Die Integralsätze der affinen Flächentheorie

Von KARL-PETER GROTEMEYER in Göttingen

Nach einer Arbeit von W. SCHERRER[1]) sind die Integralsätze, die in der Theorie der konvexen Körper eine ausgezeichnete Rolle spielen, unter Zusatz von Randintegralen auch für beliebige Flächenstücke gültig. Das Ziel dieser Arbeit ist es nun, zu zeigen, daß sich diese und auch andere Integralformeln in die affine Flächentheorie übertragen lassen. Die gewonnenen Integralformeln lassen sich dazu benutzen, um Aussagen über Fragen der Differentialgeometrie im großen zu machen. Im zweiten Teil der Arbeit werden die Integralformeln auf Flächen mit fester mittlerer Affinkrümmung angewandt. Dadurch werden einige Aussagen im großen für diese Klasse von Flächen gewonnen.

Als Hilfsmittel wird die Tensorrechnung benutzt. Dabei bedeutet:

$A:::_{\|i}$ kovariante Ableitung nach der i-ten Variablen,

$A:::_{|i}$ partielle Ableitung nach der i-ten Variablen.

Falls A ein Skalar ist, fallen die beiden Differentiationsprozesse zusammen, und wir lassen die Striche weg.

1. Die Grundformeln der affinen Flächentheorie[2])

Es sei $\mathfrak{x}(u^i)$ der dreimal stetig differenzierbare Ortsvektor eines Flächenstückes im dreidimensionalen Raum der Scherungsaffinitäten. Setzt man nun

$$L_{ik} = (\mathfrak{x}_{i|k}\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2)\,; \quad \| L_{ik} \| = L\,,$$

so ist der Maßtensor der Fläche gegeben durch

$$g_{ik} = \frac{L_{ik}}{\sqrt[4]{L}}\,; \quad \| g_{ik} \| = g\,.$$

Auf diesen Tensor beziehen wir die kovariante Differentiation und das „*Herunter- und Heraufziehen*" von Indizes.

Der Normalenvektor wird definiert durch:

$$\xi = \frac{[\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2]}{\sqrt[4]{L}} = \frac{[\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2]}{\sqrt[2]{g}}\,. \tag{1}$$

---

[1]) Commentarii Mathematici Helvetici Bd. **19**, 1946/47.

[2]) W. BLASCHKE, Vorl. üb. Diffgeom. Bd. II, Springer-Verlag, Berlin (1923).

Für den Maßtensor gilt jetzt:

$$g_{ik} = (\mathfrak{x}_{i|k}\, \xi) = (\mathfrak{x}_{i|k}\, \xi)\,. \tag{2}$$

Der Vektor der Affinnormalen hat folgende Form:

$$\mathfrak{y} = \tfrac{1}{2}\, g^{ik}\, \mathfrak{x}_{i|k} = \tfrac{1}{2}\, \Delta\mathfrak{x}\,, \tag{3}$$

und die Eigenschaften:

$$(\mathfrak{y}\,\xi) = 1\,; \quad (\mathfrak{y}\,\xi_i) = 0\,; \quad (\mathfrak{y}_i\,\xi) = 0\,. \tag{3a}$$

Als Diskriminantentensor bezeichnet man:

$$\varepsilon_{ik} = (\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_k)\,; \quad -\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}\,; \quad \varepsilon_{12} = \left|\sqrt{g}\right|\,. \tag{4}$$

Weiter gilt dann

$$\varepsilon^{ik} = g^{ie}\, g^{kn}\, \varepsilon_{en}\,; \quad \varepsilon_{ik}\, \varepsilon^{ek} = \delta_{i.}^{\,e}\,. \tag{4a}$$

Ein Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten liefert nach Multiplikation mit geeigneten Vektoren wegen (3a):

$$\xi\, \varepsilon_{ik} = [\mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_k]\,; \quad [\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}_i] = -\varepsilon_{i.}^{\,k}\,\xi_k\,. \tag{5}$$

