Über die FINSLER-Räume mit $A_i = 0$

Von ARNO DEICKE in Freiburg i. Br.

In einem n-dimensionalen FINSLER-Raum mit der Längenmessung

$$s = \int L(x^i, \dot{x}^i)\, dt$$

(L positiv homogen 1. Grades in den $\dot{x}^i$) führt man nach E. CARTAN [1] zu jedem Linienelement einen Grundtensor

$$g_{ik} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k}$$

ein, außerdem den Tensor

$$A_{ikl} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ik}}{\partial \dot{x}^l} L .$$

$A_{ikl} = 0$ kennzeichnet die RIEMANNschen Räume; die Räume, welche die schwächere Bedingung

(1) $$A_i = A_{ik}{}^k = L \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \log \sqrt{g} = 0\,, \quad g = \det(g_{ik})$$

erfüllen, werden in der Literatur mehrfach als spezielle Klasse von FINSLERschen Räumen aufgeführt. Es soll hier gezeigt werden, daß diese Räume mit den RIEMANNschen Räumen identisch sind, falls überall $L(x, \dot{x}) > 0$, die Bogenlänge einer Kurve also stets positiv ist; außerdem soll L hinreichend oft differenzierbar sein.

Die Bedingung $L > 0$ bedeutet, daß die Indikatrixfläche $L(x_0, \dot{x}) = 1$ im Tangentialraum der $\dot{x}^i$, der zu einem festen Punkt x_0 gehört, eine geschlossene Fläche ist; denn es gibt dann in jeder Richtung vom Ursprung des Tangentialraumes aus genau einen Punkt mit $L = 1$. Aus der Bedingung (1), also aus $g = \text{const.}$ für $x^i = x^i_0$, folgt, daß die Indikatrix eine Affinsphäre ist. Denn die Fläche 2. Ordnung im Tangentialraum

(2) $$g_{ik}(x_0, \dot{x}_0)\, \dot{x}^i \dot{x}^k = 1$$

(oskulierende Indikatrix) berührt die Indikatrix in 2. Ordnung in dem Punkte, der durch die Richtung $\dot{x}_0$ bestimmt wird; dort haben daher beide Flächen denselben Affinabstand A vom Ursprung, den man definieren kann durch

(3) $$A = \frac{p}{\sqrt[n+1]{|K|}}$$

(p = Abstand der Tangentenebene vom Ursprung, K = GAUSZsche Krümmung.)

Bei einer Quadrik im R_n mit der Gleichung (2) ist aber der (konstante) Affinabstand vom Ursprung gegeben durch

(4) $$A^{n+1} = \frac{p^{n+1}}{K} = \frac{1}{g}, \quad g = \det(g_{ik}).$$

wie man leicht nachrechnet. Eine Indikatrix mit $g = \text{const.}$ ist also eine Affinsphäre, da man die eigentlichen Affinsphären als Flächen mit konstantem Affinabstand von einem festen Punkt definieren kann.

Man sieht auch sofort, daß jede geschlossene Affinsphäre eine Eifläche mit überall positiver Krümmung ist; denn jede geschlossene Fläche hat mindestens einen Punkt, wo sie konvex gekrümmt ist (nämlich den Punkt mit maximalem Abstand vom Ursprung). Dort ist die oskulierende Quadrik ein Ellipsoid, also die quadratische Form auf der linken Seite von (2) positiv definit (und $g > 0$). Wegen $g = \text{const.}$ muß dann dasselbe für alle Punkte der Affinsphäre gelten, da bei einer Änderung der Signatur der quadratischen Form Nullstellen von g auftreten müßten. Wir brauchen daher nur zu beweisen, daß jede affinsphärische Eifläche im R_n ein Ellipsoid ist; dann folgt sofort, daß jeder Finsler-Raum mit $A_i = 0$ und $L > 0$ ein Riemannscher Raum ist. Dieser Satz über die affinsphärischen Eiflächen ist für den R_3 von W. Blaschke ([2], § 74) bewiesen worden; der eine der beiden von Blaschke gegebenen Beweise läßt sich auf n Dimensionen verallgemeinern. Der verallgemeinerte Beweis sei hier kurz skizziert.

