[Aus der Universitäts-Augenklinik zu Jena. (Direktor: Prof. Dr. Stock.)]

Über Sampsons graphische Ableitung der Abbildungskonstanten und ihre Anwendung auf die Fernrohrbrille.

Von

Dr. H. Erggelet,
Assistenten der Klinik.

Mit 4 Figuren im Text.

Die Betrachtung der Abbildungsverhältnisse optischer Systeme bietet dem Anfänger mancherlei Schwierigkeiten. Es mangelt zunächst eine lebendige Vorstellung davon, dass sich Objekt- und Bildraum gegenseitig durchdringen, und dieser Mangel macht sich in Form von Fehlern besonders gern dann bemerkbar, wenn es sich um die Zusammensetzung mehrerer Systeme handelt, wobei wie etwa beim Auge mehrere brechende Flächen Medien verschiedener Brechungsexponenten trennen. Eine wesentliche Erleichterung für das Verständnis bringt die in England übliche graphische Darstellung der Linsenformel nach Prof. Sampson mit Hilfe eines rechtwinkligen Koordinatensystems, wie sie beispielsweise A. S. Percival[1]) gibt. Die grosse Anschaulichkeit dieser Methode beruht darauf, dass Objekt- und Bildraum gewissermassen auseinander genommen werden und nur einen gemeinsamen Punkt beibehalten. Die beiden de facto in eine Gerade zusammenfallenden Achsen trennt man dadurch, dass man die eine gegen die andere um einen Winkel von 90° dreht, und zwar um einen Punkt, über dessen Wahl noch zu reden sein wird. In das entstehende rechtwinklige Koordinatensystem werden nun auf die eine Achse die Entfernungen im Objektraum, auf die andere die im Bildraum vom Nullpunkt aus in der üblichen Weise aufgetragen, d. h. die positiven

---

[1]) A. S. Percival, Some graphical methods, includig those that determine the situation of cardinal points. Proc. Opt. Conv. II. p. 272—276. 1912. 6 +.
— Geometrical Optics (Longmans, Green and Co., London 1913). p. 105.

Werte nach oben, bzw. nach rechts, die negativen nach unten, bzw. nach links. Die Entfernungen bei der Abbildung durch optische Systeme werden zweckmässig positiv[1]) angenommen, wenn sie in der Lichtrichtung gemessen werden; solche, die in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen werden, müssen also einen negativen Wert haben. Im Objektraum bezieht sich jede Entfernung auf den ersten (objektseitigen) Hauptpunkt, im Bildraum auf den zweiten (bildseitigen). Handelt es sich um eine einzige brechende Fläche, so fallen die beiden Hauptpunkte in einen Punkt, nämlich den Scheitel, zusammen. In diesem Fall werden also die Entfernungen im Objekt- und im Bildraum auf den gleichen Punkt bezogen. Diesen, den Scheitelort, wird man zweckmässigerweise bei der oben erwähnten Trennung der beiden sich durchdringenden Räume als Drehpunkt wählen. Er wird der gemeinsame Nullpunkt für die beiden Achsen. Das gleiche gilt für verschwindend dünne Linsen, wo die beiden Hauptpunkte zusammenfallen. Hat man es aber mit Systemen zu tun, bei denen das Hauptpunktsinterstitium nicht vernachlässigt werden kann, so fallen die Nullpunkte der beiden Achsen eben nicht auf einen und denselben physischen Punkt. In diesem Fall legt man die beiden Raumachsen so in das Koordinatenkreuz hinein, dass beide Hauptpunkte an den Schnittpunkt der Koordinatenachsen kommen. Dieser, der Nullpunkt bedeutet dann für die eine Achse den ersten (objektseitigen), für die andere den zweiten (bildseitigen) Hauptpunkt. In der Zeichnung des Koordinatensystems verschwindet also das Hauptpunktsinterstitium. Daran hat man sich zu erinnern, wenn man die erhaltenen Resultate wieder in der gewöhnlichen Art aufzeichnen will, wobei die Achse des Objektraums und die des Bildraums zusammenfallen, die beiden Räume sich also durchdringen. Dasselbe gilt, wenn man Systeme kombinieren will, deren Hauptpunkte einen endlichen Abstand haben. Ein Beispiel der letzteren Art wird uns am Schluss dieser Arbeit noch beschäftigen.

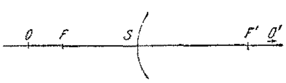
Diese Darstellung zeigt, wie wir sehen werden, in ausserordentlich eleganter und anschaulicher Weise die Beziehungen zwischen Objekt und Bild in ihrer Abhängigkeit von der Brechkraft des Systems. Ausserdem erhält man durch ihre Anwendung eine rein geometrische Ableitung der Gullstrandschen Formeln für die Zusammensetzung von zwei optischen Systemen. Mit Rücksicht darauf werden nach dem Vorgange Gullstrands die Werte aller nicht in Luft ge-

[1]) Siehe dazu auch die Stellungnahme Gullstrands in Helmholtz, Handb. d. phys. Optik. III. Aufl. Bd. I. S. 246.

messenen Entfernungen von vornherein durch Division mit dem Brechungsexponenten reduziert, und in die Zeichnung nur diese reduzierten Strecken eingetragen. Mit Hilfe dieser Darstellungsweise lässt sich schliesslich jedes beliebige optische System in seinen Nullstrahleneigenschaften graphisch demonstrieren.