Zwei symmetrische Tensoren erhalten wir aus

$$\begin{aligned} B_{ik} &= (\mathfrak{y}_{i||k}\,\xi) = -(\mathfrak{y}_i\,\xi_k)\,,\\ A_{ike} &= (\mathfrak{x}_{i||k||e}\,\xi) = -(\mathfrak{x}_{i||k}\,\xi_e)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

A_{ike} erfüllt die sogenannte Apolaritätsbedingung:

$$A_{ike}\, g^{ik} = 0\,. \tag{6a}$$

Die Ableitungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_{i||k} &= A_{ik.}^{\;\;e}\,\mathfrak{x}_e + g_{ik}\,\mathfrak{y}\,,\\ \xi_{i||k} &= -A_{ik.}^{\;\;e}\,\xi_e + B_{ik}\,\xi\,,\\ \mathfrak{y}_i &= B_{i.}^{\,e}\,\mathfrak{x}_e\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Wenn H die mittlere Affinkrümmung und K das affine Krümmungsmaß ist, dann gilt:

$$2\,H = -B_{k.}^{\,k}\,; \quad 2\,K = \varepsilon^{ik}\varepsilon^{rn}\, B_{ir}\, B_{kn}\,. \tag{8}$$

Als affine Stützfunktion bezeichnet man:

$$\varrho = -(\mathfrak{x}\,\xi)\,. \tag{9}$$

Nach W. Blaschke ist dieses auch die Affinentfernung des Ursprungs des Koordinatensystems vom Flächenpunkt $\mathfrak{x}(u^i)$.

Der Integralsatz von Stokes lautet auf unserem Flächenstück, wenn C_k ein stetig differenzierbares Vektorfeld im Gebiete G ist, das von der geschlossenen Kurve $u^i(t)$ begrenzt wird:

$$\iint\limits_{(G)} \varepsilon^{ik}\, C_{k||i}\, do = \oint\!\uparrow C_k\, \dot{u}^k\, dt\,, \tag{10}$$

$$do = \sqrt{g}\; du^1\, du^2\,.$$

2. Die Herleitung der Integralformeln

Als Grundformeln zur Herleitung von Integralsätzen benutzen wir die beiden folgenden Formeln:

$$2\,K\,\xi = \varepsilon^{ik}[\mathfrak{y}_i\mathfrak{y}_k]\,; \quad 2\,H\,\xi = \varepsilon^{ik}[\mathfrak{y}_k\mathfrak{x}_i]\,. \tag{11}$$

Deren Beweis ergibt sich durch Einsetzen der Ableitungsgleichungen:

$$\varepsilon^{ik}[\mathfrak{y}_i\mathfrak{y}_k] = \varepsilon^{ik}\,B_{i\cdot}^{\;e}\,B_k^{\;r}\,\varepsilon_{er}\,\xi = 2\,K\,\xi\,,$$
$$\varepsilon^{ik}[\mathfrak{y}_k\mathfrak{x}_i] = \varepsilon^{ik}\,B_{k\cdot}^{\;e}[\mathfrak{x}_e\mathfrak{x}_i]\,\xi = -\,B_{k\cdot}^{\;k}\,\xi = +\,2\,H\,\xi\,.$$

Die Gleichungen (11) lassen sich auch in der Form schreiben:

$$2\,K\,\xi = \varepsilon^{ik}[\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_k]_{\|i}\,; \quad 2\,H\,\xi = -\,\varepsilon^{ik}\,[\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}_k]_{\|i}\,.$$

Durch Integration unter Verwendung von (10) ergeben sich die beiden „*vektoriellen Integralformeln*“:

$$\iint K\,\xi\,do = \tfrac{1}{2}\oint^{\uparrow}[\mathfrak{y}\dot{\mathfrak{y}}]\,dt\,, \tag{I}$$
$$\iint H\,\xi\,do = -\,\tfrac{1}{2}\oint^{\uparrow}[\mathfrak{y}\dot{\mathfrak{x}}]\,dt\,. \tag{II}$$

Im Falle der Affinminimalflächen ($H = 0$) liefert (II) die Aussage, daß $\int [\mathfrak{y}\,\dot{\mathfrak{x}}]\,dt$ vom Wege unabhängig ist. Daraus folgt dann bekanntlich die Darstellung einer Affinminimalfläche durch einen vorgegebenen Flächenstreifen.

