

Additive Funktionale k -dimensionaler Eikörper I

Von H. HADWIGER in Bern

In der vorliegenden Arbeit wird bewiesen, daß die $k + 1$ MINKOWSKISCHEN Quermaßintegrale im wesentlichen die einzigen additiven, bewegungsinvarianten und stetigen Eikörperfunktionale im k -dimensionalen euklidischen Raum sind. Jedes Funktional mit den drei genannten Eigenschaften muß eine lineare Kombination der $k + 1$ Grundfunktionale MINKOWSKIS sein; dies ist der Inhalt des Hauptsatzes.

Die bekannte Erfahrungstatsache, daß die Quermaßintegrale in zahlreichen klassischen und neueren Formeln der Maßgeometrie konvexer Körper eine unbedingt vorherrschende Rolle spielen, daß zum Beispiel nach den Lehrsätzen der Integralgeometrie die wichtigsten dort gebildeten kinematischen Integrale alle durch immer wieder dieselben Grundfunktionale ausdrückbar werden, findet mit der oben erwähnten Charakterisierung ihre weiter zurückgreifende Erklärung.

Im Falle des gewöhnlichen Raumes ($k = 3$) wurde der entsprechende Satz, wonach die vier fundamentalen Maßzahlen eines Eikörpers, nämlich das Volumen, die Oberfläche, das Integral der mittleren Krümmung und das Integral der Gausschen Krümmung ($= 4\pi$), durch Bewegungsinvarianz, Additivität und Stetigkeit im wesentlichen charakterisiert sind, bereits bewiesen¹⁾.

Weiter sind einige typische Anwendungen gegeben worden, welche belegen, wie sich beispielsweise die integralgeometrischen Formeln auf Grund des nun zur Verfügung stehenden Satzes gewinnen lassen²⁾.

Die Gliederung der vorliegenden Note ist die folgende: In Abschnitt I werden die verschiedenen Eigenschaften eines Eikörperfunktionals zusammengestellt, die innerhalb einer sich auf diese beziehenden axiomatischen Theorie miteinander in Beziehung treten. Speziell werden hier die MINKOWSKISCHEN Quermaßintegrale und ihre Eigenschaften kurz erwähnt.

In Abschnitt II wird der Satz bewiesen, daß das Volumen im wesentlichen das einzige bewegungsinvariante, einfach-additive und stetige Eikörperfunktional ist. Die Aussage liegt tiefer, als dies wohl auf den ersten Blick scheinen mag. Ein Umstand,

¹⁾ H. HADWIGER, Beweis eines Funktionalsatzes für konvexe Körper. Abhandl. Math. Seminar Hamburg 17, 69—76 (1951).

²⁾ H. HADWIGER, Einige Anwendungen eines Funktionalsatzes für konvexe Körper in der räumlichen Integralgeometrie. Monatsh. Math. 54, 345—353 (1950).

den man leicht übersieht, ist dadurch gegeben, daß die Stetigkeit nur bei Variation innerhalb der Klasse der konvexen Körper garantiert ist.

Diese Charakterisierung des Volumens ist der Kern des ganzen zu beweisenden Hauptsatzes.

In Abschnitt III folgt dann die einfache Herleitung des Hauptsatzes auf Grund des soeben erwähnten Volumensatzes.

I. Eikörperfunktionale; Eigenschaften

Es bezeichne $\varphi(A)$ eine über der Klasse der konvexen Körper A des k -dimensionalen euklidischen Raumes eindeutig definierte reellwertige Funktion, d. h. ein *Eikörperfunktional*. Die wichtigsten Eigenschaften, welche solchen Funktionalen zukommen können, sind die folgenden:

$\varphi(A)$ heißt *bewegungsinvariant*, wenn

$$(I) \quad \varphi(A) = \varphi(B) \quad [A \simeq B]$$

gilt, wobei mit der rechts stehenden Bedingung die Kongruenz von A und B symbolisch ausgedrückt ist.

$\varphi(A)$ heißt *additiv*, wenn

$$(II) \quad \varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A + B) + \varphi(AB)$$

gilt, falls ein Eikörper $C = A + B$ durch eine $k - 1$ -dimensionale Schnittebene, welche aus C den uneigentlichen Eikörper AB herauschneidet, in die beiden Eikörper A und B zerlegt ist.

