Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogon unter den einem Eikörper einbeschriebenen Ellipsoiden

Von Ludwig Danzer*) in Oberwolfach, Detlef Laugwitz
und Hanfried Lenz in München

Ist $\mathfrak{M}$ eine beschränkte Punktmenge in einem endlichdimensionalen reellen affinen Raum, deren konvexe Hülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{M})$ einen Innenpunkt besitzt, so kann man mit K. Löwner nach einem (abgeschlossenen) Ellipsoid fragen, das $\mathfrak{M}$ enthält und unter allen derartigen Ellipsoiden minimales Volumen besitzt. Wir zeigen in 1., daß dieses Löwnersche Ellipsoid zu vorgegebener Menge $\mathfrak{M}$ eindeutig bestimmt ist, und daß Gleiches für das volumengrößte Ellipsoid gilt, das sich einer beschränkten, konvexen Menge $\mathfrak{M}$ einbeschreiben läßt. Ein solcher Eindeutigkeitsbeweis ist in voller Allgemeinheit bisher wohl noch nicht veröffentlicht worden. H. Busemann [3] gibt einen Beweis dafür, daß unter allen Ellipsoiden, die $\mathfrak{M}$ umbeschrieben sind und einen vorgegebenen Mittelpunkt haben, genau eines von minimalem Volumen ist. F. Behrend [1] hat für Mengen in der affinen Ebene die Existenz und Eindeutigkeit beider Ellipsen bewiesen. K. Leichtweiss hat im Freiburger Mathematischen Seminar 1954 einen Beweis für die Eindeutigkeit des Löwnerschen Ellipsoids im $\mathfrak{R}^n$ (bei freiem Mittelpunkt) vorgetragen.

Beide Ellipsoide sind offenbar affininvariant mit der Menge $\mathfrak{M}$ verbunden. — In 2. geben wir einige geometrische Anwendungen.

1. Existenz und Eindeutigkeit des Löwnerschen Ellipsoids.

Satz 1. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine abgeschlossene, beschränkte Menge im n-dimensionalen affinen Raum, deren konvexe Hülle $\mathfrak{H}(\mathfrak{M})$ einen Innenpunkt besitze. Dann gibt es unter den $\mathfrak{M}$ umbeschriebenen Ellipsoiden genau eines von minimalem Volumen.*

Beweis. Offenbar genügt es, den Fall zu betrachten, daß $\mathfrak{M}$ eine konvexe, kompakte Menge ist.

a) Existenzbeweis. Die Gleichung eines umbeschriebenen Ellipsoids sei

$$\sum a_{ik}(x_i - m_i)(x_k - m_k) = 1 .$$

Nun genügt es, Ellipsoide zu betrachten, deren Mittelpunkte in einer genügend großen Kugel liegen, und die eine hinreichend kleine Kugel enthalten. Aus der letzteren Eigenschaft folgt, daß die Zahlen a_{ik}, aus der ersteren, daß die m_i sämtlich in beschränkten Bereichen variieren. Damit ergibt sich die Existenz eines volumenkleinsten umbeschriebenen Ellipsoids nach dem Häufungsstellensatz.

---

*) Die Anregung zu meinem Teil an dieser Arbeit empfing ich im Rahmen eines Forschungsstipendiums. Ich möchte daher der Deutschen Forschungsgemeinschaft auch an dieser Stelle meinen Dank aussprechen. Ludwig Danzer.

b) Eindeutigkeitsbeweis bei vorgegebenem Mittelpunkt. Wir wollen zunächst den einfachen Spezialfall erledigen, daß unter den umbeschriebenen Ellipsoiden mit vorgegebenem Mittelpunkt eines mit minimalem Volumen bestimmt werden soll. Nach H. BUSEMANN [3, p. 90] kann man in diesem Falle so vorgehen: Gäbe es mit diesem Mittelpunkt zwei umbeschriebene Ellipsoide minimalen Volumens, dargestellt etwa durch die Gleichungen $F(x) = 0$ beziehungsweise $G(x) = 0$, so würde $\frac{1}{2}[F(x) + G(x)] = 0$ ebenfalls ein umbeschriebenes Ellipsoid mit demselben Mittelpunkt, aber kleinerem Volumen darstellen, woraus sich ein Widerspruch ergäbe.

