n^1(k, k), x_1, \ldots, x_n)$ und somit die gesuchte Zahl e.

2.2. Definitionsschema für gewisse Funktionen aus PR

Die zu definierenden Funktionen fallen unter folgendes Definitionsschema durch Fallunterscheidung.

2.2.1. $f(x_1, \ldots, x_n) = z$ mit (1) $z = 1$, wenn $g_0(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ist; (2) $z = h_0(x_1, \ldots, x_n, f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n)))$, wenn $g_0(x_1, \ldots, x_n) = 1$ ist; (3) $z = h_1(x_1, \ldots, x_n, k)$, wenn $g_0(x_1, \ldots, x_n) = 2$ ist. Hierbei sei k eine Nummer von $f(g_{n+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_{2n-m}(x_1, \ldots, x_n), h_2(x_1, \ldots, x_n, y), \ldots, h_{m+1}(x_1, \ldots, x_n, y))$ als Funktion von y mit $n \geqq m \geqq 0$. Außerdem seien $g_0, \ldots, g_{2n-m} \in PR_n$ und $h_0, \ldots, h_{m+1} \in PR_{n+1}$.

Der Fall (1) erfaßt die expliziten Definitionen, wenn hier auch nur der spezielle Wert 1 angegeben wurde. Daß es ein $f \in PR$ und ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so daß das Definitionsschema erfüllt wird, sieht man folgendermaßen. Sei d eine Nummer der partiell rekursiven Funktion $\Phi_n(z, g_{n+1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_{2n-m}(x_1, \ldots, x_n), h_2(x_1, \ldots, x_n, y), \ldots, h_{m+1}(x_1, \ldots, x_n, y))$ als Funktion von $(z, x_1, \ldots, x_n, y)$. Es wird $f' \in PR_{n+1}$ wie folgt definiert.

2.2.2. $f'(z, x_1, \ldots, x_n) = y$ mit (1) $y = 1$, wenn $g_0(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ist; (2) $y = h_0(x_1, \ldots, x_n, \Phi_n(z, g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n)))$, wenn $g_0(x_1, \ldots, x_n) = 1$ ist; (3) $y = h_1(x_1, \ldots, x_n, S_1^{n+1}(d, z, x_1, \ldots, x_n))$, wenn $g_0(x_1, \ldots, x_n) = 2$ ist.

Nach dem Rekursionssatz existiert eine Zahl e, die Nummer von $f'(e, x_1, \ldots, x_n)$ ist. Wie man leicht sieht, erfüllt $f'(e, x_1, \ldots, x_n)$ das für f angegebene Schema 2.2.1., so daß man $f(x_1, \ldots, x_n)$ als $f'(e, x_1, \ldots, x_n)$ definieren kann und damit zeigt, daß $f \in PR_n$ ist. Bei den Fällen, die hier untersucht werden, ist fast immer $d = d_{n,m}$. Bei der Funktion, die den Substitutionsprozeß beschreibt, wird das obige Verfahren noch einmal explizit ausgeführt. Dann jedoch wird nur noch das Definitionsschema 2.2.1. angewendet.

2.3. Die Substitution

2.3.1. $sb'(z, x_1, x_2, x_3) = y$ mit (1) $y = x_2$, wenn $x_1 = x_3$, $x_3 \neq 0$ und $(x_3)_0 = 0, 1$ ist; (2) $y = x_3$, wenn $x_1 \neq x_3$, $x_3 \neq 0$, $(x_3)_0 = 0, 1$ oder $(x_3)_0 = 7$, $(x_3)_1 = x_1$ oder $(x_3)_0 = 8$ ist; (3) $y = [(x_3)_0, (x_3)_1, \Phi_3(z, x_1, x_2, (x_3)_2), \ldots, \Phi_3(z, x_1, x_2, (x_3)_{lg(x_3)})]$, wenn $(x_3)_0 = 2, 3$ ist; (4) $y = [4, \Phi_3(z, x_1, x_2, (x_3)_1)]$, wenn $(x_3)_0 = 4$ ist; (5) $y = [5, \Phi_3(z, x_1, x_2, (x_3)_1), \Phi_3(z, x_1, x_2, (x_3)_2)]$, wenn $(x_3)_0 = 5$; (6) $y = [6, S_1^4(d_{3,1}, z, x_1, x_2, (x_3)_1), (x_3)_2]$, wenn $(x_3)_0 = 6$ ist; (7) $y = [7, (x_3)_1, \Phi_3(z, x_1, x_2, (x_3)_2)]$, wenn $(x_3)_0 = 7$ und $(x_3)_1 \neq x_1$ ist; (8) $y = 0$ sonst.

