Verallgemeinerte absolute Geometrien und Lotkerngeometrien

Von HELMUT KARZEL in Bonn

In meiner Note „*Ein Axiomensystem der absoluten Geometrie*" [2][1]) habe ich gezeigt, daß alle Geometrien (Gruppen), die dem unten angegebenen Axiomensystem mit Ausnahme des Axioms Ia. genügen, in drei disjunktive Klassen zerfallen und zwar:

1. *Die verallgemeinerten elliptischen Geometrien.*
2. *Die verallgemeinerten polfreien regulären Geometrien.*
3. *Die Lotkerngeometrien.*

Hier sollen nun die Geometrien der Klassen 2. und 3. untersucht werden, besonders die der 3. Klasse, die Lotkerngeometrien. Durch das Axiom Ia. werden die elliptischen Geometrien[2]) ausgeschlossen.

Die *Grundannahme* (Axiomensystem) lautet demnach[3]):

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$, deren Zentrum nur die Identität ist, habe ein Erzeugendensystem $\mathfrak{E}$, das aus lauter involutorischen Elementen (gekennzeichnet durch kleine lateinische Buchstaben) besteht und dem folgenden Axiomensystem genügt:

I. *Aus* $a \neq b$ *und* abx inv[4]), aby inv, abz inv *folgt* $xyz \in \mathfrak{E}$.

Ia. *Für beliebige* a, b, c *gilt stets* $abc \neq 1$.

Definition: *Ist* $a \neq b$, *so heißt die Gesamtheit* P_{ab} *aller* $x \in \mathfrak{E}$ *mit* abx inv *Büschel.*

II. *Es gibt eine Menge* $\mathfrak{B}$ *von Büscheln (genannt eigentliche Büschel) mit den Eigenschaften:*

(II_1) *Zu jedem* a *gibt es mindestens zwei eigentliche Büschel* $P_1 \neq P_2$ *mit* $P_1 \ni a$ *und* $P_2 \ni a$.

(II_2) *Ist* $P_{ab} \in \mathfrak{B}$ *und* P_{cd} *beliebig, so ist* $P_{ab} \cap P_{cd}$ *nicht leer.*

1) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf die Nummern des Literaturverzeichnisses auf Seite 295.

2) Ohne weitere Zusatzannahmen über die in I und II angeführten Axiome hinaus stehen der Untersuchung des elliptischen Falles noch erhebliche Schwierigkeiten entgegen. Andererseits wird der elliptische Fall durch Hinzunahme eines naturgemäßen weiteren Axioms (vgl. z. B. E. SPERNER [1] § 4 und H. KARZEL [2] § 4) ganz besonders einfach. Aus diesen Gründen ist der elliptische Fall hier fortgelassen worden.

3) Vgl. E. SPERNER [1] § 1 und H. KARZEL [2].

4) α inv bedeutet für jedes $\alpha \in \mathfrak{G} : \alpha^2 = 1$ aber $\alpha \neq 1$.

Jeder diesem Axiomensystem genügenden Gruppe wird in bekannter Weise eine Geometrie zugeordnet, indem man die Elemente aus $\mathfrak{E}$ als *Geraden* und die Büschel als *Punkte* auffaßt. Die *Inzidenz* zwischen dem Punkt P und der Geraden a wird erklärt durch $P \ni a$. Zwei Geraden $a \neq b$ heißen *senkrecht*, wenn $(ab)^2 = 1$ ist. Als Bewegungsgruppe dieser Geometrie wird die Gruppe der inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ herangezogen, die auf Grund der Zentrumsvoraussetzung (Zentrum = Identität) mit $\mathfrak{G}$ isomorph ist. Die *Spiegelung* an der Geraden a ist der innere Automorphismus $b' = aba$. *Eigentliche Punkte* heißen alle Bildpunkte von Punkten aus $\mathfrak{B}$ bezüglich der Bewegungsgruppe. Die Menge aller eigentlichen Punkte bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}'$.

Die Geometrien (Gruppen), die unserem Axiomensystem genügen, heißen *polfrei* (vgl. hierzu Satz 1 aus dieser Note und [2], Definition 2). Alle diese Geometrien zerfallen nach [2] Hauptsatz 1 in zwei disjunktive Klassen, die *regulären Geometrien* und die *Lotkerngeometrien*. Sie sind *respektive* durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

IIIa. *Keine Gerade* $a \in \mathfrak{E}$ *inzidiert mit dem Büschel ihrer Lote.*

IIIb. *Jede Gerade* $a \in \mathfrak{E}$ *inzidiert mit dem Büschel ihrer Lote.*

Die Lotbüschel sind stets uneigentlich (für den Fall IIIa. siehe Satz 5 dieser Note, für IIIb. [2] Satz 11). Nach [2] Hauptsatz 2 ist Axiom Ia. unter Voraussetzung der übrigen Axiome eine Folge von IIIb.

Für diese beiden Klassen von Geometrien wird eine Reihe von Eigenschaften bewiesen (§ 1) und zwar einige Fixpunktsätze über Bewegungen (Satz 2—4) und vor allem, daß die Mächtigkeit der eigentlichen Punkte, die mit einer Geraden inzidieren, für alle Geraden dieselbe ist (Satz 6).

