Aus dem Institut für Theoretische Physik und dem Mathematischen Institut der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

Zur Theorie der linearen dissipativen Systeme

Von J. Meixner und H. König

(Eingegangen am 9. April 1958)

1. Das Problem

Die Grundlagen der phänomenologischen Theorie des linearen rheologischen Verhaltens sind das Superpositionsprinzip, die Invarianz gegen Zeittranslation und das Kausalitätsprinzip. Aus diesen Postulaten läßt sich, wie in vielen Arbeiten gezeigt wurde, die allgemeine Natur des Zusammenhangs zwischen Spannungs- und Dehnungsverlauf herleiten. Er ist durch eine sogenannte Nachwirkungsfunktion charakterisiert.

Daran hat sich eine ausgedehnte mathematische Transformationstheorie angeschlossen, bei der *Fourier*-, *Laplace*-, *Mellin*-Transformationen eine wichtige Rolle spielen. Sie verknüpfen beispielsweise das Verhalten der linearen rheologischen Materie bei Einschaltvorgängen und bei periodischen Vorgängen oder geben Zusammenhänge zwischen Nachwirkungsfunktionen und Relaxationsspektren.

Bei aller Reichhaltigkeit dieser Untersuchungen bleiben aber immer noch Schwierigkeiten mathematischer Natur und Unvollständigkeiten im physikalischen Bild. Die genannten Postulate werden häufig durch die Forderung ergänzt, daß das Material nur reelle positive Relaxationszeiten und positive Relaxationsstärken besitzt. Da man jedoch auf Grund der bisherigen Experimente die Möglichkeit von Resonanzrelaxationen nicht ausschließen kann [siehe etwa die kürzlichen Beobachtungen von (1)], ist diese Forderung sicher zu eng.

Von der wesentlichen Eigenschaft der rheologischen Systeme, dissipativ zu sein, wird kaum Gebrauch gemacht. Sie hat jedoch entscheidende Einschränkungen für die zulässigen Nachwirkungsfunktionen zur Folge. Dies wurde allgemein von *Meixner* (2), an speziellen Beispielen von *Schrama* (3) gezeigt.

Das Verhalten der linearen rheologischen Materialien findet seinen mathematischen Ausdruck in linearen Funktionaltransformationen. Ihre Theorie läßt sich jedoch nur anwenden, wenn man die Klasse der zuzulassenden Spannungs- und Dehnungsfunktionen geeignet festlegt und den Transformationen selbst gewisse physikalisch annehmbare Stetigkeitseigenschaften auferlegt. Während bei den meisten physikalischen Problemen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften eine recht untergeordnete Rolle spielen – die physikalische Intuition läßt die mathematische Subtilität oft überflüssig erscheinen –, ist es hier sehr wichtig zu wissen, wie sich etwa Unstetigkeiten in der Spannungsfunktion auf die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften der Dehnungsfunktion und umgekehrt übertragen. Die Zulassung von δ-Funktionen mit ihren Ableitungen in der Nachwirkungsfunktion hilft darüber nicht hinweg, solange man nicht weiß, ob man mit solchen überhaupt auskommt, ob man Ableitungen beliebig-hoher Ordnung der δ-Funktionen oder nur solche bis zu einer bestimmten Ordnung zulassen darf.

Auf solche Gesichtspunkte hat kürzlich *Love* (4) hingewiesen. Doch ist seine Behandlung zu eng, indem etwa der Fall eines viskosen Materials mit *Newton*schem Reibungsgesetz ausgeschlossen bleibt, und wiederum zu weit, soweit an thermodynamische Systeme gedacht ist, da von der einschränkenden Dissipativitätseigenschaft kein Gebrauch gemacht ist. Wesentlich weiter führen Untersuchungen von *Youla*, *Castriota* und *Carlin* (5) zur Theorie der passiven linearen Netzwerke, die unmittelbar auf andere lineare dissipative Systeme übertragen werden können.

Die Verfasser haben einen anderen Zugang zur Behandlung der dissipativen linearen Systeme gewählt, der die Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften der Spannungs- und Dehnungsfunktionen, sowie die Stetigkeitseigenschaften der sie verbindenden linearen Transformation in den Vordergrund rückt. Über die Grundlagen und Ergebnisse dieser Untersuchung (6) soll im folgenden kurz berichtet werden.

