Über einen Satz von G. Ricci-Curbastro und die Gausssche Krümmung der Minimalflächen

Von Max Pinl in Dacca (Pakistan)

In der Theorie der Minimalflächen kennt man ein Ergebnis von G. Ricci-Curbastro in der folgenden Formulierung [1]): Ist ds^2 das Bogenelement einer Minimalfläche und K ihr Krümmungsmaß, so hat die quadratische Differentialform

$$ds^{*2} = \sqrt{-K}\, ds^2$$

verschwindendes Krümmungsmaß. Auch die Umkehrung gilt. In dieser Formulierung kommt die Einbettung der Minimalfläche nicht zum Ausdruck. Gleichwohl ist sie wesentlich für die Allgemeingültigkeit des Satzes von G. Ricci-Curbastro. Das Problem hängt überdies mit der Möglichkeit, die Gausssche Krümmung K der Minimalfläche in die von E. Study zuerst benutzte „Normalform“ $K = -\frac{1}{g_{12}^2}$ zu transformieren, zusammen. Diesen Zusammenhang wollen wir zuerst behandeln und dann ein Gegenbeispiel einer Minimalfläche im euklidischen vierdimensionalen Raum R_4 konstruieren, für welche der Satz von G. Ricci-Curbastro nicht gilt.

1. E. Studys Normalform der Gaussschen Krümmung

Sind u_1, u_2 isotrope Parameter einer binären Metrik ds^2, so gilt:

$$ds^2 = 2\, g_{12}(u_1, u_2)\, du_1\, du_2, \quad g_{11} = g_{22} = 0\,. \tag{1}$$

Hat die Gausssche Krümmung K der Metrik (1) die Studysche Normalform (und das wollen wir jetzt voraussetzen), so gilt [2]):

$$K = -\frac{1}{g_{12}^2}\,. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich die euklidische binäre Metrik

$$ds^{*2} = \sqrt{-K}\, ds^2 = 2\, du_1\, du_2\,, \tag{3}$$

deren zugehörige Gausssche Krümmung K^* verschwindet. Nun sei umgekehrt

$$ds^* = 2\, g_{12}^*\, du_1\, du_2 = 2\sqrt{-K}\, g_{12}\, du_1\, du_2, \; g_{12}^* = \sqrt{-K}\, g_{12} \tag{4}$$

eine binäre euklidische Metrik und daher

$$K^* = -\frac{1}{g_{12}^*}\, \frac{\partial^2 \lg g_{12}^*}{\partial u_1 \partial u_2} = 0\,. \tag{5}$$

[1]) Vgl. z. B. W. Blaschke, Einführung in die Differentialgeometrie, § 72, S. 124. Berlin 1950.
[2]) Vgl. [1]), § 72, S. 123.

Dann folgt aus (4)

$$\lg g_{12}^{*} = \lg \sqrt{-K} + \lg g_{12} \tag{6}$$

und daher nach (5) und (6)

$$\frac{\partial^2 \lg g_{12}^{*}}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} (\lg \sqrt{-K} + \lg g_{12}) = 0 .$$

Oder:

$$\lg \sqrt{-K} + \lg g_{12} = -\lg f(u_1) - \lg g(u_2), \quad (f \cdot g \neq 0)$$

$$\sqrt{-K} = \frac{1}{f \cdot g \cdot g_{12}} . \tag{7}$$

Bis jetzt haben wir keinerlei Gebrauch von einer Einbettung der Metrik (1) gemacht. Nun betrachten wir eine spezielle Realisierung der Metrik (1) auf einer Minimalfläche $\mathfrak{x}(u_1, u_2)$ des euklidischen n-dimensionalen Raumes $R_n (n \geqq 3)$:

$$\mathfrak{x}(u_1, u_2) = \mathfrak{y}(u_1) + \mathfrak{z}(u_2), \quad \mathfrak{y}'^2 = \dot{\mathfrak{z}}^2 = 0 .$$

Dann erhalten wir an Stelle von (7)

$$\sqrt{-K} = \frac{1}{f \mathfrak{y}' g \dot{\mathfrak{z}}}, \quad g_{12} = \mathfrak{y}' \dot{\mathfrak{z}} . \tag{8}$$

Da f und g nicht verschwinden, führen wir durch die Skalentransformationen

$$p(u_1) = \int\limits_{u_1^{(0)}}^{u_1} \frac{dt}{f(t)}, \quad q(u_2) = \int\limits_{u_2^{(0)}}^{u_2} \frac{dt}{g(t)}$$

neue isotrope Parameter p und q ein und erhalten wegen

$$\mathfrak{y}' = \mathfrak{y}_p \, p' = \mathfrak{y}_p \frac{1}{f}, \quad \dot{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}_q \, \dot{q} = \mathfrak{z}_q \frac{1}{g}$$

aus (8) die STUDYsche Normalform der GAUSSschen Krümmung

$$\sqrt{-K} = \frac{1}{\mathfrak{y}_p \mathfrak{z}_q}, \quad K = -\frac{1}{(\mathfrak{y}_p \mathfrak{z}_q)^2} . \tag{9}$$