$\varphi(A)$ heißt *stetig*, wenn mit $A_n \rightarrow A \quad (n \rightarrow \infty)$

$$(III) \quad \varphi(A_n) \rightarrow \varphi(A) \quad [n \rightarrow \infty]$$

gilt. Die Konvergenz einer Eikörperfolge stützt sich hierbei auf die übliche Metrik

$$d(A, B) = \inf_{\varrho} [A \subset B_{\varrho}, \quad B \subset A_{\varrho}],$$

wobei A_{ϱ} den äußeren Parallelkörper von A im Abstand ϱ bezeichnet.

$\varphi(A)$ heißt *einfach-additiv*, wenn

$$(IV) \quad \varphi(A) + \varphi(B) = \varphi(A + B)$$

unter den gleichen Bedingungen wie bei (II) gilt.

$\varphi(A)$ heißt *translationsinvariant*, wenn

$$(V) \quad \varphi(A) = \varphi(B) \quad [A \cong B]$$

gilt, wobei mit der rechts stehenden Bedingung symbolisch ausgedrückt wird, daß A und B translationsgleich sind.

$\varphi(A)$ heißt *homogen* vom Grade i , wenn

$$(VI) \quad \varphi(\lambda A) = \lambda^i \varphi(A)$$

gilt, wobei λA den durch eine λ -Dilatation aus A hervorgehenden homothetischen Eikörper bedeutet.

$\varphi(A)$ heißt *monoton*, wenn

$$(VII) \quad \varphi(A) \leq \varphi(B) \quad [A \subset B]$$

gilt.

$\varphi(A)$ heißt *beschränkt*, wenn sich für jede feste Kugel K eine Konstante C so finden läßt, daß

$$(VIII) \quad |\varphi(A)| \leq C \quad [A \subset K]$$

für jeden in K enthaltenen Eikörper A gilt.

Eine axiomatische Theorie der Eikörperfunktionale hat lediglich von solchen allgemein postulierten Eigenschaften auszugehen, um die bestehenden gegenseitigen Zusammenhänge zu erforschen. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit liefern hierzu einen ersten Beitrag. Es handelt sich hierbei in erster Linie um bewegungsinvariante Funktionale. Weitere Beiträge, die sich auch auf translationsinvariante Funktionale beziehen sollen, sind in Aussicht genommen.

Innerhalb der Theorie der konvexen Körper, insbesondere in der BRUNN-MINKOWSKISCHEN Theorie spielen $k + 1$ spezielle Funktionale eine hervorragende Rolle. Es sind dies die *Quermaßintegrale* MINKOWSKIS $W_\nu(A)$ ($\nu = 0, 1, \dots, k$), die auf einfachste Weise durch die STEINER-MINKOWSKISCHE Formel

$$(1) \quad V(A_\varrho) = \sum_0^k \binom{k}{\nu} W_\nu(A) \varrho^\nu$$

für das Volumen des äußeren Parallelkörpers A_ϱ von A eingeführt werden können. Man beachte hier, daß diese wichtige Formel bereits als ein Spezialfall der durch den Hauptsatz (vgl. Einleitung) garantierten Darstellung eines Funktionals als lineare Kombination der Quermaßintegrale aufgefaßt werden kann. Man bestätigt in der Tat leicht, daß das Funktional $\varphi(A) = V(A_\varrho)$ bei festem $\varrho \geq 0$ bewegungsinvariant, additiv und stetig ist.

Durch

$$(2) \quad W_0(A) = V(A), \quad kW_1(A) = F(A)$$

erinnern wir daran, daß die beiden ersten Quermaßintegrale für $\nu = 0, 1$ bis auf einen unwesentlichen Faktor mit dem *Volumen* $V(A)$ und der *Oberfläche* $F(A)$ identisch sind. Für $\nu = 2, 3, \dots, k$ können diese für Eikörper mit regulärem Rand durch höhere Krümmungsintegrale dargestellt werden, indem

$$(3) \quad \binom{k}{\nu} W_\nu(A) = \frac{1}{\nu} \int H_{\nu-1} dF$$

gilt, wobei H_μ die μ -te elementarsymmetrische Funktion der $k - 1$ Hauptkrümmungen auf der Randfläche von A , dF das Oberflächendifferential bezeichnet und die

Integration über die gesamte Randfläche zu erstrecken ist. Im Zusammenhang mit dem bekannten Theorem von GAUSZ (curvatura integra) ist die Feststellung

$$(4) \quad W_k(A) = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(1 + k/2)}$$

besonders erwähnenswert, welche ausdrückt, daß das letzte Quermaßintegral für $\nu = k$ einen nicht vom Eikörper abhängigen festen Wert (= Volumen der k -dimensionalen Einheitskugel) aufweist.