2. Die Postulate

Wir lassen den allgemeinen tensoriellen Fall außer Acht – einige Bemerkungen hierzu finden sich im nächsten Abschnitt – und beschränken uns auf eine Dehnungsfunktion $\varepsilon(t)$ und die zugeordnete Spannungsfunktion $\sigma(t)$. Auch von thermischen Effekten sei abgesehen, indem alle Vorgänge entweder isotherm oder adiabatisch angenommen werden.

Die klassischen Postulate der linearen Rheologie lauten dann:

I. Das Superpositionsprinzip. Sind den Dehnungsfunktionen $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ die Spannungsfunktionen $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ zugeordnet, so gehört zur Dehnungsfunktion $a_1\,\varepsilon_1(t) + a_2\varepsilon_2(t)$ mit beliebigen reellen Konstanten a_1, a_2 die Spannungsfunktion $a_1\,\sigma_1(t) + a_2\,\sigma_2(t)$.

II. Die Translationsinvarianz. Sind $\varepsilon(t)$ und $\sigma(t)$ einander zugeordnet, so auch $\varepsilon(t - \tau)$ und $\sigma(t - \tau)$ mit beliebigem reellen τ.

III. Das Kausalitätsprinzip. Ist $\varepsilon(t) = 0$ für $t \leqq \alpha$ (α beliebig reell), so ist auch $\sigma(t) = 0$ für $t \leqq \alpha$. Man sagt, das System ist nicht rückwirkend oder nicht retroaktiv.

Die Umkehrung des letzten Postulats – ist $\sigma(t) = 0$ für $t \leqq 0$, so ist auch $\varepsilon(t) = 0$ für $t \leqq \alpha$ – ist zwar augenscheinlich auch ein vernünftiges Postulat für lineare rheologische Systeme und folgt nicht schon aus I, II, III, wie sich an elementaren Beispielen zeigen läßt [z. B. die Zuordnung $\sigma(t) = \varepsilon(t - t_0)$ mit beliebigem aber festem reellem t_0 erfüllt I, II, III, aber nicht die Umkehrung von III]. In der Tat ist jedoch nach *Youla, Castriota* und *Carlin* sowohl Postulat III als auch seine Umkehrung erfüllt, wenn man voraussetzt, daß σ und ε thermodynamisch konjugierte Variable sind und das System dissipativ ist. Diese Eigenschaften finden ihren Ausdruck im Postulat

IV. Die Dissipativität. Ist $\varepsilon(t) = 0$ für $t \leqq \alpha$ (α beliebig reell), so gilt

$$\int_{\alpha}^{\tau} \sigma(t)\,\frac{d\varepsilon(t)}{dt}\,dt \geqq 0$$

für alle $\tau > \alpha$.

Diese Beziehung wurde von *Meixner* (2) in etwas allgemeinerer Form für beliebige dissipative lineare Systeme aus dem zweiten Hauptsatz hergeleitet. Sie ist in der Theorie der passiven linearen Netzwerke wohlbekannt und besagt dort, daß die Energiezufuhr an ein Netzwerk im Intervall $\alpha \leqq t \leqq \tau$ nicht negativ sein kann, wenn es zur Zeit $t = \alpha$ keine Ströme und Ladungen enthielt.

Eine weitere physikalische Forderung ist, daß die Spannung auf Null relaxiert, wenn die Dehnung nach irgendeiner Vorgeschichte auf den Wert Null gebracht wird.

V. Existenz des thermodynamischen Gleichgewichts. Ist $\varepsilon(t) = 0$ für $t < \alpha$ und für $t > \beta$ ($\alpha < \beta$), so gilt $\sigma(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

Der Zusammenhang zwischen $\varepsilon(t)$ und $\sigma(t)$ wird, mathematisch gesprochen, durch eine lineare Transformation L vermittelt, $\sigma(t) = L\,\varepsilon(t)$. Zu einem mathematisch definierten Problem gelangt man, wie in Abschnitt I ausgeführt, wenn man die Klasse der zugelassenen Spannungs- und Dehnungsfunktionen geeignet festlegt und der Transformation L selbst gewisse Stetigkeitsforderungen auferlegt. Diese beiden Postulate sollen hier in einer so schwach wie möglich gehaltenen Form zugrunde gelegt werden.

VI. Die zugelassene Funktionenklasse. Für $\varepsilon(t)$ werden alle Funktionen zugelassen, welche unbeschränkt stetig differenzierbar sind und von einer endlichen Stelle α ab nach links verschwinden, $\varepsilon(t) = 0$ für $t < \alpha$. Die zugeordneten Funktionen $\sigma(t)$ sollen lediglich stetig sein.