Als Beispiel sei eine einfache sammelnde Fläche gewählt, wie sie in Fig. 1a angegeben ist. Bei einer solchen fallen die Hauptpunkte im Scheitel (S) derselben zusammen. In das Koordinatensystem werden die reduzierten Brennweiten eingetragen. Der objektseitige Brennpunkt F liegt links von S. Die objektseitige Brennweite SF hat also, weil dem Licht entgegen durchmessen, einen negativen Wert

Fig. 1a.



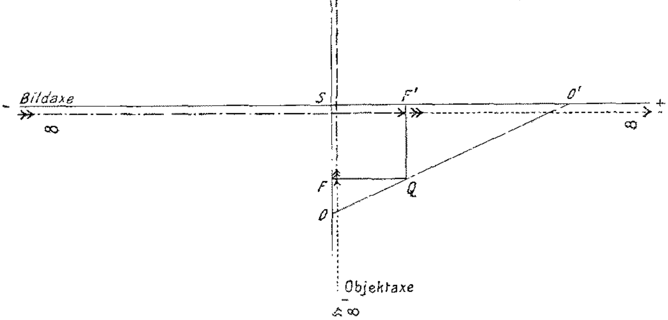


Fig. 1b.

und wird demnach auf der Ordinatenachse nach unten abgetragen (Fig. 1b). Die bildseitige SF' ist somit als positive Grösse auf der Abszissenachse nach rechts abzumessen. Durch die so festgelegten Strecken SF und SF' ist ein Punkt Q der Ebene bestimmt (da seine Ordinate und Abszisse nach Grösse und Richtung gegeben sind). Trägt man in gleicher Weise den Ort eines axialen Objektpunktes O in das Koordinatensystem ein, der als Objektachsenpunkt natürlich auf die Ordinatenachse kommt, und zieht dann von ihm aus durch Q eine Gerade, so schneidet diese die Abszisse in dem Punkt O'. Von diesem lässt sich beweisen, dass er der Bildpunkt zu O ist. Die Dreiecke SOO', FOQ und $F'QO'$ sind ähnlich, da die Winkel gleich sind. Demnach verhält sich:

$$SO:SO' = FO:FQ \text{ und } SO:SO' = F'Q:F'O',$$

nach der üblichen Bezeichnung ist die Objektentfernung $SO = a$; SO' sei b genannt.

$$a:b = (FS + SO):f' \qquad a:b = f:(F'S + SO')$$
$$a:b = (-f + a):f' \qquad a:b = f:(-f' + b)$$
$$a:b = (f' + a):f' \qquad a:b = -f':(-f' + b)$$
$$af' = bf' + ab \qquad -af' + ab = -bf'.$$

Aus der Division der beiden Gleichungen durch abf' folgt:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f'} \qquad \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{f'}.$$

Diese Formel, die Gausssche Hauptpunktsgleichung für den paraxialen Raum, zeigt, dass a und b sich verhalten wie Objektentfernung zur Bildentfernung. Da a die Objektentfernung war, so ist eben b als Bildentfernung nachgewiesen. O' ist also der Bildpunkt zu O. Das heisst, jede durch Q gehende Gerade schneidet auf der Ordinaten- und der Abszissenachse Punkte aus, deren Entfernung vom Nullpunkt des Koordinatensystems sich verhalten wie Objekt und Bild eines durch die Lage von Q bestimmten optischen Systems.

Nimmt man in Fig. 1 den Objektpunkt auf dem negativen Ast der Ordinate im Unendlichen an, so ist die von O durch Q gezogene Gerade zur Ordinate parallel. Nach Konstruktion schneidet sie die Abszisse in F'. Das Bild von O liegt im bildseitigen Brennpunkt. Lässt man jetzt das Objekt näher kommen (········), so entfernt sich das Bild nach rechts von F'. OQ wird zur Abszisse parallel, wenn der Objektpunkt in F (dem objektseitigen Brennpunkt) angelangt ist. Das Bild liegt dann in $+\infty$.

Wandert das Objekt weiter (—·—·—), so fällt sofort der Schnittpunkt mit der Abszissenachse nach links, auf die Minusseite. Das Bild wird virtuell; denn es wird entworfen in einer Richtung entgegen der Lichtrichtung, und die Strahlen kommen gar nicht zu einem reellen Schnittpunkt.

In S fällt der Schnittpunkt der durch Q gezogenen Geraden mit dem Nullpunkt des Systems zusammen. Das heisst, Objekt und Bild liegen in gleichem Punkt, und ihre Entfernungen vom Scheitel haben den Wert ± 0.