Nach dem Rekursionssatz existiert eine Zahl e, die Nummer von $sb'(e, x_1, x_2, x_3)$ ist. Dann sei $sb(x_1, x_2, x_3) = sb'(e, x_1, x_2, x_3)$ und somit $\overline{sb} = e$. Man sieht dann, daß „sb" sogar primitiv rekursiv ist, denn S_1^4 ist primitiv rekursiv und die Definition von „sb" ist ein Fall der Definition durch Wertverlaufsrekursion.

2.3.2. Lemma. Ist $N(u, x_1)$, $N(t, x_2)$ und $N(s, x_3)$ bzw. $N(U, x_3)$, so gilt $N\left(s\binom{u}{t}, sb(x_1, x_2, x_3)\right)$ bzw. $N\left(U\binom{u}{t}, sb(x_1, x_2, x_3)\right)$, wobei $s\binom{u}{t}$ ein Quasiterm und $U\binom{u}{t}$ eine Quasiformel ist.

Beweis. Die Behauptung erhält man durch Induktion nach dem Aufbau eines Quasiterms und einer Quasiformel. Es genügt den Fall zu betrachten, daß

$N\left(\overset{n}{\vee} U_n, x_3\right)$ gilt, denn in allen anderen Fällen ergibt sich die Behauptung sofort mit der Induktionsvoraussetzung (I.V.). Ist $(x_3)_1 = \bar{\varphi}$, so ist $S_1^4(d_{3,1}, \overline{sb}, x_1, x_2, \bar{\varphi})$ Nummer von $sb(x_1, x_2, \varphi(y))$ als Funktion von y. Es ist $N(U_n, \varphi(n))$ und nach I.V. $N\left(U_n \binom{u}{t}, sb(x_1, x_2, \varphi(n))\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $U_n \binom{u}{t}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Quasiformeln sind. Außerdem ist $sb(x_1, x_2, \varphi(n))$ als Funktion von n eine einstellige rekursive Funktion, die die Voraussetzungen von 1.4.5. erfüllt. Damit ist das Lemma bewiesen.

2.4. Die Einsetzung

Es sei zunächst $x \dot{-} y$ wie folgt definiert.

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, \text{ wenn } x \geqq y \text{ ist,} \\ 0, \text{ wenn } x < y \text{ ist.} \end{cases}$$

2.4.1. $es(x, y) = z$ mit (1) $z = y$, wenn $(y)_0 = 3$ oder $(y)_0 = 4$, $((y)_1)_0 \neq 4$ oder $(y)_0 = 7$; (2) $z = [4, [4, es(x, ((y)_1)_1)]]$, wenn $(y)_0 = 4$ und $((y)_1)_0 = 4$ ist; (3) $z = [5, es(x, (y)_1), es(x, (y)_2)]$, wenn $(y)_0 = 5$ ist; (4) $z = [6, S_1^3(d_{2,1}, \overline{es}, x, (y)_1), (y)_2]$, wenn $(y)_0 = 6$ ist; (5) $z = (x)_{i \dot{-} 1}$, wenn $(y)_0 = 8$ und $(y)_1 = i$ ist; (6) $z = 0$ sonst.

