Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebung seines offenen Kerns

Wilhelm Süss zum 60. Geburtstag gewidmet

Von F. W. Levi in Berlin

Es sei Γ ein abgeschlossener ebener Eibereich und Γ_0 sein offener Kern. Durch viermalige Parallelverschiebung von Γ_0 kann man Γ völlig überdecken. Mit anderen Worten: Man kann Γ in 4 Stücke zerlegen, die sich in den Kern Γ_0 parallel verschieben lassen. Ist Γ ein Parallelogramm, so kann man die Stückzahl 4 nicht unterschreiten[1]). Es soll bewiesen werden, *daß in allen anderen Fällen die Stückzahl* 3 *ausreicht.*

Zum Beweise genügt es zu zeigen, daß der Rand von Γ in 3 abgeschlossene Bögen $P_1 P_2, P_2 P_3, P_3 P_1$ zerlegt werden kann, längs denen kein Paar paralleler Stützgeraden von Γ vorkommt. Ist nämlich $O \in \Gamma_0$, so liefern die 3 Strecken OP_i die gesuchte Zerlegung. Ist Γ ein n-Eck und bezeichnet man den Zuwachs des Stützwinkels an der i-ten Ecke mit $\frac{\pi}{2}\, a_i$, so ist

$$a_1 + \cdots + a_n = 4, \quad 0 < a_i < 2 \tag{1}$$

und man hat (1) unter Aufrechterhaltung der zyklischen Ordnung in drei Teilsummen

$$A_1 = a_{i+1} + \cdots + a_k,\ A_2 = a_{k+1} + \cdots + a_m,\ A_3 = a_{m+1} + \cdots + a_i$$
$$0 < A_j < 2, \quad j = 1, 2, 3 \tag{2}$$

zu zerlegen. Für $n = 3$ ist $A_j = a_j$. Für $n = 4$ bedarf nur der Fall $a_1 = 1 + \alpha$, $a_2 = 1 - \gamma$, $a_3 = 1 + \beta$, $a_4 = 1 - \delta$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$; $\alpha + \beta = \gamma + \delta$ der Erörterung. Ist $\alpha > \delta$, so ist $\beta < \gamma$ und $a_1 + (a_2 + a_3) + a_4$ ist die gewünschte Zerlegung; entsprechend $(a_4 + a_1) + a_2 + a_3$, für $\alpha < \delta$, $\beta > \gamma$. Dagegen gibt es keine Lösung des Problems für $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, d. h. für das Parallelogramm. Ist $n > 4$, so gibt es entweder 3 Zahlen $a_j \geqq 1$ und dann ist jede Aufteilung, die diese Zahlen trennt, eine Lösung, oder es kommt ein Paar zyklisch benachbarter $a_j < 1$ vor, das zusammengefaßt werden kann, und Wiederholung des Verfahrens führt zu einer Zerlegung von (1) in Teilsummen

$$4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4;\ 0 < A_k < 2\,. \tag{3}$$

[1]) Arch. der Math. 5, 476—478 (1954).

Die Reduktion von 4 auf 3 Teilsummen erfolgt nach dem obigen Verfahren, außer, wenn

$$A_1 = A_3 = 1 + \alpha,\ A_2 = A_4 = 1 - \alpha,\ 0 \leq \alpha < 1\,. \tag{4}$$

Da aber mindestens ein A_k mehr als einen Summanden a_j enthält und die Ungleichungen

$$(1-\alpha) + {}^1/_2(1+\alpha) < 2, \quad (1+\alpha) + {}^1/_2(1-\alpha) < 2n + m$$

gelten, kann man durch Veränderung der Zusammenfassung der a_i den Sonderfall (4) ausschließen. Hat $\Gamma\, n$ Ecken und m krumme Bögen, so kann man durch Zerlegung der Bögen $n + m > 4$ erhalten und Γ wie ein $(n+m)$-Eck behandeln, indem man den Zuwachs des Stützwinkels längs jeden Bogens β_j mit $\frac{\pi}{2}\, a_j$ bezeichnet und zuletzt nötigenfalls die Punkte P_i so verschiebt, daß sie nicht auf Ecken fallen, aber (2) erhalten bleibt. Hat Γ unendlich viele Ecken, so sind diese abzählbar. Man kann daher den Rand von Γ in endlich viele abgeschlossene Stücke zerlegen, deren Endpunkte keine Ecken sind und längs denen der Stützwinkel um weniger als π zunimmt. Dadurch wird dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt und die Behauptung ist so allgemein bewiesen.

Die Methode läßt sich nicht auf Eibereiche der Dimension $N > 2$ ausdehnen. Da aber der Vollkegel der Richtungen des N-Raumes sich in $N + 1$ konvexe abgeschlossene Kegel ohne entgegengesetzte Richtungenpaare zerlegen läßt, ergibt sich durch Dualität, daß Eibereichen, deren Oberflächenpunkte nur je eine Stützebene haben, die Stückzahl $N + 1$ zukommt.

Eingegangen am 16. 3. 1955