Bewegt sich jetzt der Objektpunkt ein wenig weiter (— — —), so erhält die Objektentfernung einen positiven Wert. Das Licht trifft die Linse, bevor es zum Objekt gelangt. Das heisst, das Objekt ist jetzt virtuell. Zu gleicher Zeit läuft das Bild wieder auf die positive Seite der Abszisse hinüber. Die Strahlen vereinigen sich hinter der Linse zum Bild, dieses ist wieder reell. Wir erhalten also jetzt von einem virtuellen Objekt ein reelles Bild. Hat schliesslich der Objektpunkt auf der positiven Seite der Ordinatenachse sich ins Unendliche entfernt, so verläuft OQ der Ordinate parallel und schneidet die Abszisse in F'. Das Bild ist wieder in dem bildseitigen Brennpunkt angelangt.

Damit ist die Diskussion der Lagenbeziehung erledigt.

Wie findet sich nun das Grössenverhältnis?

Aus der allgemeinen Gleichung für die Bildgrösse:

$$\alpha . A = \beta . B$$

folgt, wenn nach Gullstrand $A = \frac{1}{a}$ und $B = \frac{1}{b}$ gesetzt wird:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{A}{B} = \frac{b}{a}.$$

Da in unserem Koordinatensystem alle Grössen auf Luft reduziert sind, gilt unmittelbar:

$$\frac{b}{a} = \frac{SO'}{SO} = \operatorname{tg} O'OS = \operatorname{tg} O'QF'.$$

Verfolgt man die Lage der Geraden OQ bei der Wanderung des Objekts von $-\infty$ nach $+\infty$, so sieht man, dass sie sich im Sinne des Uhrzeigers um Q dreht. Bei einer bestimmten Stellung des Objekts gibt nun die Tangente des Winkels, um den sich die Gerade von ihrer Ausgangsstellung aus gedreht hat, das Verhältnis an zwischen Bild- und Objektgrösse. Solange das Objekt auf der negativen Seite weiter entfernt bleibt als der Brennpunkt, ist die Tangente negativ, weil im Bruch $\operatorname{tg} O'QF' = \frac{F'O'}{F'Q}$, wo $F'Q$ immer negativ ist, der Zähler einen positiven Wert hat. Fällt O' nach links hinüber, so wird $F'O'$ negativ, und der Wert des Bruches positiv. Das Vorzeichen gibt dabei Aufschluss über die gegenseitige Lage von Bild und Objekt zur Achse. Ist die Tangente positiv, so sind Bild und Objekt gleich gerichtet; umgekehrt, wenn sie einen negativen Wert hat.

Betrachten wir nun nach R. A. Sampsons Vorgang (Percival l. c.) die Zusammensetzung von zwei brechenden Flächen, z. B. einer zerstreuenden und einer sammelnden in der Anordnung der Fig. 2a. Zunächst wird wieder bezüglich der ersten Fläche verfahren, wie im Beispiel der einfachen Fläche (mit dem einzigen Unterschiede, dass es sich hier um ein negatives System handelt), und der Punkt Q_1 bestimmt (Fig. 2b). Dann ist die zweite Fläche einzufügen. Sie gehört zum Bildraum der ersten Fläche. Ihr Scheitelort liegt also auf der Abszisse, und zwar in positiver Richtung. Der Abstand der zwei

Scheitel hat natürlich einen positiven Wert, denn das Licht muss zuerst die erste passieren, bevor es die zweite trifft. Die Strecke wird in der Lichtrichtung gemessen. Eingetragen wird S_1S_2 nach Reduktion auf Luft. Mit Bezug auf die zweite Fläche gehört diese Strecke dem Objektraum an. Die Abszisse der Bildachse des ersten Systems wird also für das zweite System zur Objektachse. Die Senkrechte in S_2, die Ordinatenachse für die zweite Fläche, muss somit die entsprechende Bildachse sein. In dem so festgelegten zweiten Koordinatensystem werden in entsprechender Weise wie im ersten die Brenn-

Fig. 2a.

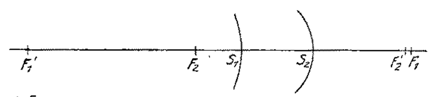
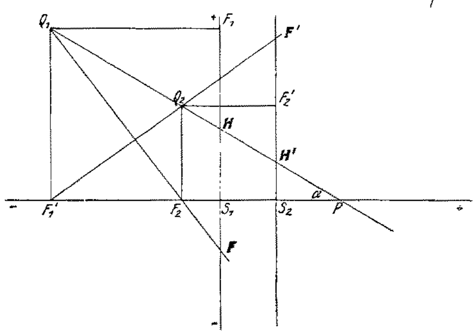


Fig. 2b.



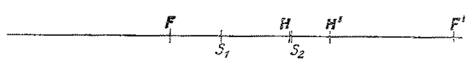


Fig. 2c.

weiten eingetragen. Die objektseitige auf der Abszissenachse, und zwar als negativer Wert — es handelt sich um ein Sammelsystem — die bildseitige demnach positiv auf der neuen Ordinatenachse. Man erhält wiederum den Punkt Q_2.