Abschließend erwähnen wir noch die Eigenschaften, welche die MINKOWSKISCHEN Quermaßintegrale aufweisen. Die Funktionale $W_\nu(A)$ sind bewegungsinvariant (eo ipso translationsinvariant), additiv, stetig, homogen vom Grade $k - \nu$, monoton und beschränkt; $W_0(A) = V(A)$ ist außerdem noch einfach-additiv. Die $k + 1$ fundamentalen Funktionale realisieren also alle von uns in Erwägung gezogenen Eigenschaften (I) bis (VIII). Diese Aussagen, welche übrigens auf Grund der STEINER-MINKOWSKISCHEN Volumformel mühelos nachgewiesen werden können, sollen hier als geläufige Tatsachen hingenommen werden.

II. Einfach-additive Funktionale und Volumen

Wir beweisen den folgenden

1. Satz: *Ist $\psi(A)$ ein einfach-additives, bewegungsinvariantes und stetiges Eikörperfunktional, so gilt mit einer geeigneten Konstanten c die Darstellung*

$$(5) \quad \psi(A) = cV(A).$$

Das Volumen ist somit im wesentlichen das einzige Funktional dieser Art; es ist durch die drei Eigenschaften (I), (III) und (IV) charakterisiert.

Beweis: Für $k = 1$ ist die Aussage fast trivial. Im Hinblick auf (I) kann $\psi(A) = f(a)$ gesetzt werden, wo $a = V(A)$ die Länge der Strecke A ist. Mit (IV) folgt $f(a+b) = f(a) + f(b)$, wobei $f(a)$ nach (III) stetig sein muß. Die einzige stetige Lösung der CAUCHYSCHEN Funktionalgleichung ist aber die triviale $f(a) = ca$, so daß $\psi(A) = cV(A)$ folgt, w.z.b.w.

Der Satz sei bereits als richtig erwiesen für alle Dimensionen bis und mit $k - 1$ (Induktive Annahme). Wir betrachten nun Eikörper im k -dimensionalen Raum. Ein uneigentlicher Eikörper liegt in einem Teilraum niedrigerer Dimension. Für eigentliche oder uneigentliche Eikörper A bezeichne fortab $\delta(A)$ die Dimension von A , d. h. die niedrigste Dimension eines Teilraumes, welche für die Einbettung von A noch in Betracht kommt.

Zunächst ist klar, daß für uneigentliche Eikörper A

$$(6) \quad \psi(A) = 0 \quad [\delta(A) \leq k-1]$$

gelten muß. In der Tat folgt mit (IV) $2\psi(A) = \psi(A)$, da ja $A + A = A$ ist.

Wir betrachten jetzt ein konvexes Polyeder P , das im Sinne der Elementargeometrie in endlich viele ebenfalls konvexe Teilpolyeder P_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$) zerlegt ist. Es gilt dann die erweiterte einfache Additivität

$$(7) \quad \psi(P) = \sum_1^n \psi(P_\nu) \quad [P = \sum_1^n P_\nu],$$

wie man mittels Induktion bezüglich n mühelos nachweist. Dabei deckt sich der Fall $n = 2$ mit der Eigenschaft (IV), von der man ausgeht.

Eine einfache Folgerung von (7) in Verbindung mit (I) ist die Aussage

$$(8) \quad \psi(P) = \psi(Q) \quad [P \sim Q],$$

wonach Eipolyeder P und Q , die im Sinne der Elementargeometrie zerlegungsgleich sind (symbolisch durch $P \sim Q$ ausgedrückt), übereinstimmenden Funktionalwert aufweisen müssen.