VII. Die Stetigkeit der linearen Transformation. Die Transformation L soll stetig von der Ordnung ∞ sein. Das heißt: Wenn eine Folge von Dehnungsfunktionen $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, ..., die in einem gemeinsamen Intervall $-\infty < t < \alpha$ verschwinden, für jedes endliche τ im Intervall $\alpha < t < \tau$ gleichmäßig gegen Null konvergiert, und wenn dasselbe für jedes feste p ($p = 1, 2, \ldots$) für die Folge ihrer p-ten Ableitungen gilt, so konvergiert auch die Folge der zugehörigen Spannungsfunktionen $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, ... gegen Null.

Es wird also a priori zugelassen, daß bei der linearen Transformation von $\varepsilon(t)$ in $\sigma(t)$ eine beliebige Anzahl m von Ableitungen verlorengehen darf ($m = 0, 1, 2, \ldots, \infty$). Auf Grund unserer anderen Postulate werden wir schließen können, daß m stets endlich ist (sogar $m \leqq 3$). Das bedeutet mathematisch, daß die Transformation L bereits von der endlichen Ordnung m stetig ist: Die Konvergenz der $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, ... gegen Null folgt schon aus der Konvergenz der $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, ... und ihrer ersten m-Ableitungen gegen Null. In diesem Falle läßt sich die Klasse der zugelassenen Dehnungsfunktionen erweitern zu der aller nur m-mal stetig differenzierbaren und nach links hin abbrechenden Funktionen $\varepsilon(t)$.

Ein elementares Beispiel für $m = 1$ ist das *Newton*sche Reibungsgesetz $\sigma(t) = \eta\, d\varepsilon(t)/dt$. Ein Beispiel für $m = 0$ ist die dynamische Zustandsgleichung $\sigma + \tau_\varepsilon \dot{\sigma} = E\,(\varepsilon + \tau_\sigma \dot{\varepsilon})$ mit dem statischen Elastizitätsmodul E und den Relaxationszeiten τ_ε und τ_σ bei konstanter Dehnung und Spannung.

Der oft betrachtete Fall einer Sprungfunktion für $\varepsilon(t)$ [$\varepsilon(t) = 0$ für $t < 0$, $\varepsilon(t) = \text{constant} \neq 0$ für $t > 0$] ist an sich unrealistisch und auch nicht einmal für $m = 0$ in der zugelassenen Funktionenklasse enthalten. Er kann aber im allgemeinen (zumindest im Falle einer für $t > 0$ zweimal stetig differenzierbaren positiv-definiten Funktion $P(t)$, vgl. Abschnitt 3) als Grenzfall von zugelassenen Funktionen $\varepsilon(t)$ betrachtet werden.

3. Ergebnisse

Die Hauptergebnisse der auf Grund der Postulate I bis VII entwickelten Theorie sind die folgenden:

1. Die lineare Transformation L ist stetig von einer endlichen Ordnung $m \leqq 3$. Für alle für dieses m zugelassenen Dehnungsfunktionen $\varepsilon(t)$, die für $t < 0$ verschwinden und für $t \to \infty$ hinreichend langsam wachsen, gilt

$$\int_0^\infty e^{-st}\sigma(t)\,dt = s\,Z(s)\int_0^\infty e^{-st}\varepsilon(t)\,dt \quad \text{für } Re\, s > 0\,. \qquad [2]$$

Diese Gleichung definiert gleichzeitig die Impedanzfunktion $Z(s)$.

2. Die Impedanzfunktion $Z(s)$ ist eine positive Funktion im Sinne der Netzwerktheorie; sie ist in der Halbebene $Re\, s > 0$ der komplexen s-Ebene holomorph, es gilt dort $Re\, Z(s) > 0$ und es ist $Z(s)$ reell und positiv für reelle positive s.

3. Die Impedanzfunktion $Z(s)$ besitzt für $Re\, s > 0$ eine Darstellung

$$Z(s) = A\,s + \frac{B}{s} + \int_0^\infty e^{-st}P(t)\,dt + s^2\int_0^\infty e^{-st}[P(0) - P(t)]\,dt \qquad [3]$$

mit $A, B \geqq 0$ und $A + B + P(0) > 0$. $P(t)$ ist eine reelle positive definite Funktion, das heißt $P(t)$ ist reell, und mit irgend einem Satz $t_1, t_2, \ldots, t_n$ positiver t-Werte ist die quadratische Form $\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(t_i - t_k)\,x_i x_k$ positiv definit.