Es erhebt sich jetzt die Frage nach den Kardinalpunkten des aus den zwei Flächen kombinierten Systems. Der bildseitige Brennpunkt ist nach der Definition der Bildpunkt des unendlich fernen Achsenpunktes im Objektraum. Wir suchen zunächst den Bildpunkt des unendlich fernen Punktes entworfen durch das erste System und konstruieren dann zu diesem als Objekt den Bildpunkt im Bildraum des zweiten Systems. Das Bild des unendlich fernen Achsenpunktes in bezug auf die erste Fläche wird natürlich in deren bildseitigem Brennpunkt F_1' liegen. Die von F_1' als Objekt der zweiten Fläche durch Q_2 gezogene Gerade schneidet auf der (Bild-) Ordinatenachse des zweiten Koordinatensystems den zugehörigen Bildort F' aus. Dieser ist der Bildort des unendlich fernen Punktes entworfen durch das ganze System. In umgekehrter Richtung erhält man den objektseitigen Brennpunkt F des zusammengesetzten Systems. Nunmehr sind die Hauptpunkte des zusammengesetzten Systems aufzusuchen.

Jede durch Q_1 gehende Gerade schneidet auf der Ordinaten- und Abszissenachse des ersten Systems Objekt- und Bildpunkt aus. Diese werden bezogen auf S_1. Das gleiche gilt für jede durch Q_2 gehende Gerade im zweiten System. Die Punkte werden hier bezogen auf S_2. Denkt man sich wie im ersten Beispiel in den beiden Punkten rotiere jeweils eine Gerade, so können die zwei Geraden zusammenfallen in eine, wenn sie die Richtung $Q_1 Q_2$ einnehmen. Dann fallen auch ihre Schnittpunkte mit der Abszissenachse in einem Punkt (P) zusammen. Das heisst, dieser Schnittpunkt ist einmal im System 2 der Objektpunkt, dem der Schnittpunkt H' als Bildpunkt zugeordnet ist. Und dann ist er im System 1 der Bildpunkt, dem der Objektpunkt H der Ordinatenachse 1 entspricht. Es ist also H durch System 1 nach P, und dieses durch System 2 nach H' abgebildet worden. H' ist demnach das Bild von H in bezug auf das kombinierte System. Die Anordnung auf der Systemachse gibt Fig. 2c.

Sieht man nun nach dem Vergrösserungsverhältnis in H und H', so ergibt sich $\frac{\beta_2}{\alpha_1} = 1$. Das Verhältnis von Bild und Objekt im System 1 ist nämlich:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{b_1}{a_1} = \frac{S_1 P}{S_1 H} = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}. \tag{1}$$

Im System 2 gilt:

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{S_2 H'}{S_2 P} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Nun ist das Bild des ersten Systems Objekt fürs zweite, daher $\beta_1 = \alpha_2$, und die Gleichung lautet jetzt:

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \operatorname{tg} \alpha. \tag{2}$$

Multipliziert man (1) mit (2), so folgt:

$$\frac{\beta_2}{\alpha_1} = 1.$$

Das Vergrösserungsverhältnis ist gleich 1, und zwar positiv. Bild und Objekt in H und H_1 sind also bezogen auf das ganze System gleich gross und gleich gerichtet. Das heisst, H und H' sind die Hauptpunkte des kombinierten Systems. Damit sind nun die 4 Kardinalpunkte der Kombination im Koordinatensystem bestimmt.

Auf dem Wege einer rein geometrischen Ableitung soll nun die Lage dieser Punkte in Beziehung gesetzt werden zu den Brennweiten der Komponenten und deren Abstand voneinander.

Von besonderer Wichtigkeit speziell für die Brillenpraxis ist die Entfernung der Brennpunkte von den zugehörigen Linsenscheiteln S_1F auf der Objektseite und S_2F' auf der Bildseite. Man bezeichnet sie mit $a_{1\,\infty}$ (bzw. $b_{2\,\infty}$). Das soll sagen, es handelt sich um einen axialen Punkt im Objekt(Bild)raum, der von der nächst gelegenen, ersten (zweiten) Linsenfläche die Entfernung a (b) hat, und dem als Bild (Objekt) in bezug auf das ganze System ein unendlich ferner Achsenpunkt entspricht. Der reziproke Wert dieser Strecke bei einem korrigierenden Glase ist die von M. v. Rohr eingeführte Brillenscheitelrefraktion[1]). Sie unterscheidet sich, unter Umständen ganz beträchtlich, von der Brechkraft. Auf diesen Punkt wird später noch hingewiesen werden.

Für S_1F ($= a_{1\,\infty}$) lässt sich folgende Beziehung ableiten. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke FS_1F_2 und FF_1Q_1 (Fig. 2b) folgt die Proportion:

$$S_1F : S_1F_2 = F_1F : F_1Q_1.$$

F_1Q_1 ist aber gleich S_1F_1', also:

$$S_1F : S_1F_2 = F_1F : S_1F_1'.$$

Setzt man $S_1F_2 = S_1S_2 + S_2F_2$ und $F_1F = F_1S_1 + S_1F$ in die Gleichung ein, so ergibt sich:

$$S_1F : (S_1S_2 + S_2F_2) = (F_1S_1 + S_1F) : S_1F_1'.$$

Nun ist $S_2F_2 = f_2$; $F_1S_1 = -f_1$; $S_1F_1' = f_1'$. S_1S_2 nennen wir δ, und für S_1F setzen wir das oben gewählte $a_{1\,\infty}$. Nach Einführung dieser Bezeichnungen hat man:

$$\begin{aligned} a_{1\,\infty} : (\delta + f_2) &= (-f_1 + a_{1\,\infty}) : f_1', \\ a_{1\,\infty} : (\delta - f_2') &= (f_1' + a_{1\,\infty}) : f_1', \\ a_{1\,\infty} \cdot f_1' &= \delta f_1' + \delta a_{1\,\infty} - f_2' f_1' - f_2' a_{1\,\infty}, \end{aligned}$$