Als ein Hauptresultat wird in § 2 gezeigt, daß in jeder endlichen, dem Axiomensystem genügenden Geometrie die Sätze von Desargues und Pappus-Pascal gelten (Satz 8) und daß diesen Geometrien somit Koordinatenkörper zugeordnet werden können. Die *regulären endlichen Geometrien* erweisen sich dabei als die aus der *absoluten Geometrie bekannten singulären (euklidischen) Geometrien.* Hingegen sind die den *endlichen Lotkerngeometrien* zugeordneten Koordinatenbereiche *Körper der Charakteristik* 2 (Satz 9).

Der § 3 widmet sich allgemein den Lotkerngeometrien. Als wichtigstes Ergebnis dieser Note wird hier gezeigt:

Läßt sich eine Lotkerngeometrie in eine Desargues*sche Ebene einbetten, so hat der zugehörige Koordinatenkörper die Charakteristik* 2, *ist kommutativ und besitzt ein irreduzibles separables Polynom zweiten Grades; umgekehrt läßt sich über jedem Körper mit diesen Eigenschaften eine Lotkerngeometrie erklären* (Satz 13). Man erkennt hieraus eine gewisse Analogie zu den regulären Geometrien (vgl. [2] § 5). In beiden Fällen ist, falls vorhanden, der Koordinatenkörper kommutativ. Im regulären Fall existiert mindestens ein Nichtquadrat. Bei den Lotkerngeometrien tritt an dessen Stelle ein irreduzibles separables Polynom zweiten Grades.

In § 4 schließlich werden die in § 3 rechnerisch angegebenen Lotkerngeometrien axiomatisch gekennzeichnet. Ist nämlich in einer Lotkerngeometrie jeder Punkt P_{ab} mit $(ab)^2 \neq 1$ eigentlich, so läßt sich diese Geometrie eindeutig in eine PAPPUS-PASCALsche projektive Ebene einbetten.

1. Eigenschaften der verallgemeinerten absoluten Geometrie

Zu den Axiomen I. und Ia. ist das folgende Axiom äquivalent:

I*. *Aus* $a \neq b$ *und* $(abx)^2 = (aby)^2 = (abz)^2 = 1$ *folgt* $xyz \in \mathfrak{S}$.

Beweis: Wie ersichtlich hat Axiom I*. Axiom I. zur Folge. Aber auch Ia. folgt aus I*. Denn aus $abc = 1$ würde sich $(abc)^2 = 1$ ergeben. Zusammen mit den trivialen Relationen $(aba)^2 = 1$ und $(abb)^2 = 1$ besagt dann I*., daß $abc \in \mathfrak{S}$ wäre, d. h. $1 \in \mathfrak{S}$. 1 ist aber kein involutorisches Element.

Die Umkehrung ersieht man daraus, daß nach Ia. aus $(abx)^2 = 1$ stets abx inv folgt.

Auf Grund von I*. können wir ein *Büschel* (*Punkt*) für $a \neq b$ auch als die *Gesamtheit* P_{ab} *aller* $x \in \mathfrak{S}$ *mit* $(abx)^2 = 1$ erklären.

Satz 1: *Es gibt keine Polardreiecke, d. h. es gibt nicht drei verschiedene Geraden* a, b, c, *die durch keinen gemeinsamen Punkt gehen mit* $(ab)^2 = (ac)^2 = (bc)^2 = 1$.

Beweis: Es ist $(abc)^2 = ab(ca)bc = aba(cb)c = ababcc = 1$[5]), d. h. a, b, c müssen doch durch einen Punkt gehen. Die Bedingungen sind also nicht zu erfüllen und damit ist Satz 1 bewiesen.

Die Sätze 7, 8 und 11 aus [2] lassen sich wie folgt ergänzen:

Satz 2: *Hat eine Geradenspiegelung* a *einen nicht mit* a *inzidierenden Fixpunkt, so ist dieser uneigentlich.*

Beweis: Aus Satz 11 und Hauptsatz 1 aus [2] erkennt man, daß in einer Lotkerngeometrie eine Geradenspiegelung niemals einen nicht mit a inzidierenden Fixpunkt haben kann. Ist also $P_0 \not\ni a$ Fixpunkt der Spiegelung a, so ist die Geometrie regulär. Nun nehmen wir an: P_0 mit $\mathfrak{P}' \ni P_0 \not\ni a$ sei Fixpunkt der Spiegelung a. Außer P_0 muß es mindestens einen weiteren eigentlichen Punkt $P_1 \neq P_0$ mit $P_1 \not\ni a$ geben (andernfalls wären alle Punkte aus $\mathfrak{P}'$ Fixpunkte und, da jede Gerade mit mindestens zwei Punkten aus $\mathfrak{P}'$ inzidiert, alle Geraden Fixgeraden, d. h. a wäre ein Zentrumselement). Nun wähle ich eine Gerade b mit $P_0 \ni b$, $P_1 \not\ni b$ und fälle von P_1 das Lot d auf b. Da die Geometrie regulär ist, gilt $P_{ab} \not\ni d$ (andernfalls hätten die Lote a und d von b[6]) einen gemeinsamen Fußpunkt). Für die Verbindungsgerade c von P_0 ($\in \mathfrak{P}'$!) und P_{ad} gilt: $(ac)^2 = 1$ und $(bc)^2 = 1$. Letztere Beziehung ergibt sich, da die Spiegelung b die Punkte P_0 und P_{ad} zu Fixpunkten hat. Für die drei Geraden a, b, c gilt also: Sie sind verschieden, haben keinen gemeinsamen Punkt und stehen zueinander in der Beziehung: $(ab)^2 = (ac)^2 = (bc)^2 = 1$. Dies ist ein Widerspruch zu Satz 1.