Es bezeichne jetzt $Z = P \times Q$ einen geraden konvexen Zylinderkörper, der durch MINKOWSKISCHE Addition $P \times Q$ zweier uneigentlicher Eikörper P und Q entsteht, wobei P und Q in zwei orthogonalen komplementären Unterräumen der Dimensionen p und q mit $p + q = k$ liegen, so daß $\delta(P) = p$ und $\delta(Q) = q$ gilt. Der Zylinder Z sei eigentlich, d. h. es sei $1 \leq p, q \leq k - 1$ vorausgesetzt. Für alle Zylinder Z dieser Art gilt nun

$$(9) \quad \psi(Z) = cV(Z),$$

wobei die Konstante c auch nicht von den Dimensionen p und q abhängt. In der Tat: Denken wir uns zunächst Q fest und P in seinem p -dimensionalen Einbettungsraum veränderlich. Leicht erkennt man, daß nun $\bar{\psi}(P) = \psi(P \times Q)$ ein Funktional p -dimensionaler Eikörper ist, das die im 1. Satz vorausgesetzten Eigenschaften aufweist. Nach der induktiven Annahme gibt es eine nur von Q abhängige Konstante $\bar{c} = \bar{c}(Q)$, so daß $\bar{\psi}(P) = \bar{c} \bar{V}(P)$ oder also $\psi(P \times Q) = \bar{c}(Q) \bar{V}(P)$ gilt. Vertauscht man hier P und Q , so folgt schließlich, daß $\psi(P \times Q) = c(p, q) \bar{V}(P) \bar{V}(Q)$ sein muß. Bezeichnet E_r einen r -dimensionalen Einheitswürfel und setzen wir $P = E_p$ und $Q = E_q$, wobei die beiden Würfel in ihren Einbettungsräumen so gewählt werden sollen, daß $E_p \times E_q = E_k$ wird, so folgert man mit $V(E_r) = 1$ aus dem oben erzielten Ergebnis, daß $c(p, q) = \psi(E_k)$ ist und also wegen (I) einen von p und q unabhängigen Wert $c(p, q) = c$ aufweist. Damit ist (9) nachgewiesen, wenn man noch die Volumformel $V(Z) = \bar{V}(P) \bar{V}(Q)$ für Zylinder $Z = P \times Q$ in Rechnung stellt. Wir machen nun den Ansatz

$$(10) \quad \chi(A) = \psi(A) - cV(A),$$

so daß nach (9) für alle eigentlichen konvexen und geraden Zylinderkörper Z

$$(11) \quad \chi(Z) = 0$$

gilt. Man beachte insbesondere, daß das neu eingeführte Funktional $\chi(A)$ im übrigen

noch alle drei im 1. Satz genannten Eigenschaften aufweist, da sich diese bei linearer Kombination der Funktionale erhalten.

Es sollen nun a_ν ($\nu=1, \dots, k$) k paarweise aufeinander orthogonal stehende Vektoren bezeichnen, so daß $(a_\nu, a_\mu) = 0$ für $\nu \neq \mu$ ist. Die Punkte, deren Ortsvektoren durch den Ansatz

$$(12) \quad \xi = \sum_1^k \tau_\nu a_\nu \quad (1 \geq \tau_1 \geq \dots \geq \tau_k \geq 0)$$

gegeben sind, wobei die Parameter bis auf die rechts angeschriebene Bedingung frei variieren können, erfüllen ein Orthogonalsimplex $S = S(a_1, \dots, a_k)$.

Nach einer k -dimensionalen Erweiterung der euklidischen Simplexzerlegung gilt die Formel³⁾

$$(13) \quad (\alpha + \beta) S = \sum_0^k S_p(\alpha, \beta) \quad (0 \leq \alpha, \beta),$$

welche anzeigt, daß das links angeschriebene Orthogonalsimplex im Sinne der Elementargeometrie in die konvexen Teilpolyeder $S_p(\alpha, \beta)$ ($p = 0, \dots, k$) zerlegt wird. Hierbei ist

$$(14) \quad S_0(\alpha, \beta) \cong \beta S; \quad S_k(\alpha, \beta) \cong \alpha S.$$

Erster und letzter Teil sind also selbst wieder mit S homothetische Orthogonalsimplexe. Die übrigen $k - 1$ Teile sind dagegen eigentliche gerade Zylinderpolyeder, welche durch

$$(15) \quad S_p(\alpha, \beta) \cong \alpha S^p \times \beta S^{k-p} \quad [1 \leq p \leq k - 1]$$

näher charakterisiert sind, wenn $S^p = S(a_1, \dots, a_p)$ und $S^{k-p} = S(a_{p+1}, \dots, a_k)$ gesetzt wird.