Für eine n-dimensionale Hyperfläche $\mathfrak{x}(u^1, \ldots, u^n)$ im R_{n+1} führt Blaschke ([2], § 65) zunächst die Determinanten

$$A_{ik} = \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial u^i \partial u^k}, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^1}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u^n}\right]$$

ein und definiert damit einen gegen inhaltstreue Affinitäten invarianten Fundamentaltensor G_{ik} durch

(5) $$G_{ik} = A_{ik} \cdot |A|^{-\frac{1}{n+2}}, \qquad A = \det(A_{ik});$$
$$G = \det G_{ik} = A \cdot |A|^{-\frac{n}{n+2}}.$$

Das Vorzeichen hängt von der Numerierung der Parameter u^i ab; bei konvexen Flächen kann man diese stets so wählen, daß die quadratische Grundform positiv definit wird, also auch $G > 0$, $A > 0$ ist. Es existiert dann auch der inverse kontravariante Fundamentaltensor G^{ik}. Sind $\mathfrak{x}_{ik}$ die kovarianten 2. Ableitungen in Bezug auf den Fundamentaltensor (5), so heißt

(6) $$\mathfrak{y} = \frac{1}{n} G^{ik} \mathfrak{x}_{ik}$$

der Affinnormalvektor der Fläche $\mathfrak{x}$. Es gelten Ableitungsgleichungen der Form

(7) $$\mathfrak{y}_i = B_i^k \mathfrak{x}_k.$$

Für den Affinabstand gilt

$$A = \frac{[\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n]}{[\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n]}; \tag{8}$$

man rechnet leicht nach, daß dies mit der Definition (3) übereinstimmt. Für $A = \text{const.}$ findet man mit Hilfe der Ableitungsgleichungen, daß $\mathfrak{x} = A\,\mathfrak{y}$ ist, die Affinsphäre ist also zu ihrem Affinnormalenbild homothetisch ([2], § 76), und für die mittlere Affinkrümmung

$$H = -\frac{1}{n} B_k^{\,k} \tag{9}$$

gilt

$$H = \frac{1}{A} = \text{const.}$$

Für das affin-isoperimetrische Problem, d. h. die Aufgabe, die Affinoberfläche

$$\Omega = \int \ldots \int \sqrt{|G|}\, du^1 \ldots du^n = \int \ldots \int [\mathfrak{y}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n]\, du^1 \ldots du^n \tag{10}$$

einer Eifläche mit gegebenem Volumen zu einem Extremum (Maximum) zu machen, findet man ganz analog wie beim gewöhnlichen isoperimetrischen Problem mit Hilfe der Ableitungsgleichungen $H = \text{const.}$ als notwendige und hinreichende Bedingung das Verschwinden der ersten Variation, jedenfalls unter Voraussetzung hinreichender Differenzierbarkeit der Fläche und der zulässigen Variationen (es genügt, die Fläche als viermal und die Variationen als dreimal stetig differenzierbar vorauszusetzen). Die geschlossenen Affinsphären sind daher Extremalflächen des affin-isoperimetrischen Problems; es bleibt zu beweisen, daß nur bei den Ellipsoiden die erste Variation verschwindet, diese also die einzigen Extremalflächen sind. Dies zeigt man nach BLASCHKE durch ein Symmetrisierungsverfahren.

$\mathfrak{E}$ sei eine Eifläche mit $H = \text{const.}$ In einem beliebigen affinen Koordinatensystem im R_{n+1} kann man $x^1, \ldots, x^n$ als Parameter auf $\mathfrak{E}$ wählen, wenn man $\mathfrak{E}$ durch die Schattengrenze bei Lichteinfall in x^{n+1}-Richtung in eine obere und eine untere Hälfte teilt mit den Darstellungen

$$\begin{aligned} x^{n+1} &= -\varphi(x^1, \ldots, x^n), \\ \overline{x}^{n+1} &= \quad \psi(x^1, \ldots, x^n). \end{aligned} \tag{11}$$