Damit ist gezeigt:

Der Satz von G. RICCI-CURBASTRO *ist äquivalent mit der Existenz geeigneter isotroper Parameter auf der Minimalfläche des R_n, in welchen ihre* GAUSS*sche Krümmung die* STUDY*sche Normalform gewinnt.*

Für $n = 3$ sind die STUDY-VESSIOTschen Parameter der isotropen Kurven $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ Beispiele solcher geeigneter Parameter. Für $n \geqq 4$ sind die STUDY-VESSIOTschen Parameter im allgemeinen ungeeignet, um für K die STUDYsche Normalform zu gewinnen. Wir zeigen dies im folgenden an einem Beispiel.

2. Gegenbeispiel für $n = 4$

Wir betrachten die isotropen Kurven

$$(10)\qquad \mathfrak{y} = \left\{\frac{i u_1}{6}(u_1^2 - 3),\ \frac{u_1}{6}(u_1^2 + 3),\ \frac{i u_1^2}{2},\ 0\right\},\ \mathfrak{z} = \left\{0,\ \frac{u_2}{6}(u_2^2 + 3),\ \frac{i u_2^2}{2},\ \frac{i u_2}{6}(u_2^2 - 3)\right\},$$
$$i = \sqrt{-1}\,.$$

Ihre Tangentenvektoren $\mathfrak{y}'$ und $\mathfrak{z}'$ sind isotrop:

$$(11)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{y}' &= \left\{\frac{1 - u_1^2}{2i},\ \frac{1 + u_1^2}{2},\ i u_1,\ 0\right\}, \quad \mathfrak{y}'^2 \equiv 0\{u_1\}\,, \\ \mathfrak{z}' &= \left\{0,\ \frac{1 + u_2^2}{2},\ i u_2,\ \frac{1 - u_2^2}{2i}\right\}, \quad \mathfrak{z}'^2 \equiv 0\{u_2\}\,. \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen $\mathfrak{y}''$, $\mathfrak{z}''$ sind normiert:

$$\begin{aligned} \mathfrak{y}'' &= \{i u_1,\ u_1,\ i,\ 0\}\,, \quad \mathfrak{y}''^2 \equiv -1\,\{u_1\}\,, \\ \mathfrak{z}'' &= \{0,\ u_2,\ i,\ i u_2\}\,, \quad \mathfrak{z}''^2 \equiv -1\,\{u_2\}\,. \end{aligned}$$

Die Parameter u_1, u_2 der isotropen Kurven (10) sind also Study-Vessiotsche Parameter. Gleichwohl hat die Gausssche Krümmung der Minimalfläche

$$(12)\qquad \mathfrak{x}(u_1, u_2) = \mathfrak{y}(u_1) + \mathfrak{z}(u_2), \qquad \mathfrak{y}'^2 = \mathfrak{z}'^2 = 0$$

in diesen Parametern nicht die Studysche Normalform. Denn in isotropen Parametern gilt[3]) für die Gausssche Krümmung der Fläche (12)

$$(13)\qquad K = -\frac{1}{(\mathfrak{y}'\mathfrak{z}')^3}\left[(\mathfrak{y}'\mathfrak{z}')(\mathfrak{y}''\mathfrak{z}'') - (\mathfrak{y}'\mathfrak{z}'')(\mathfrak{y}''\mathfrak{z}')\right].$$

Für die skalaren Produkte $\mathfrak{y}'\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{y}''\mathfrak{z}'$, $\mathfrak{y}'\mathfrak{z}''$, $\mathfrak{y}''\mathfrak{z}''$ folgt aus (11) und (13):

$$(14)\qquad \begin{aligned} g_{12} &= \mathfrak{y}'\mathfrak{z}' = \frac{1}{4}\left[(1 + u_1^2)(1 + u_2^2) - 4 u_1 u_2\right], \\ \frac{\partial g_{12}}{\partial u_1} &= \mathfrak{y}''\mathfrak{z}' = \frac{1}{2}\left[u_1(1 + u_2^2) - 2 u_2\right], \quad \frac{\partial g_{12}}{\partial u_2} = \mathfrak{y}'\mathfrak{z}'' = \frac{1}{2}\left[u_2(1 + u_1^2) - 2 u_1\right], \\ \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} &= \mathfrak{y}''\mathfrak{z}'' = u_1 u_2 - 1\,, \end{aligned}$$

$$(15)\qquad K = \frac{-16(u_1^2 + u_2^2 - u_1^2 u_2^2 - 1)}{[(1 + u_1^2)(1 + u_2^2) - 4 u_1 u_2]^3} + \frac{-16}{[(1 + u_1^2)(1 + u_2^2) - 4 u_1 u_2]^2} = -\frac{1}{g_{12}^2}\,.$$