2.4.2. Lemma. Sei $\mathfrak{A} \in \mathbb{P}_n(S)$, $N(\mathfrak{A}, y)$, $A_i \in F(S)$ und $N(A_i, k_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ und $x = [k_1, \ldots, k_n]$. Dann gilt $\mathfrak{A}[A_1, \ldots, A_n] \in F(S)$ und $N(\mathfrak{A}[A_1, \ldots, A_n], es(x, y))$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus 2.4.1. durch Induktion nach dem Aufbau der Quasiformeln und der Nennformen, wenn man bedenkt, daß $S_1^3(d_{2,1}, \overline{es}, x, \bar{\varphi})$ Nummer von $es(x, \varphi(n))$ als Funktion von n ist. Die Funktion „es" ist wie „sb" primitiv rekursiv.

2.5. Die Streichung

Zunächst werden die folgenden primitiv rekursiven Signum-Funktionen aufgestellt.

$$sg(x) = \begin{cases} 0, \text{ wenn } x = 0 \text{ ist,} \\ 1, \text{ wenn } x > 0 \text{ ist.} \end{cases} \qquad sgn(x) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } x = 0 \text{ ist,} \\ 0, \text{ wenn } x > 0 \text{ ist.} \end{cases}$$

2.5.1. $str'(z, x_1, x_2) = y$ mit (1) $y = x_2$, wenn $(x_2)_0 = 3$ oder $(x_2)_0 = 4$, $((x_2)_1)_0 \neq 4$ oder $(x_2)_0 = 7$ oder $(x_2)_0 = 8$, $(x_2)_1 \neq x_1$ ist; (2) $y = [4, [4, \Phi_2(z, x_1, ((x_2)_1)_1)]] \times sg(\Phi_2(z, x_1, ((x_2)_1)_1))$, wenn $(x_2)_0 = ((x_2)_1)_0 = 4$ ist; (3) $y = [5, \Phi_2(z, x_1, (x_2)_1), \Phi_2(z, x_1, (x_2)_2)] \cdot sg(\Phi_2(z, x_1, (x_2)_1) \cdot \Phi_2(z, x_1, (x_2)_2)) + \Phi_2(z, x_1, (x_2)_1) \cdot sgn(\Phi_2(z, x_1, (x_2)_2)) + \Phi_2(z, x_1, (x_2)_2) \cdot sgn(\Phi_2(z, x_1, (x_2)_1))$, wenn $(x_2)_0 = 5$ ist; (4) $y = [6, S_1^3(d, z, x_1, (x_2)_1), (x_2)_2]$, wenn $(x_2)_0 = 6$ ist; (5) $y = 0$ sonst.

Dabei sei d Nummer von $\Phi_2\left(z, x_1, \Phi_1(x_2, n+1) \cdot \sum_{i=1}^{n} sgn(\Phi_2(z, x_1, \Phi_1(x_2, i)))\right.$ $\left. + \Phi_1(x_2, n) \cdot \prod_{i=1}^{n} sg(\Phi_2(z, x_1, \Phi_1(x_2, i)))\right)$ als Funktion von (z, x_1, x_2, n). Dann sei

$str(x_1, x_2) = str'(e, x_1, x_2)$, wenn e eine Nummer von $str'(e, x_1, x_2)$ ist. „str" ist eine primitiv rekursive Funktion.

2.5.2. Lemma. Ist $\mathfrak{A}$ eine Nennform mit $N(\mathfrak{A}, x)$, so ist $\mathfrak{A}[\ ]_i$ ebenfalls eine Nennform und es gilt $N(\mathfrak{A}[\ ]_i, str(i, x))$.

Der Beweis ergibt sich wie bei den vorangehenden Lemmata, wobei zu beachten ist, daß bei einer Disjunktion $\mathfrak{A}_0 \vee \mathfrak{A}_1$ höchstens ein Disjunktionsglied durch Streichung verlorengehen kann.