Die Affinoberfläche läßt sich nach (5) und (10) auch darstellen durch

$$\Omega = \int \ldots \int \sqrt[n+2]{|\Lambda|}\, du^1 \ldots du^n. \tag{12}$$

Bei der Darstellung (11) wird

$$\begin{aligned} \Lambda_{ik} &= (-1)^{n+1} \varphi_{ik}, \\ \overline{\Lambda}_{ik} &= (-1)^n \psi_{ik}, \end{aligned} \qquad \left(\varphi_{ik} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k}\right)$$

also

$$(13)\qquad \Omega = \int \ldots \int \left(\sqrt[n+2]{|A|} + \sqrt[n+2]{|\overline{A}|} \right) dx^1 \ldots dx^n =$$

$$= \int \ldots \int \left(\sqrt[n+2]{\det(\varphi_{ik})} + \sqrt[n+2]{\det(\psi_{ik})} \right) dx^1 \ldots dx^n .$$

Wegen der Konvexität der Fläche sind die quadratischen Formen $\varphi_{ik}\, dx^i\, dx^k$, $\psi_{ik}\, dx^i\, dx^k$ bei der Vorzeichenwahl nach (11) positiv definit, die Determinanten also positiv.

Betrachten wir nun die Schar von Eiflächen $\mathfrak{E}(\vartheta)$, die gegeben ist durch

$$(14)\qquad \left.\begin{aligned} x^{n+1}(\vartheta) &= -(1-\vartheta)\,\varphi - \vartheta\psi \\ \overline{x}^{n+1}(\vartheta) &= (1-\vartheta)\,\psi + \vartheta\varphi \end{aligned}\right\}\ 0 \leqq \vartheta \leqq 1 ,$$

so umschließen diese alle dasselbe Volumen, da $x^{n+1} - \overline{x}^{n+1}$ von ϑ unabhängig ist. Es ist zu zeigen, daß die Affinoberfläche

$$(15)\qquad \Omega(\vartheta) = \int \ldots \int \left(\sqrt[n+2]{\det\,[(1-\vartheta)\,\varphi_{ik} + \vartheta\psi_{ik}]} + \right.$$

$$\left. + \sqrt[n+2]{\det\,[(1-\vartheta)\,\psi_{ik} + \vartheta\,\varphi_{ik}]} \right) dx^1 \ldots dx^n$$

stets eine in $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ streng konvexe Funktion ist, also $\Omega''(\vartheta) < 0$, ausgenommen den Fall $\varphi_{ik} \equiv \psi_{ik}$, in dem $\Omega(\vartheta) = \Omega$ konstant ist. Wegen $\Omega(\vartheta) = \Omega(1-\vartheta)$ haben wir $\Omega'(0) = -\Omega'(1)$; nach dem oben gezeigten gilt wegen $H = \text{const.}$ für $\mathfrak{E}(0)$

$$\Omega'(0) = \Omega'(1) = 0,$$

da die Variation (14) die notwendigen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfüllt, wie wir weiter unten zeigen werden. Dann kann aber nicht $\Omega'' < 0$ in $0 \leqq \vartheta \leqq 1$ sein. Haben wir obige Behauptung bewiesen, so folgt daraus $\varphi_{ik} - \psi_{ik} = 0$, d. h. $\psi - \varphi = x^{n+1} + \overline{x}^{n+1}$ ist eine lineare Funktion der x^i; die Sehnenmitten $\frac{1}{2}(x^{n+1} + \overline{x}^{n+1})$ liegen also in einer Ebene. Dies muß für jede Schar paralleler Sehnen gelten, da die Wahl der x^{n+1}-Achse beliebig ist; diese Eigenschaft charakterisiert aber bekanntlich die Ellipsoide. Die Extremalflächen können dann also nur Ellipsoide sein, wie behauptet wurde.