c) Eindeutigkeitsbeweis im allgemeinen Fall. Wir nehmen wieder an, es gäbe zwei Ellipsoide von kleinstem Volumen V, die der Menge $\mathfrak{M}$ umbeschrieben seien, und wählen das Koordinatensystem im affinen Raum so, daß sich die beiden Ellipsoide darstellen lassen durch:

$$F(x) =_{\mathrm{def}} (x_1 - m_1)^2 + \cdots + (x_n - m_n)^2 - 1 = 0\,,$$
$$G(x) =_{\mathrm{def}} \frac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{x_n^2}{a_n^2} - 1 = 0$$

mit $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ wegen der Volumengleichheit. Die Gleichung

$$\frac{1}{2}[F(x) + G(x)] = 0$$

stellt dann ebenfalls ein umbeschriebenes Ellipsoid dar. Diese Gleichung lautet ausführlich:

$$\frac{(x_1 - d_1)^2}{b_1{}^2} + \cdots + \frac{(x_n - d_n)^2}{b_n{}^2} - A = 0$$

mit

$$A = 1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i^2}{1 + a_i^2} \leqq 1$$

und

$$b_i{}^2 = \frac{2}{1 + \frac{1}{a_i^2}} \leqq a_i\,,$$

letzteres wegen der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel.

Daher ist das Volumen des neuen Ellipsoids höchstens

$$V \cdot \sqrt{A}^{\,n}\, b_1 \ldots b_n \leqq V \cdot b_1 \ldots b_n \leqq V \cdot \sqrt{a_1} \ldots \sqrt{a_n} = V\,.$$

Gleichheit gilt dabei nur im Falle $m_i = 0$, $a_i = 1$ für alle i; dann sind aber die beiden Ellipsoide identisch.

Damit ist der Beweis geführt.

Satz 2. *Es sei $\mathfrak{M}$ eine abgeschlossene, beschränkte, konvexe Menge mit inneren Punkten im n-dimensionalen affinen Raum. Dann gibt es unter den $\mathfrak{M}$ einbeschriebenen Ellipsoiden genau eines von maximalem Volumen.*

Beweis. Der Existenzbeweis kann genau wie oben geführt werden. Demnach bleibt zu zeigen: *Sind $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ zwei verschiedene n-dimensionale Ellipsoide gleichen*

Volumens V, so enthält ihre konvexe Hülle ein Ellipsoid größeren Volumens. O.B.d.A. können wir $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ darstellen durch

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 \quad = \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \ldots \cos\vartheta_{n-1}\,, \\ x_2 \quad = \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \ldots \cos\vartheta_{n-2} \sin\vartheta_{n-1}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} = \cos\vartheta_1 \sin\vartheta_2\,, \\ x_n \quad = \sin\vartheta_1 \end{cases}$$

beziehungsweise durch

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = a_1 \cos\vartheta_1 \ldots \cos\vartheta_{n-1} + c_1\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_n \sin\vartheta_1 + c_n\,. \end{cases}$$

($a_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$; $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$; $x_1, \ldots, x_n$ rechtwinkelige kartesische Koordinaten).

Wir betrachten die Punktepaare auf $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ mit gleichen Parameterwerten $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{n-1}$ und bilden ihre Mittelpunkte:

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+a_1}{2} \cos\vartheta_1 \ldots \cos\vartheta_{n-1} + \dfrac{c_1}{2}\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{1+a_n}{2} \sin\vartheta_1 + \dfrac{c_n}{2}\,. \end{cases}$$