2.6. Die Endformel einer Herleitung

2.6.1. $ef(x) = y$ mit (1) $y = es([(x)_2, \ldots, (x)_{lg(x)}], (x)_1)$, wenn $(x)_0 = 0$ und $x \neq 0$ ist; (2) $y = es([(x)_2], (x)_1)$, wenn $(x)_0 \neq 0$, $(x)_0 < 5$ oder $(x)_0 > 8$ ist; (3) $y = [5, \ str(1, (x)_1), \ str(1, (x)_2)] \cdot sg\big(str(1, (x)_1) \cdot str(1, (x)_2)\big) + str(1, (x)_1) \times sgn\big(str(1, (x)_2)\big) + str(1, (x)_2) \cdot sgn\big(str(1, (x)_1)\big)$, wenn $(x)_0 = 5$ ist; (4) $y = es\big([((x)_2)_0, ((x)_2)_1], (x)_1\big)$, wenn $(x)_0 = 6$ ist; (5) $y = es\big(\big[es\big([(x)_2], ((x)_1)_1\big)\big], ((x)_1)_0\big)$, wenn $(x)_0 = 7$ ist; (6) $y = es\big([(x)_2], str(2, (x)_1)\big)$, wenn $(x)_0 = 8$ ist.

2.6.2. Lemma. Gilt $NH(A, x)$, so auch $N(A, ef(x))$.

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der Definition von „ef" und aus 1.11. Die Funktion „ef" ist ebenfalls primitiv rekursiv.

2.7. Die Nennformkombination

Bei der Definition des Formelbundes muß manchmal zu Positivformen $\mathfrak{P}^n$, $\mathfrak{P}^m$ mit $\mathfrak{P}^n[A_1, \ldots, A_n] \equiv \mathfrak{P}^m[B_1, \ldots, B_m]$ eine Positivform $\mathfrak{P}^{n+m}$ mit $\mathfrak{P}^{n+m}[A_1, \ldots, A_n, X_1, \ldots, X_m] \equiv \mathfrak{P}^m$ und $\mathfrak{P}^{n+m}[X_1, \ldots, X_n, B_1, \ldots, B_m] \equiv \mathfrak{P}^n$ angegeben werden, wenn die bezeichneten Stellen von $\mathfrak{P}^n$ von den bezeichneten Stellen von $\mathfrak{P}^m$ verschieden sind und sich diese Stellen nicht überlagern. Dazu wird die Funktion „nk" definiert.

2.7.1. $nk(n, x, y) = z$ mit (1) $z = x$, wenn $x = y$ oder $(x)_0 = 8$, $(y)_0 \neq 8$ ist; (2) $z = \big[4, \big[4, nk\big(n, ((x)_1)_1, ((y)_1)_1\big)\big]\big]$, wenn $x \neq y$, $(x)_0 = (y)_0 = ((x)_1)_0 = ((y)_1)_0 = 4$ ist; (3) $z = [5, nk(n, (x)_1, (y)_1), \ nk(n, \ (x)_2, \ (y)_2)]$, wenn $x \neq y$, $(x)_0 = (y)_0 = 5$ ist; (4) $z = [6, S^4_1(d_{3,2}, \overline{nk}, n, (x)_1, (y)_1), max((x)_2, (y)_2)]$, wenn $x \neq y$, $(x)_0 = (y)_0 = 6$ ist; (5) $z = [8, (y)_1 + n]$, wenn $(x)_0 \neq 8$, $(y)_0 = 8$ ist; (6) $z = 0$ sonst.

2.7.2. Lemma. Sei $\mathfrak{A}_0 \in \mathbb{P}_n(S)$, $\mathfrak{A}_1 \in \mathbb{P}_m(S)$, $N(\mathfrak{A}_0, x)$, $N(\mathfrak{A}_1, y)$ und $\mathfrak{A}_0[A_1, \ldots, A_n] \equiv \mathfrak{A}_1[B_1, \ldots, B_m]$, wobei die bezeichneten Stellen von $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ voneinander verschieden sind und sich nicht überlagern. Dann gilt $N(\mathfrak{A}, nk(n, x, y))$ für ein $\mathfrak{A} \in \mathbb{P}_{n+m}(S)$ mit $\mathfrak{A}[X_1, \ldots, X_n, B_1, \ldots, B_m] \equiv \mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}[A_1, \ldots, A_n, X_1, \ldots, X_m] \equiv \mathfrak{A}_1$.