---

[5]) Hier wird benutzt: Aus $(ab)^2 = 1$ folgt $ab = ba$.

[6]) a und b stehen aufeinander senkrecht, da b durch den nicht auf a liegenden Fixpunkt P_0 von a geht.

Satz 3: *Ist P ein eigentlicher Fixpunkt der Bewegung $\alpha = ab \neq 1$, so folgt $P = P_{ab}$.*

Angenommen: $P \neq P_{ab}$. Dann gibt es eine Gerade $c = P \cap P_{ab}$. Nach I. ist $abc = d \in \mathfrak{G}$ mit $P_{ab} \ni d$. Die Spiegelung $d = abc$ hat aber $P \in \mathfrak{P}'$ zum Fixpunkt. Nach Satz 2 ist also $d = c = abc$ oder $ab = 1$ im Widerspruch zu $ab \neq 1$.

Satz 4: *Ist $(abc)^2 \neq 1$, so hat die Bewegung $\alpha = abc$ keinen Fixpunkt in $\mathfrak{P}'$.*

Hätte abc den Fixpunkt $P \in \mathfrak{P}'$, so hätte für jedes $d \in P$ auch die Bewegung $abcd = ef$[7]) P zum Fixpunkt. Nach Satz 3 ist aber $P = P_{ef}$. Also ist $(efd)^2 = 1$ und damit auch $(abc)^2 = 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Auf Grund von Satz 2 läßt sich Satz 11 aus [2] hier wie folgt formulieren:

Satz 5: *Die Gesamtheit der Lote einer Geraden a bildet ein uneigentliches Büschel.*

Über die *Mächtigkeit* der eigentlichen Punkte, die mit einer Geraden inzidieren, gibt der folgende Satz Auskunft:

Satz 6: *Die Mächtigkeit M_a der eigentlichen Punkte, die mit einer Geraden a inzidieren, ist für alle Geraden dieselbe und gleich der Mächtigkeit N_a des Lotbüschels, das zu jeder Geraden a gehört.*

Wir beweisen zuerst: $M_a \geqq N_a$ für alle Geraden a. Nach Satz 5 gibt es durch jeden eigentlichen Punkt P_0 einer beliebigen Geraden a höchstens ein Lot. Wendet man nun die Spiegelungen, die zu sämtlichen Loten von a gehören, auf einen festen eigentlichen Punkt P_0 von a an, so erhält man lauter verschiedene Bildpunkte aus $\mathfrak{P}'$, die alle auf a liegen (wären zwei Bildpunkte, die zu den Spiegelungen $b \neq c$ gehören, gleich, so hätte die Bewegung bc den Punkt $P_0 (\neq P_{bc})$ zum Fixpunkt. Dies kann nach Satz 3 nicht möglich sein).

Als nächstes zeigen wir: $M_a = M_b$.

Wir setzen zuerst $(ab)^2 \neq 1$ voraus. Dann fällen wir von allen eigentlichen Punkten, die mit a inzidieren, Lote auf b. Diese Lote sind alle verschieden. Es gilt also: $M_a \leqq N_b \leqq M_b$. Geht man umgekehrt vor, so folgt: $M_b \leqq N_a \leqq M_a$. Also haben wir: $M_b = N_b = N_a = M_a$.

Ist $(ab)^2 = 1$, so gibt es auf a ein $P_1 \in \mathfrak{P}'$ mit $P_1 \neq P_{ab}$ und auf b ein $P_2 \in \mathfrak{P}'$ mit $P_2 \neq P_{ab}$. Die Verbindungsgerade c von P_1 und P_2 kann nach Satz 5 weder auf a noch auf b senkrecht stehen. Also sieht man auch hier durch Zwischenschaltung von c: $M_a = M_b$.

2. Endliche Geometrien

In diesem Paragraphen setzen wir voraus, daß die Geometrie nur *endlich* viele Geraden und damit nur *endlich* viele Punkte enthält. Es soll gezeigt werden, daß man in diesen Geometrien *Koordinatenbereiche* einführen kann, die *Körper* sind. Für den *regulären Fall* bedeutet das, daß die Geometrie eine *absolute singuläre* ist. Wir beweisen zuerst:

Satz 7: *In einer endlichen Geometrie inzidiert jede Gerade g mit genau einem uneigentlichen Punkt.*

[7]) Jedes Produkt von vier Erzeugenden läßt sich bekanntlich auch als Produkt von zwei Erzeugenden schreiben. Vgl. hierzu etwa [1] Satz 5.

Beweis: 1. *Die Geometrie sei regulär.*

Annahme: g inzidiert mit zwei uneigentlichen Punkten $U_1 \neq U_2$. Es gibt mindestens ein $a \in U_1$ mit $(ag)^2 \neq 1$; denn auf jeder Geraden $c \in U_2$ mit $c \neq g$ gibt es *mindestens zwei verschiedene eigentliche* Punkte P_1, P_2. Da diese nicht auf g liegen, sind die Verbindungsgeraden von P_1, U_1 und P_2, U_1 verschieden, d. h. *mindestens* eine der Geraden ist *nicht Lot* auf g, da die Geometrie regulär ist. Ebenso gibt es ein $b \in U_2$ mit $(bg)^2 \neq 1$. Fällt man von einem eigentlichen Punkt P von g die Lote l_a und l_b auf a und b, so ist mindestens eine der Ungleichungen $(l_a g)^2 \neq 1$, $(l_b g)^2 \neq 1$ richtig[8]). Ist $(l_a g)^2 \neq 1$, so werden von allen eigentlichen Punkten $\neq P$, die mit g inzidieren, die Lote auf l_a gefällt. In P wird überdies das Lot auf l_a errichtet[9]). Alle diese Lote sind verschieden. Ihre Anzahl (mit Einschluß der Geraden a) ist um eins größer als die Anzahl der eigentlichen Punkte von g. Dies ist ein Widerspruch zu Satz 6.