Um die strenge Konvexität von $\Omega(\vartheta)$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß in jedem Punkt, in dem nicht $\varphi_{ik} = \psi_{ik}$ ist, die Funktion

$$f(\vartheta) = \sqrt[n+2]{\det\,[(1-\vartheta)\,\varphi_{ik} + \vartheta\,\psi_{ik}]}$$

streng konvex ist für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$; denn es ist nach (15)

$$\Omega(\vartheta) = \int \ldots \int \,[f(\vartheta) + f(1-\vartheta)]\, dx^1 \ldots dx^n .$$

Aus $f''(\vartheta) = f''(1-\vartheta) < 0$ für $\varphi_{ik} \neq \psi_{ik}$ folgt daher $\Omega''(\vartheta) < 0$ für $\varphi_{ik} \neq \psi_{ik}$. Man kann aber bekanntlich (für einen festen Punkt x^i) zwei definite quadratische Formen

$\varphi_{ik}\,dx^i\,dx^k$, $\psi_{ik}\,dx^i\,dx^k$ durch eine geeignete Koordinatentransformation stets beide gleichzeitig auf die rein quadratische Form bringen; a_i und b_i seien die Diagonalglieder der so transformierten Matrizen φ_{ik} bzw. ψ_{ik}. Die Funktion

$$\bar{f}(\vartheta) = \prod_{i=1}^{n} [(1-\vartheta)\,a_i + \vartheta\, b_i]^{\frac{1}{n+2}} = \prod_{i=1}^{n} [a_i + \vartheta(b_i - a_i)]^{\frac{1}{n+2}}$$

stimmt dann bis auf einen konstanten positiven Faktor (das Quadrat der Transformationsdeterminante) mit $f(\vartheta)$ überein. Wegen der positiven Definitheit der beiden quadratischen Formen ist $a_i > 0$, $b_i > 0$, also auch $\bar{f}(\vartheta) > 0$ für $0 \leqq \vartheta \leqq 1$. Durch logarithmische Ableitung folgt mit der SCHWARZschen Ungleichung

$$\bar{f}' = \frac{1}{n+2} \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i - a_i}{a_i + \vartheta\,(b_i - a_i)}\,\bar{f}\,,$$

$$\bar{f}'' = \left[-\frac{1}{n+2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i - a_i}{a_i + \vartheta\,(b_i - a_i)}\right)^2 + \frac{1}{(n+2)^2} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i - a_i}{a_i + \vartheta\,(b_i - a_i)}\right)^2\right] \bar{f}$$

$$\leqq -\frac{2}{(n+2)^2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i - a_i}{a_i + \vartheta\,(b_i - a_i)}\right)^2 \bar{f} < 0 \quad \text{in} \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 1$$

falls nicht $b_i = a_i$ für alle i, also $\varphi_{ik} = \psi_{ik}$. Mit $\bar{f}''$ ist auch $f'' < 0$ und damit $\Omega'' < 0$ für $\varphi_{ik} \not\equiv \psi_{ik}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Es ist noch der Beweis nachzutragen, daß die Variation (14) auch an der Schattengrenze die Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfüllt. Wir zeigen:

Ist eine Eifläche $\mathfrak{E}$ mit nirgends verschwindender Krümmung $(k+1)$-mal stetig differenzierbar, so sind die variierten Eiflächen (14) k-mal stetig differenzierbar $(k \geqq 1)$.

Für Punkte außerhalb der Schattengrenze ist dies trivial. In der Umgebung eines Punktes der Schattengrenze kann man stets die Fläche durch eine der n ersten Koordinaten als Funktion der anderen darstellen, etwa (bei passender Numerierung) durch

$$x^1(x^2, \ldots, x^{n+1})\,,$$

wobei diese Funktion nach Voraussetzung von der Klasse C^{k+1} ist, d. h. sie ist $(k+1)$-mal stetig differenzierbar. Die Schattengrenze ist gegeben durch

(16) $$\frac{\partial x^1}{\partial x^{n+1}} = 0\,.$$

Es ist $\frac{\partial^2 x^1}{(\partial x^{n+1})^2} \neq 0$, da sonst die Krümmung der Fläche verschwinden würde; daher ist (16) nach x^{n+1} auflösbar, die Schattengrenze ist darstellbar durch

$$x_0^{n+1}(x^2, \ldots, x^n),$$

wobei x_0^{n+1} von der Klasse C^k in $x^2, \ldots, x^n$ ist.