Die Gleichungen (3) stellen ein Ellipsoid dar, das offenbar in der konvexen Hülle von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ liegt. Sein Volumen ist

$$V \cdot \frac{1+a_1}{2} \cdot \frac{1+a_2}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1+a_n}{2} \geqq V \cdot \sqrt{a_1}\sqrt{a_2} \ldots \sqrt{a_n} = V\,,$$

wobei Gleichheit genau für $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ auftritt. In diesem Falle gehen die Gleichungen (2) nach einer Koordinatentransformation über in

$$\begin{cases} x_1 = \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \ldots \cos\vartheta_{n-1} + 2c\,, \quad c > 0\,, \\ x_2 \text{ bis } x_n \text{ wie in (1)}\,. \end{cases}$$

Dann liegt aber das Ellipsoid

$$\begin{cases} x_1 = (1+c) \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 \ldots \cos\vartheta_{n-1} + c\,, \\ x_2 \text{ bis } x_n \text{ wie in (1)} \end{cases}$$

vom Volumen $V \cdot (1 + c)$ in der konvexen Hülle von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$, w.z.b.w.

2. Anwendungen.

2.1. *Jede Gruppe $\mathfrak{G}$ von Affinitäten, die eine offene Punktmenge des n-dimensionalen affinen Raumes über dem reellen, dem komplexen oder dem Quaternionenkörper in eine beschränkte Menge überführt, besitzt einen Fixpunkt. Wählt man diesen als Koordinatenursprung, so läßt die Gruppe eine* HERMITE*sche Form invariant, die sich auf die Normalform*

$$x_1 \bar{x}_1 + \cdots + x_n \bar{x}_n$$

bringen läßt.

(Überstreichen bedeutet dabei im reellen Fall die Identität, im komplexen Fall den Übergang zur konjugiert-komplexen Zahl, im Quaternionenfall die Anwendung des involutorischen Antiautomorphismus $i \to -i$, $j \to -j$, $k \to -k$, wobei 1, i, j, k wie üblich vier Basiselemente des Körpers über dem reellen Zahlkörper mit $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ und $ij = -ji = k, \ldots$ sind.)

Beweis. Von den Ellipsoiden des n-($2n$-, $4n$-)dimensionalen reellen Vektorraumes, der von den Koordinaten (bzw. ihren reellen und imaginären Teilen, bzw. von ihren 1-, i-, j-, k-Komponenten) gebildet wird, bezeichnen wir diejenigen als *zulässig*, die sich in der Form

$$F(x) = \sum_{i,k=1}^{n} (x_i - m_i)\, a_{ik} (\bar{x}_k - \bar{m}_k) - 1 = 0 \quad \text{mit} \quad a_{ik} = \bar{a}_{ki}$$

oder auch

$$F(x) = \sum_{i,k=1}^{n} x_i\, a_{ik}\, \bar{x}_k - \sum_{i=1}^{n} x_i\, c_i - \overline{\sum_{i=1}^{n} x_i\, c_i} - A = 0$$

mit reellem A, positiv definiter HERMITEscher Form $\sum_{i,k=1}^{n} x_i\, a_{ik}\, \bar{x}_k$ und $F(y) < 0$ für mindestens einen Punkt $y = \{y_i\}$ darstellen lassen. Diese Definition ist unabhängig vom Koordinatensystem. Nach Voraussetzung existiert eine beschränkte offene Punktmenge $\mathfrak{M}$, die von der Gruppe in sich überführt wird. Stellen die Gleichungen $F(x) = 0$ und $G(x) = 0$ verschiedene zulässige Ellipsoide $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ dar, die $\mathfrak{M}$ umschließen, so gilt dasselbe für die Gleichung $H(x) = F(x) + G(x) = 0$. Nach dem in 1. durchgeführten Schluß hat dieses Ellipsoid kleineres Volumen als $\mathfrak{E}$, falls $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ volumengleich sind. Also gibt es unter allen $\mathfrak{M}$ enthaltenden Ellipsoiden eines von kleinstem Volumen, und dieses ist eindeutig bestimmt. Da jede Transformation aus $\mathfrak{G}$ die beschränkte Menge $\mathfrak{M}$ in sich überführt, sind alle Transformationen aus $\mathfrak{G}$ volumentreu. Das volumenkleinste umbeschriebene Ellipsoid wird daher von einer Transformation aus $\mathfrak{G}$ wieder in ein solches übergeführt, bleibt also wegen der Eindeutigkeit fest. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, der Mittelpunkt dieses Ellipsoids sei der Koordinatenursprung O. Als Basisvektoren wählen wir n bezüglich dieses Ellipsoids konjugierte Vektoren. Dann nimmt die das Ellipsoid definierende HERMITEsche Form die behauptete Gestalt an, und weil sie mit dem Ellipsoid unter $\mathfrak{G}$ invariant ist, ist damit die Aussage bewiesen.