2. *Die Geometrie sei eine Lotkerngeometrie.*

Annahme: Es gibt außer dem Lotkern L_g[10]) auf g einen weiteren uneigentlichen Punkt $U \neq L_g$.

Für jede Gerade $a \neq g$ mit $U \ni a$ gilt: $(ag)^2 \neq 1$ ([2] Hauptsatz 1). Nun werden von allen eigentlichen Punkten von g die Lote auf a gefällt. Die Anzahl der Geraden (Lote) von L_a ist um mindestens eins größer als die Anzahl der eigentlichen Punkte von g. Dies ist wiederum ein Widerspruch zu Satz 6.

Nun können wir unsere Geometrien zu einer *projektiven Geometrie erweitern*, indem wir eine *uneigentliche (unendlich ferne) Gerade u* einführen und erklären: *u inzidiert mit genau allen uneigentlichen Punkten.*

Auf Grund von Satz 7 ist dies die *einzig mögliche Erweiterung* zu einer projektiven Geometrie.

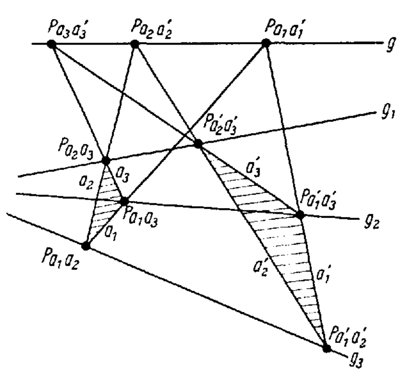

Fig. 1

Satz 8: *In der durch Hinzunahme der uneigentlichen Geraden u zur projektiven erweiterten endlichen Geometrie gelten die Sätze von* Desargues *und* Pappus-Pascal.

Wir beweisen gleich allgemeiner:

Satz 8a: *Läßt sich eine (endliche oder unendliche) Geometrie durch Hinzunahme einer einzigen uneigentlichen Geraden u zu einer projektiven Geometrie erweitern, so gilt in dieser projektiven Geometrie der Satz von* Desargues.

Beweis: Wir setzen zunächst voraus, daß alle in der Desarguesschen Konfiguration (siehe Figur 1) vorkommenden Geraden eigentlich sind. Nach [1] § 3 und § 4 genügt es zu zeigen, daß *mindestens eines* der drei Punktetripel $\{P_{a_i a_j}, P_{a'_i a'_j}, P_{a_k a'_k}\}$ $(i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)$

[8]) Aus $(l_a g)^2 = (l_b g)^2 = 1$ würde nämlich (da die Geometrie regulär und $(l_a l_b g)^2 = 1$ ist) $l_a = l_b$ folgen. Da nach Satz 5 die Lote von l_a ein Büschel bilden, müßte $U_1 = U_2$ sein.

[9]) Ein Lot läßt sich errichten! Denn es gibt nach (II_1) mindestens ein $Q \neq P$ mit $Q \in \mathfrak{B}'$ und $g \in Q$. Fällt man von $Q \not\ni l_a$ das Lot d auf l_a und verbindet man P mit P_{ad}, so ist die Verbindungsgerade das gewünschte Lot.

[10]) Mit *Lotkern* L_g wurde in [2] das Büschel aller Lote von g, das ja in einer Lotkerngeometrie g selbst enthält, bezeichnet.

aus lauter *eigentlichen* Punkten besteht. Ist auf g etwa $P_{a_i a_i'}$ uneigentlich, so ist nach Voraussetzung (jede Gerade inzidiert nur mit einem uneigentlichen Punkt) $\{P_{a_i a_j}, P_{a_i' a_j'}, P_{a_k a_k'}\}$ ein eigentliches Punktetripel. Es seien jetzt alle $P_{a_i a_i'}$ eigentlich. Ist $P_{a_i a_j}$ uneigentlich, so ist nach Voraussetzung entweder höchstens nur $P_{a_i' a_k'}$ oder $P_{a_j' a_k'}$ uneigentlich, d. h. mindestens eines der Tripel $\{P_{a_i a_k}, P_{a_i' a_k'}, P_{a_j a_j'}\}, \{P_{a_j a_k}, P_{a_j' a_k'}, P_{a_i a_i'}\}$ besteht aus lauter eigentlichen Punkten.

Ist eine der Geraden der Konfiguration die Gerade u, so hat man *drei wesentliche Fälle* zu unterscheiden:

$$1.\ u = g\,,\quad 2.\ u = g_i\,,\quad 3.\ u = a_i, a_i' \qquad (i = 1,2,3)\,.$$

Wir beweisen die drei Fälle gleich auf einmal. Es soll entweder $u = g$, $u = g_3$ oder $u = a_2'$ sein.

Annahme: $P_{g_1 g_2} \not\ni g_3$.