Multiplizieren wir jetzt die Gleichungen (11) mit dem Ortsvektor $\mathfrak{x}$, so erhält man:

$$-\,2\,K\,\varrho = \varepsilon^{ik}(\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_k\mathfrak{x})_{\|i} - \varepsilon^{ik}(\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_k\mathfrak{x}_i)\,, \tag{A}$$
$$-\,2\,H\,\varrho = -\,\varepsilon^{ik}(\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}_k\mathfrak{x})_{\|i} + \varepsilon^{ik}(\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}_k\mathfrak{x}_i)\,. \tag{B}$$

Die Integration läßt dann die Integralformeln entstehen:

$$\iint K\,\varrho\,do = -\,\tfrac{1}{2}\oint^{\uparrow}(\mathfrak{y}\dot{\mathfrak{y}}\mathfrak{x})\,dt + \iint H\,do\,, \tag{III}$$
$$\iint H\,\varrho\,do = \tfrac{1}{2}\oint^{\uparrow}(\mathfrak{y}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x})\,dt + \iint do\,. \tag{IV}$$

Noch eine weitere Integralformel erhält man aus (A), wenn wir die Gleichung mit ϱ multiplizieren:

$$2\,H\,\varrho = \varepsilon^{ik}\,\{\varrho(\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_k\mathfrak{x})\}_{\|i} + 2\,K\,\varrho^2 - \varepsilon^{ik}(\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_k\mathfrak{x})\,\varrho_i\,.$$

Aus (7c) und (5b) folgt nun:

$$[\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_k] = -\,\varepsilon^{re}B_{kr}\,\xi_e\,,$$

daher

$$2\,H\,\varrho = \varepsilon^{ik}\,\{\varrho(\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_k\mathfrak{x})\}_{\|i} + 2\,K\,\varrho^2 + \varepsilon^{ik}\,\varepsilon^{re}\,B_{kr}\,\varrho_i(\mathfrak{x}\,\xi_e)\,. \tag{C}$$

Nach (1) und (9) ist

$$\varrho_e = -\,(\mathfrak{x}\,\xi_e)\,.$$

Wenn $\overline{B}^{ik}$ der zu B_{ik} inverse Tensor ist, so gilt $\overline{B}^{ie} = K^{-1}\,\varepsilon^{ik}\,\varepsilon^{er}\,B_{kr}$. Durch Integration entsteht die Formel aus (C):

$$\iint H\,\varrho\,do = \tfrac{1}{2}\oint\!\uparrow \varrho(\mathfrak{y}\,\dot{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{x})\,dt + \iint\{\varrho^2 + \tfrac{1}{2}\,\overline{B}^{ie}\,\varrho_i\varrho_e\}\,K\,do\,. \qquad \text{(V)}$$

Es seien jetzt noch zwei sehr einfache Integralformeln abgeleitet, die aus den Gleichungen (5a) und der (durch Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten zu beweisenden) Formel:

$$\mathfrak{y}\,\varepsilon_{ik} = [\xi_i\,\xi_k] \qquad \text{(D)}$$

unmittelbar folgen.