Eine Teilaussage dieses Ergebnises ist:

Jede beschränkte Gruppe in einem der genannten Räume ist (bei geeigneter Koordinatenwahl) homogen und vollständig reduzibel.

Denn mit einem Unterraum ist auch der zu ihm orthogonale invariant.

Dieses Ergebnis verallgemeinert und verschärft einen früheren Satz [4, Satz 1]; damals wurde nur der reelle Fall behandelt und die Homogenität, die hier folgt, vorausgesetzt.

2.2. *Eine affine Gruppe $\mathfrak{G}$ des reellen Raumes von beschränkter Winkelverzerrung ist einer Ähnlichkeitsgruppe affin äquivalent.* (Dabei heiße $\mathfrak{G}$ von *beschränkter Winkelverzerrung*, wenn die Bilder eines nicht verschwindenden Winkels bei Anwendung einer Folge von Gruppenelementen niemals gegen 0 konvergieren.)

Beweis. Jeder Affinität

$$x_i' = \sum_k a_{ik} x_k + b_i$$

aus $\mathfrak{G}$ ordnen wir die Affinität

$$x_i'' = |\det(a_{ik})|^{\left(-\frac{1}{n}\right)} \cdot \sum_k a_{ik} x_k$$

zu. Diese Affinitäten bilden offenbar eine homogene, volumentreue Gruppe $\mathfrak{G}'$. Die Winkelverzerrung ändert sich beim Übergang von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{G}'$ nicht. Wenn sie beschränkt ist, ist $\mathfrak{G}'$ aber eine beschränkte Gruppe, läßt also nach 2.1. eine definite quadratische Form invariant. Bringen wir diese auf die Normalform, so ist danach $\mathfrak{G}'$ eine Drehungsgruppe und $\mathfrak{G}$ selbst eine Ähnlichkeitsgruppe, wie behauptet.

Notwendig und hinreichend für unbeschränkte Winkelverzerrung ist, daß $\mathfrak{G}'$ die Einheitskugel in Ellipsoide von beliebig großem Verhältnis zwischen größter und kleinster Hauptachse überführt. Dann gibt es aber konjugierte Halbmesser, die einen beliebig kleinen Winkel einschließen, deren Halbstrahlen also aus der Einheitssphäre beliebig benachbarte Punkte ausschneiden. Bei projektiver Deutung folgt daraus:

2.3. *Eine Gruppe $\mathfrak{T}$ von projektiven Transformationen $t_1, t_2, \ldots$ des reellen Raumes mit der Eigenschaft, daß zwei konvergente Punktfolgen $\{t_i A\}$, $\{t_i B\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ für $A \neq B$ niemals denselben Grenzpunkt haben, ist Bewegungsgruppe einer elliptischen Geometrie.*

Beweis. Gäbe es im $(n+1)$-dimensionalen Vektorraum der homogenen Koordinaten zu einer Folge $t_i \in \mathfrak{T}$ einen Winkel α mit $\lim\limits_{i\to\infty} t_i \alpha = 0$, so könnte man eine Teilfolge auswählen, für die die Schenkel der Winkelfolge gegen einen gemeinsamen Grenzstrahl konvergieren, im Widerspruch zur Voraussetzung. (Die Konvergenz im projektiven Raum erkläre man dabei durch die Winkelmetrik der Strahlen durch den Ursprung des $(n+1)$-dimensionalen Koordinatenraumes.)

Entsprechende Sätze gelten auch hier (analog zu 2.1.) im komplexen, beziehungsweise im Quaternionenraum.