Die Desarguessche Konstruktion wird wie folgt abgeändert (s. Figur 2): Man verbinde

$P_{g_1 g_2}$ und $P_{a_1 a_2}$ durch $\bar{g}_3 \neq g_3$,

$P_{a_2' a_3'}$ und $P_{a_1' g_3}$ durch $\bar{a}_2' \neq a_2'$,

$P_{a_2 a_2'}$ und $P_{a_1 a_1'}$ durch $\bar{g} \neq g$.

Denkt man sich nun g_3 durch $\bar{g}_3$, a_2' durch $\bar{a}_2'$ und g durch $\bar{g}$ ersetzt, so erhält man eine neue Konfiguration, in der jedenfalls alle vorkommenden Geraden eigentlich sind. Die Geraden $\bar{g}, a_3, a_3'$ übernehmen jetzt die Rolle von g_1, g_2, g_3, d. h. sie müssen durch einen Punkt gehen. Hieraus ergibt sich aber, daß sowohl $\bar{g}$ als auch g mit den Punkten $P_{a_1 a_1'} \neq P_{a_3 a_3'}$ inzidiert. Dies ist in den Fällen $u = g_3$ und $u = a_2'$ ein Widerspruch zur eindeutigen Verbindbarkeit zweier Punkte (vgl. [2] Satz 2), im Fall $u = g$ ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt immer: $P_{g_1 g_2} \ni g_3$ und damit ist der Satz von Desargues vollständig bewiesen.

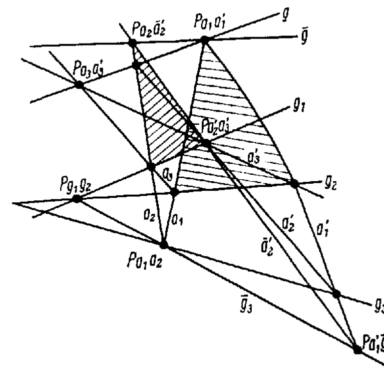

Fig. 2

Für endliche Geometrien gilt damit auch der Satz von Pappus-Pascal. Da die endlichen Geometrien nur um eine uneigentliche Gerade erweitert worden sind, sind die regulären unter diesen zwangsläufig absolute singuläre Geometrien. Für die Lotkerngeometrien läßt sich hingegen der folgende Satz aussprechen:

Satz 9: *Jede endliche Lotkerngeometrie hat einen Koordinatenbereich, der ein Körper der Charakteristik 2 ist.*

Zum Beweis ist lediglich zu zeigen:

Satz 10: *In jeder Lotkerngeometrie ist das* Fano-*Axiom nicht erfüllt.*

Wir betrachten die Spiegelung an einer Geraden a (s. Figur 3). Es sei $L_a \ni b, c$ mit $b \neq c$ und $b, c \neq a$ und $P_1 \ni b$, $P_2 \ni c$ mit $P_1, P_2 \in \mathfrak{B}'$. Mit P_3 und P_4 werden die Spiegelpunkte von P_1 und P_2 bezüglich a bezeichnet. Für diese gilt wegen $(ab)^2 = (ac)^2 = 1$: $P_3 \ni b$, $P_4 \ni c$. Für die Verbindungsgeraden d von P_1,

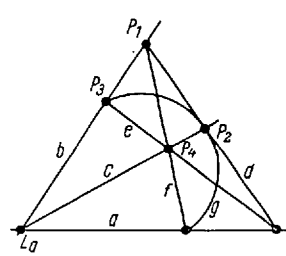

Fig. 3

P_2 und e von P_3, P_4 ergibt sich also: $(ade)^2 = 1$ und ebenso für die Verbindungsgeraden f von P_1, P_4 und g von P_2, P_3: $(afg)^2 = 1$. Hieraus erkennen wir: Die Schnittpunkte der Diagonalen des vollständigen Vierecks P_1, P_2, P_3, P_4 liegen alle auf einer Geraden a, d. h. das FANO-Axiom ist nicht erfüllt.

3. Körper als Koordinatenbereiche in Lotkerngeometrien

Hier sei entsprechend wie in [2] § 5 vorausgesetzt, daß *eine Lotkerngeometrie in eine* DESARGUES*sche projektive Geometrie einbettbar* sei. Es soll untersucht werden, *welche Körper der Charakteristik 2*[11] *als Koordinatenbereiche überhaupt in Frage kommen* und wie man *Beispiele* von Lotkerngeometrien angeben kann.

Zunächst wird ein *Koordinatensystem* wie folgt eingeführt: Es werden zwei beliebige eigentliche Geraden $x_1 \neq x_2$, die einen eigentlichen Schnittpunkt 0 haben, gewählt. Der Punkt 0 erhält die Koordinaten $(1, 0, 0)$, der Lotkern L_{x_1} $(0, 1, 0)$ und der Lotkern L_{x_2} $(0, 0, 1)$.

Nun bestimmen wir *alle involutorischen Projektivitäten*, die x_1 *punktweise*[12]) festlassen und *mindestens zwei Geraden* aus L_{x_1} in sich überführen. (Die zugehörigen Matrizen der Projektivitäten seien so normiert, daß $a_{00} = 1$ ist, wenn $a_{00} \neq 0$.)

Da $(1, 0, 0)$ Fixpunkt ist, gilt: $a_{10} = a_{20} = 0$.

Da $(0, 1, 0)$ Fixpunkt ist, gilt: $a_{01} = a_{21} = 0$.

Da $(1, 1, 0)$ Fixpunkt ist, gilt: $a_{11} = 1$.

Da die Bewegung involutorisch ist, gilt: $a_{22} = 1$.