Es sei nun $\chi(\lambda S) = F(\lambda)$. Mit Rücksicht auf die Zerlegung (13) in Verbindung mit den besonderen Feststellungen (14) und (15) gewinnt man mit Verwendung von (I) und (11) die Funktionalgleichung $F(\alpha + \beta) = F(\alpha) + F(\beta)$. Da wegen (III) $F(\lambda)$ stetig ist, folgt so $F(\lambda) = F(1) \cdot \lambda$ oder also $\chi(\lambda S) = \lambda \chi(S)$. Mit einigen einfachen elementargeometrischen Überlegungen, welche der Bedeutung der Orthogonalsimplexe als universelle Polyederbausteine Rechnung tragen, zieht man mit Verwendung von (IV) den Schluß, daß allgemeiner für Eipolyeder P die Beziehung

$$(16) \quad \chi(\lambda P) = \lambda \chi(P)$$

gilt. Für translationsinvariante, einfach-additive und lineare Eipolyederfunktionale besteht bezüglich der MINKOWSKISCHEN Addition $P \times Q$ beliebiger Eipolyeder das Additionstheorem⁴⁾

$$(17) \quad \chi(P \times Q) = \chi(P) + \chi(Q).$$

³⁾ H. HADWIGER, Zur Inhaltstheorie der Polyeder. *Collectanea Math.* **3**, 137—158 (1950).

⁴⁾ H. HADWIGER, Lineare additive Polyederfunktionale und Zerlegungsgleichheit (erscheint demnächst in der *Math. Z.*). Vgl. insbesondere Satz (13).

Wir betrachten nun m mit einem Eipolyeder P kongruente (gedrehte) Eipolyeder P_ν ($\nu = 1, \dots, m$) und bilden durch mehrfache MINKOWSKISCHE Summation das Eipolyeder

$$(18) \quad Q = \lambda_1 P_1 \times \lambda_2 P_2 \times \dots \times \lambda_m P_m \quad \left[\sum_1^m \lambda_\nu = 1, \lambda_\nu \geq 0 \right].$$

Mit (16) und (17) gewinnt man jetzt

$$(19) \quad \chi(P) = \chi(Q).$$

Aus der Mannigfaltigkeit aller Polyeder Q , die in der Form (18) bei beliebig gewähltem m darstellbar sind, läßt sich eine konvergente Folge Q_n ($n = 1, 2, \dots$) auswählen, so daß $Q_n \rightarrow K$ ($n \rightarrow \infty$) gilt, wobei K eine Kugel bezeichnet, welche die gleiche mittlere Breite besitzt wie P (man beachte, daß alle Q die gleiche mittlere Breite aufweisen⁵). Wegen (III) und (19) folgern wir nun, daß

$$(20) \quad \chi(P) = \chi(K).$$

Beanspruchen wir diese Relation für den Spezialfall, daß P ein Würfel W ist, der mit K gleiche mittlere Breite aufweist, so folgt mit Rücksicht auf (11), wonach $\chi(W) = 0$ sein muß, offenbar $\chi(K) = 0$. So ergibt sich zunächst $\chi(P) = 0$ und nochmals mit (III)

$$(21) \quad \chi(A) = 0$$

für einen beliebigen Eikörper A , da sich ein solcher durch Eipolyeder P beliebig genau approximieren läßt. Es folgt mit (10) schließlich

$$(22) \quad \psi(A) = c V(A),$$

w. z. b. w.

III. Additive Funktionale und Quermaßintegrale MINKOWSKIS

Mit der STEINER-MINKOWSKISCHEM Formel (1) haben wir die Quermaßintegrale $W_\nu(A)$ ($\nu = 0, \dots, k$) eingeführt. Auf Grund des im vorstehenden Abschnittes bewiesenen Volumsatzes gelingt nun die Charakterisierung dieser $k + 1$ fundamentalen Maßzahlen konvexer Körper durch ihre Haupteigenschaften. Es gilt der folgende

2. Satz: *Ist $\varphi(A)$ ein additives, bewegungsinvariantes und stetiges Eikörperfunktional, so gilt mit geeigneten Konstanten c_ν ($\nu = 0, \dots, k$) die Darstellung*

$$(23) \quad \varphi(A) = \sum_0^k c_\nu W_\nu(A).$$

⁵ Das hier herangezogene Kugelungstheorem läßt sich als einfache Folgerung der Tatsache darstellen, daß die Stützfunktion eines konvexen Körpers in einer festen Richtung beim Drehen des Körpers eine ergodische Funktion auf der Drehgruppe wird. Vgl. W. MAAK, Integralmittelwerte von Funktionen auf Gruppen und Halbgruppen (insbesondere Definition 1). J. reine angew. Math. 190, 34—48 (1952).