(5a) ergibt:

$$2\,\xi = \varepsilon^{ik}[\mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_k] \text{ und } \xi = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^{ik}[\mathfrak{x}\mathfrak{x}_k]_{||i}\,,$$

also

$$\iint \xi\,do = \tfrac{1}{2}\oint\!\uparrow [\mathfrak{x}\dot{\mathfrak{x}}]\,dt\,. \qquad \text{(VI)}$$

(D) ergibt:

$$\mathfrak{y} = \tfrac{1}{2}\,\varepsilon^{ik}[\xi\,\xi_k]_{||i}\,.$$

Daher erhalten wir für den Affinnormalenvektor die Integralformel:

$$\iint \mathfrak{y}\,do = \tfrac{1}{2}\oint\!\uparrow [\xi\dot{\xi}]\,dt\,. \qquad \text{(VII)}$$

Die „*vektoriellen Integralsätze*" dürfen natürlich noch mit konstanten Vektoren multipliziert werden. Dabei müssen sich natürlich die konstanten Vektoren kontragredient zu den auftretenden vektoriellen Integranden transformieren.

Die vorstehenden Integralformeln haben eine ähnliche Form wie die der euklidischen Flächentheorie. An die Stelle des einen Normaleneinheitsvektors treten hier zwei Vektoren, die zueinander reziprok polar sind. Die Rolle der Stützfunktion wird hier von der Affinentfernung ϱ übernommen.

3. Eine Anwendung der Integralformeln

Es soll der folgende Satz der affinen Flächentheorie im großen bewiesen werden:

Eine Eifläche mit fester mittlerer Affinkrümmung H ist notwendig eine Affinsphäre.

Dieser Satz, der eine Verallgemeinerung des Satzes von H. Liebmann darstellt, daß nämlich die Kugel die einzige Eifläche mit fester mittlerer Krümmung ist, stammt von W. Blaschke. Er beweist diesen Satz in seinem schon zitierten Lehrbuch über affine Differentialgeometrie, indem er nachweist, daß die partielle Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2}\,g^{ik}\,\varrho_{i||k} + H\,\varrho = -1$$

für die affine Stützfunktion ϱ als einzige auf der ganzen Eifläche stetige Lösung nur die Funktion

$$\varrho = -\frac{1}{H} + (\mathfrak{c}\,\xi)\,, \quad \mathfrak{c} = \text{const.}$$

besitzt. Beim Nachweis dieser Tatsache wird von der infinitesimalen Starrheit der Eiflächen, die ja mit Hilfe von assoziierten Flächen affininvariant formuliert werden kann, Gebrauch gemacht.

Wir benutzen beim Beweis dieses und verwandter Sätze die beiden Integralformeln (III) und (IV):

$$\iint H\,do = \tfrac{1}{2}\oint\!\uparrow (\mathfrak{y}\,\dot{\mathfrak{y}}\,\mathfrak{x})\,dt + \iint K\,\varrho\,do\,,$$
$$\iint H\,\varrho\,do = \tfrac{1}{2}\oint\!\uparrow (\mathfrak{y}\,\dot{\mathfrak{x}}\,\mathfrak{x})\,dt + \iint do\,.$$

Die zweite Formel wird mit H multipliziert, und wegen $H = \text{const.}$ ergibt die anschließende Addition beider Formeln:

$$\iint \{H^2 - K\}\,\varrho\,do = \tfrac{1}{2}\oint\!\uparrow [\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}]\cdot\{\dot{\mathfrak{y}} + H\,\dot{\mathfrak{x}}\}\,dt\,. \tag{a}$$

Darin ist $H^2 - K$ niemals negativ; denn wenn R_1 und R_2 die affinen Hauptkrümmungsradien sind, so gilt:

$$H^2 - K = \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 \geq 0\,.$$

Für die geschlossenen Flächen vom Geschlecht Null lautet jetzt die Formel (a):

$$\iint \{H^2 - K\}\,\varrho\,do = 0\,. \tag{b}$$

Liegt nun speziell eine Eifläche vor, so ist die affine Stützfunktion nicht identisch gleich Null. Legen wir den Ursprung des Koordinatensystems in das Innere der Eifläche, so hat die Stützfunktion[3]) stets ein Vorzeichen. Aus der Gleichung (b) folgt dann aber, da der Integrand nirgends sein Zeichen ändert, das Verschwinden von $H^2 - K$. Nun ist aber

$$H^2 - K = 0$$

kennzeichnend für Affinsphären. Damit ist der Satz von BLASCHKE bewiesen.