[1]) Vgl. M. v. Rohr, Die Brille als optisches Instrument, S. 11 und: Das Auge und die Brille, S. 30.

$$a_{1\,\infty}(f_1' + f_2' - \delta) = \delta f_1' - f_1' f_2',$$

$$a_{1\,\infty} = \frac{\delta f_1' - f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - \delta}.$$

Ganz analog erhält man einen Ausdruck für $S_2 F'$, das mit $b_{2\,\infty}$ bezeichnet wird. Es folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $S_2 F' F_1'$ und $F_2 Q_2 F_1'$ die Proportion:

$$S_2 F' : S_2 F_1' = F_2 Q_2 : F_2 F_1'.$$

$F_2 Q_2 = S_2 F_2'$, also:

$$S_2 F' : S_2 F_1' = S_2 F_2' : F_2 F_1'.$$

Setzt man wieder für $S_2 F_1'$ ein $S_2 S_1 + S_1 F_1'$ und für $F_2 F_1'$ die Summe $F_2 S_2 + S_2 S_1 + S_1 F_1'$, so bekommt man:

$$S_2 F' : (S_2 S_1 + S_1 F_1') = S_2 F_2' : (F_2 S_2 + S_2 S_1 + S_1 F_1')$$

und die weitere Ableitung schliesst sich völlig an den vorigen Fall an:

$$b_{2\,\infty} : (-\delta + f_1') = f_2' : (f_2' - \delta + f_1'),$$

$$b_{2\,\infty} = \frac{-\delta f_2' + f_1' f_2'}{f_1' - \delta + f_2'} = \frac{f_1' f_2' - \delta f_2'}{f_1' + f_2' - \delta}.$$

Für die Brennweiten des Vollsystems soll im folgenden eine Beziehung abgeleitet werden, zunächst für die objektseitige HF. Da die Dreiecke HFQ_1 und $Q_2 F_2 Q_1$ ähnlich sind, verhalten sich entsprechende Seiten wie die Höhen:

$$HF : Q_2 F_2 = S_1 F_1' : F_2 F_1',$$

$$HF : F_2' S_2 = S_1 F_1' : (F_2 S_2 + S_2 S_1 + S_1 F_1'),$$

$$HF : -f_2' = f_1' : (f_2' - \delta + f_1'),$$

$$HF = \frac{-f_1' \cdot f_2'}{f_1' + f_2' - \delta}.$$

Ganz analog bekommt man einen Ausdruck für die bildseitige Brennweite $H'F'$ ausgehend von den ähnlichen Dreiecken $F' H' Q_2$ und $F_1' Q_1 Q_2$.

$$H'F' : Q_1 F_1' = S_2 F_2 : F_1' F_2,$$

$$H'F' : F_1 S_1 = S_2 F_2 : (F_1' S_1 + S_1 S_2 + S_2 F_2),$$

$$H'F' : -f_1 = f_2 : (-f_1' + \delta + f_2),$$

$$H'F' : +f_1' = -f_2' : -(f_1' - \delta + f_2'),$$

$$H'F' = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - \delta}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner des Bruches durch $f_1' f_2'$, so ist:

$$H'F' = \frac{1}{\frac{1}{f_2'} + \frac{1}{f_1'} - \frac{\delta}{f_1' f_2'}}.$$

Den reziproken Wert der auf Luft reduzierten bildseitigen Brennweite nennt man Brechkraft und bezeichnet ihn mit D. Nach Anwendung dieser Definition auf unsere Gleichung hat man für die Brechkraft des Vollsystems den Ausdruck:

$$D_{12} = D_1 + D_2 - \delta D_1 D_2.$$

Sind in den ursprünglichen Daten alle Masse in Metern gemessen, so ist die Brechkraft in dieser Gleichung in Dioptrien angegeben, und man hat damit die Formel der Gullstrandschen Dioptrienrechnung. Dabei ist δ der auf Luft reduzierte Scheitelabstand der beiden einfachen brechenden Flächen, bei denen die Hauptpunkte jeweils im Flächenscheitel zusammenfallen. Handelt es sich aber um Linsen endlicher Dicke, bei denen die Hauptpunkte einen nicht zu vernachlässigenden Abstand haben, so ist δ der (auf Luft reduzierte) Abstand zwischen dem zweiten Hauptpunkte der ersten und dem ersten der zweiten Linse, und man hat bei der Einordnung der Einzellinsen in das Koordinatensystem hinsichtlich des Hauptpunktsinterstitiums lediglich auf die in der Einleitung berührten Punkte zu achten.