4. Die lineare Transformation L läßt sich darstellen als

$$\sigma(t) = A\,\dddot{\varepsilon}(t) + B\varepsilon(t) + \int_0^\infty \dot{\varepsilon}(t-u)\,P(u)\,du + \int_0^\infty \dddot{\varepsilon}(t-u)\,[P(0) - P(u)]\,du \quad \text{für alle } t. \qquad [4]$$

5. Die Umkehrtransformation lautet

$$\varepsilon(t) = [A_1 + P_1(0)]\,\sigma(t) + \int_0^\infty \sigma(t-u)\,[B_1 u + \int_0^u P_1(v)dv]\,du + \int_0^\infty \dot{\sigma}(t-u)\,[P_1(0) - P_1(u)]\,du \quad \text{für alle } t. \qquad [5]$$

Auch $P_1(u)$ ist eine positiv-definite Funktion, die sich ebenso wie die Konstanten A_1, B_1 aus A, B, $P(u)$ eindeutig berechnen läßt.

Die Darstellungen [4] und [5] der Spannungsdehnungsbeziehung sind typische Nachwirkungsdarstellungen. Es erscheint jedoch unbefriedigend, daß in den Integralen in [4] die erste und die dritte Ableitung von $\varepsilon(t)$ eingehen entgegen den gewohnten Formeln. Auf diese könnte man wohl durch partielle Integration übergehen, wenn $P(t)$ dreimal differenzierbar wäre. Aber aus den Postulaten I bis VII allein folgen keine Differenzierbarkeitseigenschaften für $P(t)$. Erst ein zusätzliches Postulat, dessen physikalische Grundlage aber noch unklar ist, könnte die Situation verbessern. Vermutlich wird man den physikalischen Möglichkeiten keinen Zwang auferlegen, wenn man für $P(t)$ nur solche positive definite Funktionen annimmt, die für $t > 0$ wenigstens dreimal differenzierbar sind und deren Differentialquotienten für $t \to +0$, d. h. von rechts her, definierte endliche Grenzwerte haben. Stellt man eine entsprechende Forderung für $P_1(t)$, so gehen [4] und [5] über in

$$\sigma(t) = A\,\ddot{\varepsilon}(t) - P'(+0)\,\dot{\varepsilon}(t) + [B + P(+0) - P''(+0)]\,\varepsilon(t) + \int_0^\infty \varepsilon(t-u)\,[P'(u) - P'''(u)]\,du\,, \qquad [6]$$

$$\varepsilon(t) = [A_1 + P_1(0)]\,\sigma(t) + \int_0^\infty \sigma(t-u)\left[B_1 u - P_1{}'(u) + \int_0^u P_1(v)\,dv\right]du \quad \text{für alle } t\,. \qquad [7]$$

Die Klasse der möglichen Nachwirkungsfunktionen ist damit eindeutig charakterisiert.

Für einige Klassen von Systemen oder Materialien lassen sich weitergehende und einfachere Aussagen machen.

Kapazitätsartige Systeme. Sie sind dadurch definiert, daß sowohl der instantane Modul als auch der Modul im thermodynamischen Gleichgewicht definierte endliche und von Null verschiedene Werte haben (Elastizitätsmodul bei Dehnung, Torsionsmodul bei Schubverformung usw.). Für diese Systeme gilt auf der reellen Achse

$$0 < B = \lim_{s\to 0} sZ(s) \leqq \lim_{s\to\infty} sZ(s) < \infty . \qquad [8]$$

Dann bestehen mit reellen positiv-definiten Funktionen $Q(t)$ und $R(t)$ und mit $B > 0$ die Darstellungen und Beziehungen

$$s\,Z(s) = B + s\int_0^\infty e^{-st}\,Q(t)\,dt\,, \qquad [9]$$

$$[sZ(s)]^{-1} = A_1 + s\int_0^\infty e^{-st}[R(0) - R(t)]\,dt \qquad [10]$$

für $Re\, s > 0$ und

$$\sigma(t) = B\,\varepsilon(t) + \int_0^\infty \dot\varepsilon\,(t-u)\,Q(u)\,du\,, \qquad [11]$$

$$\varepsilon(t) = A_1\sigma(t) + \int_0^\infty \dot\sigma\,(t-u)\,[R(0) - R(u)]\,dn \qquad [12]$$

für alle t.

Induktivitätsartige Systeme. Ihre Impedanzfunktion verhält sich für sehr langsame und sehr schnelle Vorgänge wie die einer (in beiden Fällen nicht notwendig gleichen) Induktivität. Ein solches Verhalten der Impedanzfunktion findet sich bei der Beschreibung der magnetischen Relaxation.