Die Gleichung (b) gestattet sofort den Beweis des etwas allgemeineren Satzes:

Eine dreimal stetig differenzierbare, geschlossene Fläche vom Geschlecht Null mit fester mittlerer Affinkrümmung H und einer Stützfunktion, die nirgends ihr Vorzeichen ändert, ist notwendig eine Affinsphäre.

---

[3]) Zwischen der „*affinen Stützfunktion*" ϱ und der „MINKOWSKI*schen Stützfunktion*" P besteht der Zusammenhang:

$$\varrho = S^{-\frac{1}{4}}\cdot P\,;$$

darin ist S die GAUSZsche Krümmung der Fläche.

Eine direkte Anwendung des Integralsatzes (a) ist der folgende Satz:

Ein dreimal stetig differenzierbares Flächenstück mit fester mittlerer Affinkrümmung H und einer Stützfunktion ϱ, die nirgends in einem von der Kurve $\mathfrak{K}$ begrenzten Gebiet der Fläche ihr Vorzeichen ändert, ist in diesem Gebiet ein Stück einer Affinsphäre, wenn die Kurve $\mathfrak{K}$ aus affinsphärischen Punkten besteht, d. h. wenn längs der Kurve

$$\dot{\mathfrak{y}} = -H\,\dot{\mathfrak{x}} \qquad \textit{gilt.}$$

Man kann diesen Satz auch so formulieren, daß durch einen affinsphärischen, geschlossenen Flächenstreifen nur die Affinsphären unter allen Flächen mit fester mittlerer Affinkrümmung hindurchgehen.

Der Beweis des Satzes ist nach der Formel (a) sofort geführt. Durch Anwendung von (a) auf das durch $\mathfrak{K}$ berandete Flächenstück erhalten wir wieder nur die Gleichung $\iint \{H^2 - K\}\,\varrho\,do = 0$, aus der die Behauptung folgt.

Wenden wir jetzt noch die Integralformel (IV) auf geschlossene Flächen an, und bezeichnen wir mit $\overline{H}$ bzw. $\underline{H}$ den größten bzw. kleinsten Wert, den die Funktion H auf der Fläche annimmt, so gelten für alle geschlossenen, dreimal stetig differenzierbaren Flächen die „*isoperimetrischen Ungleichungen*“:

$$6\,V\,\overline{H} \geq O \quad \text{bzw.} \quad 6\,V\,\underline{H} \leq O\,.$$

Darin bedeutet V das Affinvolumen und O die Affinoberfläche der Flächen:

$$V = \tfrac{1}{6}\iint \varrho\,do\,; \quad O = \iint do\,.$$

Lassen wir unter allen geschlossenen Flächen nur solche zur Konkurrenz zu, die eine affine Stützfunktion besitzen, die nirgends ihr Vorzeichen ändert, so können wir sagen:

In den Ungleichungen $6\,V\,\overline{H} \geq O$ bzw. $6\,V\,\underline{H} \leq O$ steht das Gleichheitszeichen dann und nur dann, falls die Fläche eine Affinsphäre ist.

Der Beweis folgt durch die Integralformel (IV) und des vorangehenden Satzes:

Es gelte etwa

$$6\,V\,\underline{H} = O\,, \quad \text{d. h.} \quad \iint \underline{H}\,\varrho\,do = \iint do\,.$$

Nach (IV) ist dann aber

$$\iint H\,\varrho\,do = \iint do\,,$$

daher

$$\iint \{H - \underline{H}\}\,\varrho\,do = 0\,, \quad H - \underline{H} \geq 0\,.$$

Nun ändert die Funktion ϱ nirgends ihr Zeichen. Also ist

$$H = \underline{H} = \text{const.}$$

Nach einem der vorangehenden Sätze ist dann die Fläche eine Affinsphäre.

(Eingegangen am 7. 8. 1951)