Zur vollständigen Kenntnis unseres kombinierten Systems fehlen nur noch Ausdrücke für die Hauptpunktsabstände S_1H und S_2H'.

$$S_1H = S_1F + FH,$$
$$S_1H = a_{1\infty} - HF.$$

Setzt man die entsprechenden oben abgeleiteten Werte hier ein, so folgt:

$$S_1H = \frac{\delta f_1' - f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - \delta} + \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - \delta} = \frac{\delta f_1'}{f_1' + f_2' - \delta}.$$

Dividiert man Zähler und Nenner des Bruches durch $f_1' . f_2'$, so erhält man:

$$S_1H = \frac{\frac{\delta}{f_2'}}{\frac{1}{f_2'} + \frac{1}{f_1'} - \frac{\delta}{f_1' f_2'}},$$

$$S_1H = \frac{\delta D_2}{D_2 + D_1 - \delta D_1 D_2} = \frac{\delta D_2}{D_{12}}.$$

Für den Abstand des zweiten Hauptpunktes des Vollsystems vom gemeinsamen Hauptpunkt der zweiten brechenden Fläche ergibt sich:

$$S_2H' = S_2F' + F'H',$$
$$S_2H' = b_{2\infty} - H'F',$$
$$S_2H' = \frac{f_1' f_2' - \delta f_2'}{f_1' + f_2' - \delta} - \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - \delta} = \frac{-\delta f_2'}{f_1' + f_2' - \delta}.$$

$$S_2H' = \frac{-\frac{\delta}{f_1'}}{\frac{1}{f_2'} + \frac{1}{f_1'} - \frac{\delta}{f_1' f_2'}}, \quad S_2H' = -\frac{\delta D_1}{D_{12}}.$$

Also ergeben sich, wie es auch sein muss, wieder die Gullstrandschen Formeln.

Wir kommen zurück auf den oben gestreiften Unterschied zwischen Brennweite und Scheitelrefraktion. Bei einer einfachen brechenden Fläche fallen bekanntlich die Hauptpunkte in einem Punkt zusammen, nämlich im Flächenscheitel. Daher sind in diesem Fall Brennweite und Scheitelabstand (Schnittweite vorher achsenparalleler Strahlen) einander gleich. Bei einer Kombination von zwei solchen Flächen mit endlichem Abstand, also bei einer dicken Linse, verlassen die Hauptpunkte die Flächenscheitel. Um den Betrag dieses Auseinanderrückens unterscheidet sich natürlich jetzt die Brennweite von der Schnittweite. Die praktische Bedeutung dieser Verhältnisse für die Brillenoptik ist nun folgende.

Es sei die Aufgabe gestellt, einem ametropischen Auge Netzhautbildgrössen zu verschaffen, die von den durch die gewöhnlichen Brillengläser vermittelten in bestimmter Weise verschieden sind. Derartige Forderungen liegen der Konstruktion der Fernrohrbrillen und der Anisometropenbrillen zugrunde.

Die Bildgrösse ist für ferne Objekte umgekehrt proportional der Brechkraft des optischen Systems, im Fall eines korrigierten ametropischen Auges also der Brechkraft des aus Auge und Brille zusammengesetzten Systems. Ihrerseits ist die Gesamtbrechkraft abhängig von den Einzelbrechkräften und vom reduzierten Abstand des zweiten Hauptpunktes der ersten vom ersten Hauptpunkt der zweiten Komponente. Bei einer korrigierenden Brille ist nun von vornherein festgelegt der Ort des bildseitigen Brillenbrennpunktes in bezug auf das Auge. Er muss eben, wenn die Brille eine korrigierende sein soll, mit dem Fernpunkt des Auges zusammenfallen. Ausserdem kann aus äusseren Gründen die Lage des augennahen Brillenscheitels nur in engen Grenzen geändert werden. Da nun bei einfachen Linsen mässiger Dicke δ der Ort der Hauptpunkte wegen des geringen Wertes von δ nur um geringe Beträge vom Scheitelort abweichen kann, so ist für eine Variation der Brennweite des korrigierenden Glases nur ein geringer Spielraum gegeben durch Verschieben der Linse und durch Änderung ihrer Form. Der Effekt, den man so für die Brechkraft des Vollsystems und damit für die Netzhautbildgrösse erzielt, ist infolgedessen ziemlich gering. Nimmt man den augennahen Brillenscheitel unveränderlich an in der üblichen Entfernung von 12 mm vom Hornhautscheitel, so ist die Schnittweite der Brille nach Grösse und Lage in bezug aufs Auge festgelegt und damit für einfache und relativ dünne Linsen auch die Brennweite, wenn man absieht von dem bei den zulässigen Durchbiegungen immer nur mässigen Einfluss der Linsenform. Eine Änderung der Brennweite der korrigierenden Brille liesse sich nur erzielen durch eine Verlagerung der Brillenhauptpunkte. Das gelingt durch Einführung dicker Systeme. Einfache dicke Glaslinsen scheiden aus des Gewichtes wegen. So kommt man zur Anwendung von vier statt zwei brechenden Flächen, d. h. von zwei dünnen Linsen mit grösserem Luftabstand, was sich auch aus andern optischen Gründen empfiehlt. Durch eine geeignete Wahl der Brechkräfte der Komponenten und deren Abstand lässt sich für das Brillensystem bei konstanter Schnittweite eine in weiten Grenzen beliebige Brennweite erzielen. Damit verfügt man natürlich auch über die Brechkraft des Systems Brille + Auge und über die Netzhautbildgrösse. Diesen Weg hat M. v. Rohr bei der Konstruktion seiner Fernrohrbrille und seiner Systeme zur Korrektion der Anisometropie beschritten.