Da die Bewegung eine Gerade der Gestalt $X_2 = B$[13]) in sich überführen soll, folgt: $a_{02} = 0$.

Setzen wir schließlich $a_{12} = K$, so haben die gesuchten Projektivitäten die Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & K \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei K ein beliebiges Körperelement $\neq 0$ sein darf. Entsprechend erhält man für die Spiegelungen an der x_2-Achse die Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & N & 1 \end{pmatrix}.$$

[11]) Nach Satz 10 läßt sich einer Lotkerngeometrie, wenn überhaupt, nur ein Körper der Charakteristik 2 als Koordinatenbereich zuordnen.

[12]) Bekanntlich gilt: Läßt eine Projektivität eine Gerade punktweise fest, so ist der zugehörige Automorphismus des Koordinatenkörpers der identische. Folglich können wir uns hier auf lineare Projektivitäten beschränken.

[13]) Große lateinische Buchstaben und kleine lateinische mit doppelten Indizes sollen Körperelemente bezeichnen.

Bisher hatten wir noch keine Festsetzung über den *Einheitspunkt* getroffen. Dies holen wir nach, indem wir auf der x_2-Achse einem beliebigen eigentlichen Punkt $\neq 0$ die Koordinaten $(1, 0, 1)$ erteilen und verlangen, daß die Spiegelung an der x_1-Achse diesen Punkt in den Punkt $(1, 1, 1)$ überführt. In diesem Koordinatensystem hat dann die Spiegelung an der x_1-Achse die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche Werte N für die Spiegelungen an der x_2-Achse in Frage kommen, wird etwas später angegeben.

Jetzt sollen noch die *involutorischen Projektivitäten* bestimmt werden, die eine *beliebige Gerade* a: $X_2 = A X_1$ durch den Nullpunkt in sich überführen. Da $(1, 0, 0)$, $(0, 1, A)$, $(1, 1, A)$ Fixpunkte sind, folgt: $a_{10} = a_{20} = 0$, $a_{02} = a_{01} A^{-1}$, $a_{12} = (a_{11} + 1) A^{-1}$ und $a_{21} = (a_{22} + 1) A$. Da die Projektivitäten auch involutorisch sein sollen, ergibt sich: $a_{22} = A a_{11} A^{-1}$. Setzt man $a_{11} = f(A)$, so nimmt die Matrix die folgende Gestalt an:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{02} A & a_{02} \\ 0 & f(A) & (1+f(A))\, A^{-1} \\ 0 & A(1+f(A)) & A f(A)\, A^{-1} \end{pmatrix}.$$

Nunmehr läßt sich folgender Satz beweisen:

Satz 11: *Läßt sich eine Lotkerngeometrie in eine* DESARGUES*sche projektive Ebene einbetten, so liegen alle Lotkerne auf einer Geraden.*

Den Beweis erbringen wir, indem wir mit Hilfe von Axiom I zeigen, daß in der obigen Matrix $a_{02} = 0$ sein muß. Wenn $a_{02} = 0$ ist, liegt nämlich L_a auf der Geraden $\langle 1, 0, 0\rangle$ und da sich jeder Lotkern mit $(1, 0, 0)$ verbinden läßt, liegen alle Lotkerne auf der Geraden $\langle 1, 0, 0\rangle$. Wir multiplizieren die folgenden drei Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_{02} A & a_{02} \\ 0 & f(A) & (1+f(A))\, A^{-1} \\ 0 & A(1+f(A)) & A f(A)\, A^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{02} A & a_{02} \\ 0 & f(A) + A(1+f(A)) & (1+f(A))\, A^{-1} + A f(A)\, A^{-1} \\ 0 & N f(A) + (N+1)\, A\, (1+f(A)) & N(1+f(A))\, A^{-1} + (N+1)\, A f(A)\, A^{-1} \end{pmatrix}.$$

Die Produktmatrix muß nach Axiom I wieder eine Geradenspiegelung b, deren Trägergerade eine Gleichung der Gestalt $X_2 = B X_1$ hat, repräsentieren, d. h. es muß $b_{01} = b_{02} B = a_{02} A$ und $b_{02} = a_{02}$ sein und folglich $A = B$, wenn $a_{02} \neq 0$. Hieraus folgt: $x_2\, x_1\, a = a$ oder $x_2\, x_1 = 1$. Das kann aber nicht sein, da $x_1 \neq x_2$ ist. Also muß $a_{02} = 0$ sein, w. z. b. w.

Aus der Produktmatrix lassen sich noch weitere Folgerungen ziehen. Da $(x_2 x_1 a)^2 = 1$ oder, was dasselbe ist, $x_2 x_1 a = a x_1 x_2$, muß auch das folgende Matrizenprodukt dieselbe Produktmatrix ergeben[14]):

$$\begin{pmatrix} f(A) & (1+f(A))\,A^{-1} \\ A\,(1+f(A)) & A f(A)\,A^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} f(A)\,(1+N) + (1+f(A))\,A^{-1}\,N & f(A) + (1+f(A))\,A^{-1} \\ A\,(1+f(A))\,(1+N) + A f(A)\,A^{-1} N & A\,(1+f(A)) + A f(A)\,A^{-1} \end{pmatrix}.$$

Vergleicht man nun die Koeffizienten der beiden Produktmatrizen, so erhält man die folgenden Beziehungen:

c_{12}: $\quad f(A) + (1+f(A))\,A^{-1} = (1+f(A))\,A^{-1} + A f(A)\,A^{-1}$ d. h.:

(1) $$f(A) = A f(A)\,A^{-1} \qquad \text{oder:}$$

(1 a) $$f(A)\,A = A f(A)$$

c_{11}: $\quad f(A)\,(1+N) + (1+f(A))\,A^{-1}\,N = f(A) + A\,(1+f(A))$

$\quad f(A)\,(N + A^{-1} N + A) = A^{-1}\,N + A$ [15])

(2) $$f(a) = (A + A^{-1}\,N)\,(N + A^{-1}\,N + A)^{-1}$$

c_{22}: $\quad A\,(1+f(A)) + f(A) = N\,(1+f(A))\,A^{-1} + (N+1)\,f(A)$ [15])

$\quad (N + N A^{-1} + A)\,f(A) = A + N A^{-1}$

(3) $$f(A) = (N + N A^{-1} + A)^{-1}\,(A + N A^{-1})$$

c_{21}: $\quad A\,(1+f(A))\,(1+N) + f(A)\,N = N f(A) + (N+1)\,A\,(1+f(A))$

$\quad A N + A + A f(A) + f(A)\,(A N + N) = N A + A + A f(A) + (N A + N) f(A)$
$\quad + A^2 f(A)$

$\quad A N + A f(A)\,(N + A^{-1}\,N + A) = N A + (N + N A^{-1} + A)\,f(A)\,A\,.$

Beachtet man (2) und (3), so folgt:

$$A N + (A^2 + N) = N A + (A^2 + N)$$

(4) $$A N = N A\,.$$

Aus (4) folgt, daß N dem *Zentrum* des Koordinatenkörpers angehören muß. Dann sind die Darstellungen (2) und (3) identisch. Man erkennt also: *Sind die Spiegelungen an den Achsen bekannt, so sind die Spiegelungen an allen Geraden durch* 0 *eindeutig bestimmt.* Wir beweisen nun

[14]) Da alle a_{0i} und a_{i0} für $i \neq 0$ verschwinden, können wir die erste Zeile und Spalte der Matrix fortlassen.

[15]) Hier wird bereits von (1) bzw. (1a) Gebrauch gemacht.

Satz 12: *Der Koordinatenkörper einer Lotkerngeometrie ist kommutativ.*

Beim Beweis bediene ich mich der Methode, die R. KANNENBERG[16]) bei Körpern der Charakteristik $\neq 2$ benutzt hat. Man rechnet leicht aus, daß der Abstand $\delta = X_2 + AX_1$ eines Punktes mit den Koordinaten (X_1, X_2) von einer Geraden $a: X_2 = AX_1$ bei Spiegelung an a erhalten bleibt. Sind $a, b \in 0$ zwei Geraden und $P \neq 0$ ein Punkt von b, so sind wegen $x_1 ab = bax_1$ $x_1a(P)$ und $ax_1(P)$ Spiegelpunkte bezüglich b, d. h. der Abstand, den $x_1 a(P)$ von b hat, muß gleich demjenigen sein, den $ax_1(P)$ von b hat. Der Punkt $P_0: (1, 1, B)$ liegt auf der Geraden $b: X_2 = BX_1$. Wir erhalten für $a(P_0)$ die Koordinaten:

$$(1, f(A) + (1+f(A))A^{-1}B, \quad A(1+f(A)) + f(A)B) \text{ und für } x_1 a(P_0):$$

$$(1, f(A) + (1+f(A))A^{-1}B + A(1+f(A)) + f(A)B, A(1+f(A)) + f(A)B).$$

Für $x_1(P_0)$: $(1, 1+B, B)$ und für $ax_1(P_0)$:

$$(1, f(A)(1+B) + (1+f(A))A^{-1}B, A(1+f(A))(1+B) + f(A)B).$$

Setzen wir die Koordinaten von $x_1a(P_0)$ und $ax_1(P_0)$ in die Abstandsformel $\delta = X_2 + BX_1$ ein, so erhalten wir die Beziehung:

$$A(1+f(A)) + f(A)B + Bf(A) + B(1+f(A))A^{-1}B + BA(1+f(A)) + Bf(A)B =$$
$$= A(1+f(A))(1+B) + f(A)B + Bf(A)(1+B) + B(1+f(A))A^{-1}B$$

oder:

(5) $$BA(1+f(A)) = A(1+f(A))B$$

d. h. $Z_1 = A(1+f(A))$ muß für jedes Körperelement A im Zentrum liegen.

Entsprechend erhält man, wenn man statt der x_1-Achse die x_2-Achse verwendet:

(6) $$N(1+f(A))A^{-1}B = B(1+f(A))A^{-1}N$$

d. h. auch $(1+f(A))A^{-1}$ liegt für jedes A im Zentrum und somit auch $[(1+f(A))A^{-1}]^{-1} = A(1+f(A))^{-1}$. Also ist ebenfalls $A(1+f(A))^{-1}A(1+f(A)) = A^2$[17]) ein Zentrumselement. Setzt man für $f(A)$ (3) ein, so folgt:

$$Z_1 = A(1+f(A)) = AN(N+A^{-1}N+A)^{-1}$$

oder umgeformt:

$$ANZ_1^{-1} = N + A^{-1}N + A$$
$$A^2NZ_1^{-1} = AN + N + A^2$$
$$A = A^2Z_1^{-1} + 1 + A^2N^{-1},$$

d. h. auch A liegt im Zentrum. Da alle Elemente Zentrumselemente sind, ist der Körper kommutativ, w. z. b. w.