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach dem Aufbau von $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$. Dabei ist zu beachten, daß $S^4_1(d_{3,2}, \overline{nk}, x, \bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2)$ eine Nummer von $nk(x, \varphi_1(y), \varphi_2(y))$ als Funktion von y ist. Sind $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ Positivformen, so ist auch $\mathfrak{A}$ Positivform und $\mathfrak{A}$

erfüllt die zu Anfang von 2.7. gestellten Bedingungen. Die Funktion „nk" ist primitiv rekursiv.

2.8. Die Variablenmengen Vs, VU und V𝔄

Die Variablenmengen Vs, VU und $V\mathfrak{A}$ sind endliche Mengen. Es kann sogar eine primitiv rekursive Funktion „vb" angegeben werden mit $vb(x) = [k_0, \ldots, k_n]$ und $N(u_i, k_i)$ für $i = 0, \ldots, n$ und $N(s, x)$ oder $N(U, x)$ oder $N(\mathfrak{A}, x)$ und $Vs = \{u_0, \ldots, u_n\}$ bzw. $VU = \{u_0, \ldots, u_n\}$ bzw. $V\mathfrak{A} = \{u_0, \ldots, u_n\}$. Ist eine der Variablenmengen leer, so sei $[k_0, \ldots, k_n] = [\ ] = 1$. Die Funktion „$vb$" kann ähnlich wie Vs, VU und $V\mathfrak{A}$ definiert werden, wobei die Grenze k in 1.4.5. bzw. 1.6.5. diese Definition ermöglicht. Mit Hilfe der Funktion „vb" kann dann auch eine Variable angegeben werden, die in einer gegebenen Formel A nicht auftritt, was manchmal benötigt wird.

Betrachtet man eine Herleitung als Formelbaum, so wird im allgemeinen durch Änderung gewisser Formeln dieses Baumes die Herleitung zerstört. Aber man kann trotzdem noch dem Baum eine Nummer zuordnen, die in die Herleitungsnummer übergeht, wenn der Baum ein Herleitunsgbaum ist. Diese Nummer ist im folgenden gemeint, wenn von der Nummer eines Baumes gesprochen wird. Mit einigem Aufwand können Funktionen fbk, $fbu \in PR$ angegeben werden, die folgende Eigenschaften haben. Ist $\mathfrak{P}[A] \equiv B$, $N(A, x)$, $N(\mathfrak{P}, y)$, $NH(B, z)$ und A Minimalteil von B bzw. $A \equiv \overset{n}{\vee} A_n$, so ist $fbk(x, y, z)$ bzw. $fbu(x, y, z)$ eine Nummer eines Baumes, der aus dem Herleitungsbaum mit der Nummer z entsteht, wenn der Formelbund von A gestrichen wird.

Damit sind die grundsätzlichen Funktionen angegeben worden. Die zu den Sätzen der folgenden Paragraphen gehörenden Funktionen können ähnlich und mit Hilfe der schon definierten Funktionen aufgestellt werden.

LITERATUR

[1] Feferman, S.: Lectures on Proof Theory. Proceedings of the Summer School in Logic. Lecture Notes *70*, Springer, Berlin 1968, 1—108.

[2] Kino, A., and G. Takeuti: On predicates with infinitely long expressions. J. Math. Soc. Japan *15* (1963), 176—190.

[3] Kleene, S. C.: On the Forms of the Predicates in the Theory of Constructive Ordinals (Second Paper). Am. J. Math. *66*, 41—58.

[4] Kleene, S. C.: Introduction to Metamathematics. North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1964.

[5] Lopez-Escobar, E. G. K.: An interpolation theorem for denumerably long formulas. Fund. Math. *57* (1965), 253—272.

[6] Lopez-Escobar, E. G. K.: Remarks on an infinitary language with constructive formulas. J. Symb. Logic *32*, 305—318.

[7] Schütte, K.: Beweistheorie. Springer, Berlin 1960.

[8] Schütte, K.: Vorlesung über rekursive Funktionen. WS 1968/69 (unveröffentlicht).

[9] Tait, W. W.: Normal derivability in classical Logic. The Syntax and Semantics of Infinitary Languages. Lecture Notes *72*, Springer, Berlin 1968, 204—236.

(Teil II folgt in Band 14/3—4)