Mit Hilfe der besprochenen graphischen Methode sollen nun durch Kombination der Bestandteile die axialen Eigenschaften einer Fernrohrbrille ermittelt werden. Dabei seien die Daten zugrunde gelegt, mit denen M. v. Rohr in seiner Publikation: „Zur Theorie der Fernrohrbrille“ (v. Graefe's Arch. f. Ophth. Bd. LXXV. S. 569) sein Musterbeispiel durchrechnet. Zum Schluss möge in gleicher Weise die Kombination dieses Brillensystems mit dem optischen System des Auges behandelt werden.

Die Fernrohrbrille besteht aus einer Sammellinse und einer in bestimmtem Abstand dahinter angeordneten stärkeren Zerstreuungslinse. Von den Daten, die am genannten Ort gegeben sind, haben wir folgende nötig. Die Brechkraft D_1 der Sammellinse $= 26{,}35$ dptr; die Brechkraft D_2 der Zerstreuungslinse $= -60{,}20$ dptr; den reduzierten Abstand δ des ersten Hauptpunkts der zweiten Linse vom zweiten Hauptpunkt der ersten $H_1'H_2 = 0{,}01414$ m. Danach sind die Brennweiten:

$$f_1' = \frac{1}{D_1} = \frac{1}{26{,}35} = 0{,}038\,\text{m},$$

$$f_2' = \frac{1}{D_2} = \frac{1}{-60{,}20} = 0{,}0166\,\text{m}.$$

Mit diesen Werten können wir die bekannte Konstruktion ausführen (Fig. 3) und erhalten die Kardinalpunkte des zusammengesetzten Brillensystems. Die Ausmessung der Figur 3 ergibt für die objektseitige Brennweite $H_{12}F_{12}$ und für die bildseitige $H_{12}'F_{12}'$ 87,5 mm. Bei der Bestimmung der Schnittweite s', die wir mit der Brennweite vergleichen wollen, ist zu berücksichtigen, dass der hintere Brillenscheitel S' nicht mit dem Nullpunkt H_2 des zweiten Koordinatensystems zusammenfällt. s' ergibt sich zu:

$$S'F_{12}' = S'H_2' + H_2'H_{12}' + H_{12}'F_{12}'.$$

$S'H_2'$ ist nach v. Rohr (loc. cit. H_2' genannt) $= -0{,}1$ mm; die andern Strecken sind auszumessen; man erhält so:

$$S'F_{12}' = -0{,}1 + 32{,}6 - 87{,}5 = -55{,}0 \text{ mm}.$$

Die praktische Bedeutung dieser Differenz wird sofort deutlich, wenn man die Brille in Verbindung mit dem optischen System des Auges studiert.

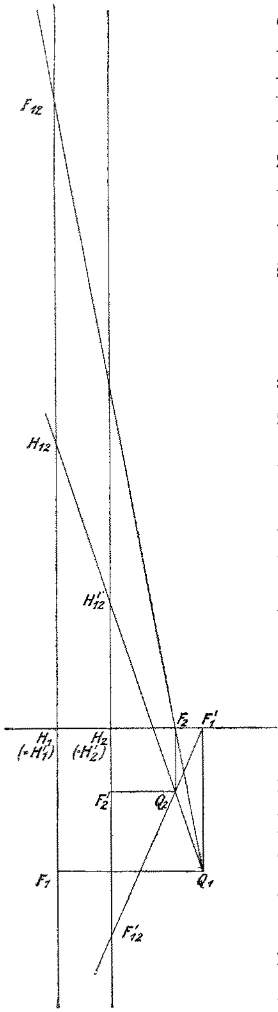


Fig. 3.
Darstellung der Kardinalpunkte einer Fernrohrbrille (1/2 der natürlichen Grösse).

Beabsichtigt man, das Ergebnis der Konstruktion in der üblichen Weise aufzuzeichnen, wobei unter gegenseitiger Durchdringung von Objekt- und Bildraum deren Achsen zusammenfallen, so ist dazu die Kenntnis des Hauptpunktsinterstitiums $H_{12}H_{12}'$ der Brille, sowie der Lagenbeziehungen zu bekannten physischen Punkten des Systems z. B. zum Brillenscheitel S' unerlässlich. Auch für die folgende Zusammensetzung der optischen Systeme Brille + Auge haben wir diese Strecken nötig. Bei ihrer Bestimmung hat man sich daran zu erinnern, worauf schon S. 79 und S. 87 aufmerksam gemacht worden ist, dass nämlich die Hauptpunktsinterstitien der Einzellinsen im Koordinatensystem verschwanden. Jetzt müssen sie in Rechnung gesetzt werden. Das heisst, man darf nicht etwa einfach in der Figur messen:

$$H_{12}H_{12}' = H_{12}H_1 + H_1H_2 + H_2H_{12}' = -74{,}5 + 14{,}1 + 32{,}6 = -27{,}8 \text{ mm}.$$