Ist $y(x)$ eine Funktion der Klasse C^{k+1} $(k \geqq 1)$ mit $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) \neq 0$, so ist

$$z(x) = \operatorname{sign}(x - x_0)\sqrt{y(x)}$$

von der Klasse C^k in einer Umgebung von x_0. Man zeigt dies etwa durch Benutzung der Taylor-Formel mit Restglied

$$y(x) = \sum_{\nu=2}^{k} \frac{y^{(\nu)}(x_0)}{\nu!}(x - x_0)^\nu + R(x), \qquad R(x_0) = R'(x_0) = \ldots = R^k(x_0) = 0,$$

indem man z in der Form

$$z(x) = \sum_{\nu=1}^{k-1} a_\nu (x - x_0)^\nu + r(x)$$

ansetzt und die a_ν durch Gleichsetzen der Koeffizienten von $(x - x_0)^\nu$, $2 \leqq \nu \leqq k$ in z^2 und y bestimmt. Für r erhält man dann eine quadratische Gleichung, und man bestätigt leicht, daß eine der beiden Wurzeln der Klasse C^k angehört und die Bedingungen $r = r' = \ldots = r^{(k-1)} = 0$ für $x = x_0$ erfüllt. Die Koeffizienten a_ν sind von der Form

$$a_\nu = \frac{H(y''(x_0), \ldots, y^{(\nu+1)}(x_0))}{\sqrt{y''(x_0)}^{\,2\nu-3}},$$

wobei H eine ganze rationale Funktion ist.

Setzen wir nun

$$z(x^2, \ldots, x^{n+1}) = \operatorname{sign}\left[x^{n+1} - x_0^{n+1}(x^2, \ldots x^n)\right] \sqrt{x^1(x^2, \ldots, x^{n+1}) - x^1(x^2, \ldots, x^n, x_0^{n+1}(x^2, \ldots, x^n))}$$

so sind für festes $x^2, \ldots, x^n$ für z als Funktion von x^{n+1} die obigen Bedingungen erfüllt, z ist daher nach x^{n+1} k-mal stetig differenzierbar, und für die Ableitungen an der Stelle x_0^{n+1} gilt

$$\frac{\partial^\nu z}{(\partial x^{n+1})^\nu} = \nu! \left[H\left(\frac{\partial^2 x^1}{(\partial x^{n+1})^2}, \ldots, \frac{\partial^{\nu+1} x^1}{(\partial x^{n+1})^{\nu+1}}\right) \left(\frac{\partial^2 x^1}{(\partial x^{n+1})^2}\right)^{-\frac{2\nu-3}{2}} \right]_{x^{n+1} = x_0^{n+1}}.$$

Da $\frac{\partial^{\nu+1} x^1}{(\partial x^{n+1})^{\nu+1}} (x^2, \ldots, x^n, x_0^{n+1}(x^2, \ldots, x^n))$ von der Klasse $C^{k-\nu}$ in $x^2, \ldots, x^n$ ist, gilt dies auch für $\frac{\partial^\nu z}{(\partial x^{n+1})^\nu}$, d. h. z ist von der Klasse C^k in $x^2, \ldots, x^{n+1}$. Wegen $\frac{\partial z}{\partial x^{n+1}} \neq 0$ ist dann auch x^{n+1} von der Klasse C^k in $z, x^2, \ldots, x^n$.

Führt man nun $z, x^2, \ldots, x^n$ als neue Parameter ein, so hat die Variation (14) die Form

$$x^{n+1}(z, x^2, \ldots, x^n; \vartheta) =$$
$$= x^{n+1}(z, x^2, \ldots, x^n) - \vartheta\, [x^{n+1}(z, x^2, \ldots, x^n) + x^{n+1}(-z, x^2, \ldots, x^n)],$$

da z und $-z$ demselben x^1-Wert entsprechen. Diese Funktion ist von der Klasse C^k in $z, x^2, \ldots, x^n$ und folglich auch in $x^2, \ldots, x^{n+1}$ oder einem anderen zulässigen Parametersystem.

Literaturverzeichnis

[1] E. CARTAN, Les espaces de Finsler, Actual. sci. industr. **79**. (Paris, 1934.)

[2] W. BLASCHKE, Vorlesungen über Differentialgeometrie, **II**. 1. u. 2. Aufl. (Berlin, 1923).

Eingegangen am 5. 12. 1952