Die Quermaßintegrale sind somit im wesentlichen die einzigen Funktionale dieser Art; sie sind durch die drei Eigenschaften (I), (II) und (III) charakterisiert. Beweis: Für $k = 1$ ist die Aussage leicht verifizierbar. Mit Rücksicht auf (I) ist der Ansatz $\varphi(A) = f(a)$ erlaubt, wobei $a = V(A)$ ist. Mit (II) schließt man leicht auf das Bestehen der Funktionalgleichung $f(a) + f(b) = f(a+b) + f(0)$, deren Lösung wegen (III) stetig sein muß. Es ergibt sich nur die triviale Lösung $f(a) = f(0) + c_0 a$. Setzt man hier $f(0) = 2 c_1$ und bedenkt, daß im linearen Fall $W_1(A) = 2$ ist, so ergibt sich mit $V(A) = W_0(A)$ die Darstellung $\varphi(A) = c_0 W_0(A) + c_1 W_1(A)$, w. z. b. w.

Der 2. Satz sei bereits bewiesen für alle Dimensionen bis und mit $k - 1$ (Induktive Annahme). Wir betrachten nun Eikörper des k -dimensionalen Raumes, und zwar zunächst uneigentliche Eikörper A , wo $\delta(A) \leq k - 1$ ist. Diese denken wir uns in einem $k - 1$ -dimensionalen Einbettungsraum eingelagert. Durch $\bar{\varphi}(A) = \varphi(A)$ ist offenbar dort ein Eikörperfunktional $\bar{\varphi}(A)$ erklärt, das gewiß die drei im 2. Satz genannten Eigenschaften aufweist. Nach der induktiven Voraussetzung gibt es demnach Konstanten \bar{c}_μ ($\mu = 0, \dots, k - 1$), so daß die Darstellung

$$(24) \quad \bar{\varphi}(A) = \sum_0^{k-1} \bar{c}_\mu \bar{W}_\mu(A)$$

gilt. Der Überstrich bei den Funktionssymbolen soll äußerlich zum Ausdruck bringen, daß die Eikörper als solche ihres $k - 1$ -dimensionalen Trägerraumes aufgefaßt werden und daß sich die Bildung der Quermaßintegrale auf diesen Raum beziehen muß. Auf Grund der Umrechnungsformel

$$(25) \quad W_\nu(A) = \left\{ \frac{\nu \sqrt{\pi}}{k} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{2+\nu}{2}\right) \right\} \bar{W}_{\nu-1}(A) \quad [1 \leq \nu \leq k],$$

die sich leicht aus dem Integral

$$(26) \quad V(A_\rho) = \int_{-a}^a \bar{V}\left(\bar{A} \sqrt{a^2 - \tau^2}\right) d\tau$$

für das Parallelvolumen ableiten läßt, lassen sich die Quermaßintegrale \bar{W}_μ durch die W_ν ausdrücken. Mit (24) gewinnt man so

$$(27) \quad \varphi(A) = \sum_1^k c_\nu W_\nu(A) \quad [\delta(A) \leq k - 1],$$

wobei sich die neuen Konstanten c_ν nach Maßgabe der Umrechnungsformel (25) eindeutig aus den \bar{c}_μ ergeben. Die Darstellung (27) gilt für alle uneigentlichen Eikörper, was im Hinblick auf (I) klar ist.

Durch den Ansatz

$$(28) \quad \psi(A) = \varphi(A) - \sum_1^k c_\nu W_\nu(A)$$

führen wir ein neues, nunmehr für alle Eikörper gültiges Funktional ein. Dieses weist immer noch alle drei im 2. Satz genannten Eigenschaften auf, da sich diese bei linearer Kombination der Funktionale erhalten. Da nun aber für uneigentliche Eikörper A offenbar

$$(29) \quad \psi(A) = 0 \quad [\delta(A) \leq k - 1]$$

ausfällt, gilt an Stelle von (II) sogar (IV), d. h. $\psi(A)$ ist einfach-additiv. Nach dem 1. Satz muß demnach

$$(30) \quad \psi(A) = c_0 V(A) = c_0 W_0(A)$$

gelten. So ergibt sich mit (28)

$$(31) \quad \varphi(A) = \sum_0^k c_\nu W_\nu(A).$$

Unser Satz ist somit auch für die Dimension k richtig. Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Eingegangen am 27. 11. 1952