2.4. *Eine abgeschlossene, beschränkte Punktmenge $\mathfrak{M}$, die eine transitive Gruppe von Affinitäten gestattet, ist eine Teilmenge einer Ellipsoidfläche.*

Beweis. O.B.d.A. wählen wir die lineare Hülle von $\mathfrak{M}$ als den betrachteten affinen Raum. Das LÖWNERsche Ellipsoid von $\mathfrak{M}$ muß unter der Gruppe invariant sein. $\mathfrak{M}$ hat wegen der Abgeschlossenheit mindestens einen Punkt mit der Oberfläche des Ellipsoids gemeinsam, also liegen wegen der Transitivität alle Punkte von $\mathfrak{M}$ auf der Oberfläche des Ellipsoids, was zu beweisen war.

Damit haben wir ohne jede Differenzierbarkeitsannahme bewiesen, daß die beschränkten W-Flächen Ellipsoide sind[1]).

2.5. *Eine beschränkte n-dimensionale Punktmenge $\mathfrak{M}$, die affine Spiegelungen an Hyperebenen beliebiger Stellung gestattet, ist Vereinigungsmenge von (endlich oder unendlich vielen) Ellipsoidflächen (einer Dimension $k < n$), die konzentrisch und homothetisch sind.*

---

[1]) Wegen des Begriffs der W-Flächen vgl. etwa W. BLASCHKE, Vorl. über Diff.-Geom. Bd. II, § 89.

Beweis: Das Löwnersche Ellipsoid von $\mathfrak{M}$ muß wieder bei allen Spiegelungen fest bleiben; die Spiegelungsachsen müssen daher sämtlich durch seinen Mittelpunkt gehen. Alle Spiegelungsrichtungen müssen bezüglich des Ellipsoids konjugiert zu ihren Spiegelungsachsen sein. Das Ellipsoid ist nach geeigneter Basiswahl als Kugel mit Mittelpunkt O darstellbar, und die affinen Spiegelungen sind dann gewöhnliche Spiegelungen. Als Spiegelungsachsen treten alle Ebenen durch O auf. Weil diese Spiegelungen die volle Drehungsgruppe erzeugen, enthält $\mathfrak{M}$ mit einem Punkt P die ganze durch P gehende Kugelfläche (Mittelpunkt O).

2.6. *Eine beschränkte Punktmenge $\mathfrak{M}$, die affine Spiegelungen in jeder Richtung gestattet, ist Vereinigungsmenge konzentrischer, homothetischer Ellipsoidflächen.*

Der Beweis entspricht dem zu 2.5.

Dies enthält den auf H. Brunn [2] zurückgehenden Satz:

Liegen die Mitten paralleler Sehnen einer konvexen Hyperfläche stets in einer Hyperebene, so ist die Fläche ein Ellipsoid.

2.7. Statt des Löwnerschen Ellipsoids kann man bei den Beweisen dieses Paragraphen auch das größte einbeschriebene Ellipsoid verwenden. — Beide Ellipsoide braucht man für die folgende einfache Anwendung:

Gestattet ein Eikörper eine Gruppe von Affinitäten, die keinen Randpunkt fest läßt, so haben das Löwnersche und das größte einbeschriebene Ellipsoid denselben Mittelpunkt.

Denn die Verbindungslinie verschiedener Mittelpunkte müßte aus der Eikörperoberfläche Fixpunkte der Gruppe ausschneiden.

Literaturverzeichnis

[1] F. Behrend, Über die kleinste umbeschriebene und die größte einbeschriebene Ellipse eines konvexen Bereichs. Math. Ann. **115**, 397–411 (1938).

[2] H. Brunn, Über Kurven ohne Wendepunkte. Habilitationsschrift. München 1889, Kap. IV.

[3] H. Busemann, The geometry of geodesics. New York 1955.

[4] D. Laugwitz, Über die Invarianz quadratischer Formen bei linearen Transformationen und das Raumproblem. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Kl. IIa, 21–25 (1956).

Eingegangen am 9. 6. 1957