Jeweils beim Übergang von einer Achse auf die dazu senkrechte ist vielmehr der unterdrückte Hauptpunktszwischenraum wieder aufzunehmen, nämlich:

$$H_1 H_1' = 1{,}77 \text{ mm} \quad \text{und} \quad H_2 H_2' = 0{,}19 \text{ mm}.$$

Dann erhält man:

$$H_{12} H_{12}' = -27{,}8 + 1{,}77 + 0{,}19 = -25{,}84 \text{ mm}$$ [1]).

Wir kommen nun zur Kombination dieser Fernrohrbrille mit dem optischen System des Auges. Zur Konstruktion haben wir zunächst nur nötig, die Brennweiten der Brille in ein rechtwinkliges Koordinatensystem einzutragen (Fig. 4), und den Punkt Q_{12} zu bestimmen. Nun erhebt sich die Frage nach dem δ, dem auf Luft reduzierten Abstand des ersten Augenhauptpunktes vom zweiten Brillenhauptpunkt ($H_{12}'\mathbf{H}$):

$$H_{12}'\mathbf{H} = H_{12}' F_{12}' + F_{12}' S' + S'\mathbf{H}.$$

Den ersten und zweiten Summanden kennen wir bereits. Der dritte hängt ab vom Sitz der Brille. Setzen wir den hinteren Brillenscheitel (S') 12 mm vor den Hornhautscheitel (demnach 13,3 mm vor den ersten Augenhauptpunkt), so wird:

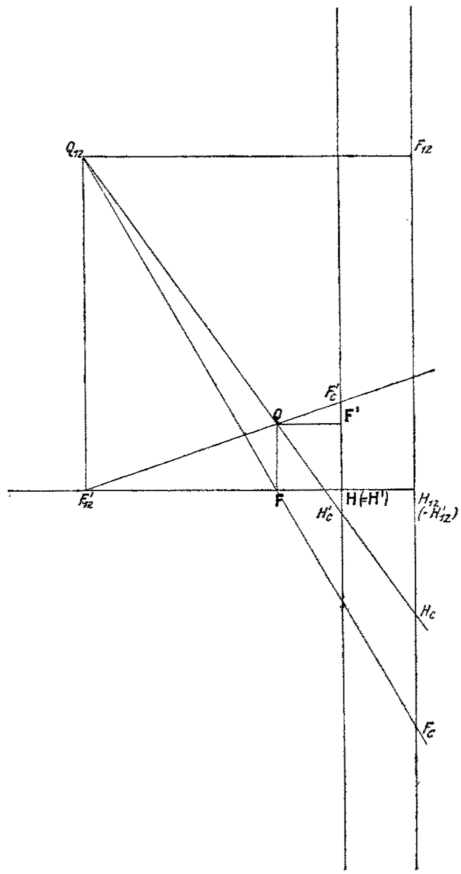


Fig. 4.

Darstellung der Kardinalpunkte des aus Auge und Fernrohrbrille zusammengesetzten Systems ($^1/_2$ der natürl. Grösse).

$$\delta = H_{12}'\mathbf{H} = -87{,}5 + 55{,}0 + 13{,}3 = -19{,}2 \text{ mm}.$$

Wir haben den exceptionellen Fall, dass δ negativ ist ($H_{12}'\mathbf{H}$ wird gegen die Lichtrichtung durchmessen), d. h. H_{12}' liegt hinter den

---

[1]) Das hiervon abweichende Resultat 27,52 mm in der citierten Arbeit v. Rohrs ist ein Druckfehler.

ersten Augenhauptpunkt. Auf der Bildachse des ersten Koordinatensystems haben wir diesmal δ nach links hin abzutragen, um den Nullpunkt für die Darstellung des Augensystems zu finden. Die Brennweite des Auges:

$$\mathfrak{f}_1' = \frac{1}{D} = \frac{1}{58{,}64} = 17{,}06 \text{ mm}.$$

Die Konstruktion wird ganz in der üblichen Weise fertig gestellt. Ein Blick auf die Figur genügt, um die Wirkung der Fernrohrbrille klar zu machen. Die Brennweite der Kombination Auge + Brille (wir messen $H_c' F_c' = +29$ mm) übertrifft die des Auges beträchtlich. Der Brennweite ist aber, wenn ferne Gegenstände in Frage kommen, die Bildgrösse proportional. Das Verhältnis beider Brennweiten in:

$$V_k = \frac{29}{17{,}06} = 1{,}70$$

ist ein Massstab für die Leistung der Fernrohrbrille. In diesem Masse soll die Sehschärfe durch die Fernrohrbrille gesteigert werden.

Recht bemerkenswert ist die Genauigkeit der durch die Konstruktion gewonnenen Resultate, die den rechnerisch erhaltenen Werten ziemlich nahe kommen. So ist der genaue Wert von V_k 1,707.