Die Gausssche Krümmung (15) der Minimalfläche (12), obwohl auf Study-Vessiotsche Parameter bezogen, ist gleichwohl nicht von der Studyschen Normalform. Wie steht es mit dem Satz von G. Ricci-Curbastro auf der Minimalfläche (12)? Ihre Metrik ist durch

$$ds^2 = 2\, g_{12}\, du_1\, du_2 = 2\, \mathfrak{y}'\mathfrak{z}'\, du_1\, du_2$$

[3]) Vgl. M. Pinl, Monatshefte für Mathematik 55/3, 189 (1951).

gegeben. Wir haben die Metrik

$$ds^{*2} = 2\sqrt{-K}\, g_{12}\, du_1\, du_2 = 2\, g_{12}^{*}\, du_1\, du_2$$

zu prüfen mit der GAUSSschen Krümmung

$$K^{*} = -\frac{1}{g_{12}^{*}}\,\frac{\partial^2 \lg g_{12}^{*}}{\partial u_1\, \partial u_2}\,. \tag{16}$$

Nach (4), (14) und (15) gilt:

$$g_{12}^{*} = \sqrt{\frac{u_1^2+u_2^2-u_1^2u_2^2-1}{(1+u_1^2)(1+u_2^2)-4u_1u_2}}\,, \tag{17}$$

$$\lg g_{12}^{*} = \frac{1}{2}\left[\lg(u_1^2+u_2^2-u_1^2u_2^2-1)-\lg(1+u_1^2+u_2^2+u_1^2u_2^2-4u_1u_2)\right],$$

$$\frac{\partial \lg g_{12}^{*}}{\partial u_1} = \frac{u_1-u_1u_2^2}{u_1^2+u_2^2-u_1^2u_2^2-1}-\frac{u_1+u_1u_2^2-2u_2}{1+u_1^2+u_2^2+u_1^2u_2^2-4u_1u_2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 \lg g_{12}^{*}}{\partial u_1\,\partial u_2} = \frac{-2u_1u_2(u_1^2+u_2^2-u_1^2u_2^2-1)-(u_1-u_1u_2^2)(2u_2-2u_1^2u_2)}{(u_1^2+u_2^2-u_1^2u_2^2-1)^2}$$

$$-\frac{(u_1^2+u_2^2+u_1^2u_2^2-4u_1u_2+1)(2u_1u_2-2)-(u_1+u_1u_2^2-2u_2)(2u_2+2u_2u_1^2-4u_1)}{(1+u_1^2+u_2^2+u_1^2u_2^2-4u_1u_2)^2}\,. \tag{18}$$

Die gemischte Ableitung (18) müßte mit Rücksicht auf (16) identisch in u_1, u_2 verschwinden, wenn auf (12) G. RICCI-CURBASTROS Satz gilt. Das ist aber nicht der Fall, denn für $u_1 = u_2 = 0$ ergibt sich nach (17) und (18)

$$g_{12}^{*}(0,0) = i \neq 0, \quad \left.\frac{\partial^2 \lg g_{12}^{*}}{\partial u_1\,\partial u_2}\right|_{u_1=u_2=0} = 2 \neq 0$$

und daher nach (16)

$$K^{*} \not\equiv 0\,\{u_1, u_2\}\,.$$

Damit ist gezeigt:

Die Minimalfläche (12) *des euklidischen vierdimensionalen Raumes mit den isotropen Erzeugenden* (10) *ist ein Beispiel einer Minimalfläche, auf welcher der Satz von* G. RICCI-CURBASTRO *nicht gilt und keine isotropen Parameter existieren, in welchen die (nichtverschwindende)* GAUSS*sche Krümmung der Fläche die* STUDY*sche Normalform erhält.*

Im Falle $K = 0$ ist trivialerweise $K^{*} = 0$, eine Umkehrung ist sinnlos, da es sich in diesem Falle um eine identisch verschwindende quadratische Differentialform handelt. Der Fall $K = -k^2 \neq 0$ konstanter nichtverschwindender GAUSSscher Krümmung ist auf allen Minimalflächen, auf welchen der Satz von G. RICCI-CURBASTRO gilt, unmöglich. Denn dann gilt (9) und daher

$$\bar{g}_{11} = \mathfrak{y}_p^2 = 0, \ \bar{g}_{22} = \mathfrak{z}_q^2 = 0, \ \bar{g}_{12} = \mathfrak{y}_p\, \mathfrak{z}_q = \frac{1}{k}\,,$$

alle Komponenten $\overline{g}_{ik}$ fallen konstant aus. Das führt aber auf den Widerspruch $\overline{K} = 0$. In R_4 kann mit andern Methoden die Nichtexistenz reeller Minimalflächen konstanter nichtverschwindender Gaussscher Krümmung gezeigt werden[4]). Zur Entscheidung des Existenzproblems im allgemeinen Falle $n \geqq 4$ scheidet nach unseren Ergebnissen der Satz von G. Ricci-Curbastro als Hilfsmittel aus.

Darjeeling (Himalaya)

Juni 1953.

Eingegangen am 30. 6. 1953

[4]) Vgl. M. Pinl, Monatshefte für Mathematik **58** (1954). Im Druck.