Kapazitätsartige Fließsysteme. Sie haben die Eigenschaften

$$B = \lim_{s\to\infty} sZ(s) = 0, \quad 0 < \lim_{s\to\infty} sZ(s) < \infty . \qquad [13]$$

Im Beispiel des elastischen Verhaltens bedeuten diese Beziehungen, daß der instantane Modul endlich und von Null verschieden ist und daß die Spannung bei konstant gehaltener Dehnung stets auf Null relaxiert.

Auch hier gelten die Beziehungen [9] und [11]. Die Auflösung von [11] nach $\varepsilon(t)$ läßt sich jedoch im allgemeinen gegenüber der Formulierung [5] nicht vereinfachen.

Wird die Spannung von einem gewissen Zeitpunkt ab konstant $\neq 0$ gehalten, so bleibt die Dehnung nicht beschränkt. Das System zeigt die charakteristische Eigenschaft des Fließens.

Die in der Theorie des linearen rheologischen Verhaltens häufig gemachte Annahme, daß das Fließen bei konstanter Spannung asymptotisch linear mit der Zeit erfolgt, läßt sich im Rahmen unserer Postulate *nicht* begründen. Beispielsweise hat die Impedanzfunktion

$$Z(s) = \frac{1}{s}(A_0 + s^{-\beta})^{-1} \text{ mit } A_0 > 0,\ 0 < \beta < 2 \qquad [14]$$

alle auf Grund unserer Postulate notwendigen Eigenschaften und genügt überdies den Bedingungen [13] für kapazitätsartige Fließsysteme. Wählt man nun $\sigma(t)$ als Sprungfunktion, $\sigma(t) = 0$ für $t < 0$ und $= 1$ für $t > 0$, so folgt

$$\varepsilon(t) = A_0 + \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} \text{ für } t > 0\,. \qquad [15]$$

Das Fließen kann also mit irgend einer Potenz t^β der Zeit mit $0 < \beta < 2$ erfolgen.

Relaxationssysteme. Sie haben ein reelles, diskretes oder kontinuierliches oder gemischtes Spektrum von Relaxationszeiten und sind durch die Darstellung der Impedanz oder der reziproken Impedanz (Admittanz)

$$Z(s) \text{ oder } Z(s)^{-1} = a + \frac{b}{s} + \int_0^\infty \frac{1}{1+s\tau}\,d\psi(\tau), \quad a \geqq 0, \quad b \geqq 0 \qquad [16]$$

mit einer nicht abnehmenden Funktion $\psi(t)$ und mit $a + b + \psi(\infty) - \psi(0) > 0$ definiert.

Solche Systeme werden in der üblichen Relaxationstheorie betrachtet. –

Speziell für die lineare Rheologie sind die Aussagen über kapazitätsartige Systeme und über kapazitätsartige Fließsysteme von Bedeutung, und zwar meist nur über jene, die gleichzeitig Relaxationssysteme sind.

Eine Erweiterung dieser Theorie auf lineare Zusammenhänge zwischen Spannungs- und Dehnungstensor unter Einschluß von Temperaturänderungen und damit verbundener Entropieänderungen ist in einfacher Weise möglich. An die Stelle der Impedanzfunktion tritt dann eine Impedanzmatrix, die in vielen Fällen, insbesondere in der linearen Rheologie, symmetrisch ist.

Zusammenfassung

Die linearen dissipativen Systeme (viskoelastische Materialien, elektrische Netzwerke etc.) werden mathematisch durch gewisse lineare Funktionaltransformationen beschrieben. Unter den üblichen Voraussetzungen der Linearität, der Invarianz gegen Verschiebung der Zeitskala, der Kausalität und der weiteren Voraussetzung der Dissipativität im Sinne der Thermodynamik wird eine allgemeine und strenge Theorie dieser Transformationen gegeben.

Schrifttum

1) *Fitzgerald, E. R.*, Phys. Rev. **108**, 690 (1957); J. Chem. Physics **27**, 1180 (1957).
2) *Meixner, J.*, Z. Physik **139**, 30 (1954).
3) *Schrama, J.*, On the Phenomenological Theory of Linear Relaxation Processes. Diss. (Leiden, 1957).
4) *Love, E. R.*, Austral. J. Physics **9**, 1 (1956).
5) *Youla, D. C.*, *L. J. Castriota* und *H. J. Carlin*, Scattering Matrices and the Foundations of Linear, Passive Network Theory. Report 1957. Microwave Research Institute, Polytechnic Institute of Brooklyn
6) *König, H.* u. *J. Meixner*, Math. Nachr. (im Druck)