Aus (2) läßt sich noch eine weitere Folgerung ziehen. $f(A)$ ist nämlich nur dann erklärt, wenn *für kein Körperelement A der Ausdruck $N + A^{-1}N + A$ oder $A^2 + AN + N$ verschwindet, d. h. über dem Koordinatenkörper einer Lotkerngeometrie gibt es mindestens ein irreduzibles separables Polynom zweiten Grades.*

[16]) Soll demnächst erscheinen.

[17]) Hier wurde (1a) benutzt.

Satz 13: *Über einem Körper $\mathfrak{K}_2$ der Charakteristik 2 läßt sich dann und nur dann eine Lotkerngeometrie erklären, wenn der Körper kommutativ ist und ein irreduzibles separables Polynom zweiten Grades besitzt.*

Beweis: Das „*nur dann*" folgt bereits aus den obigen Betrachtungen. Um das „*dann*" zu beweisen, wird eine *Lotkerngeometrie wie folgt konstruiert*: „*eigentliche Punkte*" = alle Tripel der Gestalt $(1, X_1, X_2)$ mit $X_1, X_2 \in \mathfrak{K}_2$; „*Geraden*" = alle linearen Gleichungen $AX_1 + BX_2 + C = 0$ mit $A, B, C \in \mathfrak{K}_2$ und $(A, B) \neq (0,0)$ und die uneigentliche Gerade $X_0 = 0$.

„*Geradenspiegelungen*". Ist $Y^2 + N^* Y + M$ ein irreduzibles Polynom, so ist auch das Polynom $Y^2 + M^{-1} N^{*2} Y + M^{-1} N^{*2} = Y^2 + NY + N$ irreduzibel. Die Spiegelungen an den Geraden werden wie folgt erklärt:

Für $X_2 = C$: $\quad X_1^* = X_1 + X_2 + C$, $\quad X_2^* = X_2$

Für $X_1 = D$: $\quad X_1^* = X_1$, $\quad X_2^* = NX_1 + X_2 + ND$

Für $X_2 + AX_1 + C = 0$: $X_1^* = (N + NA^{-1} + A)^{-1}(A + NA^{-1})X_1 + A^{-1}NX_2 + A^{-1}NC$

$$X_2^* = (N + NA^{-1} + A)^{-1} ANX_1 + (A + NA^{-1})X_2 + NC.$$

Man rechnet leicht nach, daß die so erklärten Spiegelungen dem Axiom I. genügen. (Es genügt Axiom I. für den Punkt 0 zu verifizieren.) Damit ist aber Satz 13 bewiesen.

Die hier angegebenen Lotkerngeometrien wollen wir *singulär* nennen, da bis auf die Gerade $X_0 = 0$ und die mit ihr inzidierenden Punkte alle anderen Geraden und Punkte eigentlich sind. Eine axiomatische Kennzeichnung dieser Geometrien soll im nächsten Paragraphen erfolgen. Ob es noch andere Lotkerngeometrien über Körpern gibt, ist eine offene Frage.

4. Axiomatische Kennzeichnung der singulären Lotkerngeometrien

Definition: *Eine Lotkerngeometrie heißt singulär, wenn das folgende Axiom erfüllt ist:*

IIIb′. *Jeder Punkt P_{ab} mit $(ab)^2 \neq 1$ ist eigentlich.*

Satz 14: *Eine singuläre Lotkerngeometrie läßt sich eindeutig zu einer* DESARGUES*schen projektiven Geometrie erweitern.*

Beweis: Da mit jeder Geraden nur ein Lotkern inzidiert, sind nach Axiom IIIb′. alle übrigen Punkte der Geraden eigentlich. Die Geometrie kann deshalb zwangsläufig nur um eine uneigentliche Gerade u erweitert werden, die mit genau allen Lotkernen inzidiert. Die so erweiterte Geometrie ist bereits projektiv, wie ersichtlich. Nach Satz 8a gilt in der erweiterten Geometrie der Satz von DESARGUES. Nach den Ergebnissen von § 3 ist dann auch der Satz von PAPPUS-PASCAL richtig. Mit dem Beweis von Satz 14 ist auch der noch ausstehende Beweis von Hauptsatz 3 aus [2] hinsichtlich IIIb′. erbracht.

Satz 15: *In einer singulären Lotkerngeometrie sind bei jeder Bewegung ab mit ab* inv *alle Lotkerne Fixpunkte.*

Zum Beweise nehmen wir an: L_c ist kein Fixpunkt der Bewegung ab. Dann ist aber $P_{cc'} \neq L_c$ mit $c' = abcab \neq c(!)$ Fixpunkt, da ab involutorisch ist. $P_{cc'}$ ist eigentlich; denn $P_{cc'} \ni c$ und $P_{cc'} \neq L_c$ (Axiom IIIb'.), d. h. $(cc')^2 \neq 1$. Nach Satz 3 bedeutet dies $P_{ab} = P_{cc'}$. Da aber $(ab)^2 = 1$ ist, gilt auch $P_{cc'} = P_{ab} = L_a$. Dies ist ein Widerspruch, da L_a uneigentlich ist.

Literaturverzeichnis

[1] E. Sperner, Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik. Arch. der Math. **5**, 458—468 (1954).

[2] H. Karzel, Ein Axiomensystem der absoluten Geometrie. Arch. der Math. **6**, 66—76 (1955).

Eingegangen am 21. 7. 1954