Über die maximale Dicke der ebenen Schnitte eines konvexen Körpers[1])

Von LUDWIG DANZER in Oberwolfach

Herr Professor Süss machte mich auf die folgende Frage aufmerksam: Man betrachte im $\mathfrak{R}^3$ die Gesamtheit aller konvexen Körper der Dicke[2]) eins. Welches ist die untere Grenze der maximalen Schnittdicken dieser Körper, und für welche Körper wird sie angenommen?

Sei also $\mathfrak{K}$ ein konvexer Körper im $\mathfrak{R}^3$, d seine Dicke und d_s die maximale Dicke[2]) seiner ebenen Schnitte. Wir wollen an Hand eines Beispiels zeigen, daß

$$d_s < d \tag{1}$$

sein kann.

Vorweg bemerken wir folgendes: Sei $\mathfrak{E}$ eine beliebige Ebene, für die der Schnitt $\mathfrak{S} = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{K}$ nicht leer ausfällt; $d(\mathfrak{S})$ sei die Dicke von $\mathfrak{S}$ und g_1, g_2 die zugehörigen Stützgeraden von $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{E}$. Falls man durch g_1 und g_2 ein Paar paralleler Stützebenen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ an $\mathfrak{K}$ legen kann, folgt sofort

$$d \leqq \text{Abstand}\,(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2) \leqq d(\mathfrak{S}) \leqq d_s\,.$$

Wir müssen unser Beispiel also so konstruieren, daß

(2) $\left\{\begin{array}{l}\text{zu keinem ebenen Schnitt } \mathfrak{S} \text{ durch die zugehörigen Geraden } g_1 = g_1(\mathfrak{S}) \\ \text{und } g_2 = g_2(\mathfrak{S}) \text{ parallele Stützebenen an } \mathfrak{K} \text{ gelegt werden können.}\end{array}\right.$

Sei nun $\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{E}_0 \cap \mathfrak{K}$ ein Schnitt maximaler Dicke, und seien $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ diejenigen Stützebenen an $\mathfrak{K}$, welche parallel zu $g_i(\mathfrak{S}_0)$ und orthogonal zu $\mathfrak{E}_0$ sind. Dann folgt aus (2):

$$\text{Abstand}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2) > d(\mathfrak{S}_0) = d_s\,. \tag{3}$$

(4) Ist außerdem $\mathfrak{K}$ von konstanter Breite,

so gilt $d = \text{Abstand}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$, und es ergibt sich (1) aus (3). Demnach ist (1) eine Folge von (2) und (4).

Einen Körper $\mathfrak{K}$, der zugleich (2) und (4) erfüllt, erhalten wir durch Abänderung einer Kugel $\mathfrak{K}_0$ vom Durchmesser d wie folgt:

Seien M der Mittelpunkt der Kugel, sowie $P_1, P_2, \ldots, P_8$ die Eckpunkte eines ihr einbeschriebenen Würfels. Den Punkten P_i seien auf der Sphäre kongruente

[1]) Diese Arbeit entstand im Rahmen eines Stipendiums, für das ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft auch an dieser Stelle meinen Dank aussprechen möchte.

[2]) Die Dicke sei definiert als der minimale Abstand zweier paralleler Stützebenen beziehungsweise Stützgeraden.

Kreise c_i so umbeschrieben, daß jeder von ihnen die drei benachbarten gerade berührt. In die verbleibenden sechs konkaven Kreisvierecke legen wir noch je einen kleinen Kreis $c_j (j = 9, 10, \ldots, 14)$ und zwar exzentrisch, wie in Fig. 1 angegeben (Der Mittelpunkt des Vierecks soll im Inneren von c_j liegen, jedoch P_j in keiner der Symmetrieebenen.) und so, daß wir sechs weitere, unter sich kongruente Kreise erhalten, deren Mittelpunkte P_j wieder antipodisch liegen.

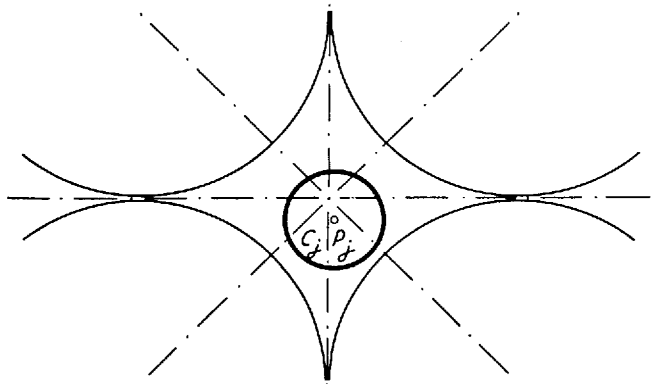

Fig. 1

Wir betrachten nun ein Antipodenpaar P_k, $P_{k'} (1 \leq k, k' \leq 14)$ und ersetzen die von c_k beziehungsweise von $c_{k'}$ umschlossenen Kugelkappen durch zwei Rotationsflächen, deren Meridianschnitt sich aus Fig. 2 ergibt ($\widehat{AC}$ und $\widehat{A'C'}$ seien Kreisbögen mit dem Mittelpunkt M_1, $\widehat{CD}$ und $\widehat{C'D'}$ solche mit dem Mittelpunkt M_2, und die ganze Figur soll symmetrisch zu $P_k P_{k'}$ sein.). Dies führen wir für alle sieben Paare antipodischer Kugelkappenpaare durch, wobei es gleichgültig ist, wie die Abplattungen und die Erhöhungen zueinander liegen.

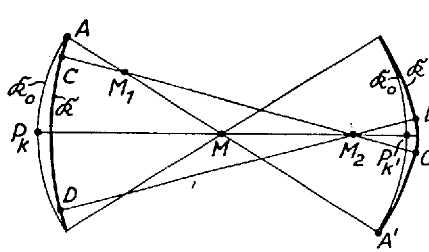

Fig. 2

Der so konstruierte konvexe Körper $\mathfrak{K}$ besitzt in jedem seiner Randpunkte genau eine Stützebene; er ist von konstanter Breite d, und jeder Randpunkt ist Endpunkt genau eines Durchmessers. Ein Durchmesser von $\mathfrak{K}$, der M enthält, ist entweder zugleich Durchmesser von $\mathfrak{K}_0$ oder er liegt auf einer der Geraden $P_k P_{k'}$.

Nehmen wir nun an, es gelte (1) bezüglich $\mathfrak{K}$ nicht, also mit Rücksicht auf (4)

$$d_s = d\,. \tag{5}$$

Wir wollen dies zum Widerspruch führen. Zunächst würde folgen, es gibt einen ebenen Schnitt $\mathfrak{S} = \mathfrak{E} \cap \mathfrak{K}$ der Dicke d, das heißt nach (4): der konstanten Breite d. $\mathfrak{S}$ enthielte also mit jedem seiner Randpunkte den zugehörigen Durchmesser von $\mathfrak{K}$. Folglich läge der Rand von $\mathfrak{S}$ gewiß nicht ganz in einer der besonders konstruierten Kappen von $\mathfrak{K}$, und $\mathfrak{S}$ besäße mindestens einen Randpunkt auf der unabgeänderten Kugel; das heißt nach dem oben Gesagten: $\mathfrak{E}$ geht durch M. — Nehmen wir weiter an, es sei R ein Randpunkt von $\mathfrak{S}$ im Inneren eines der Kreise c_k, aber nicht derjenige auf MP_k. Der zu R gehörige Durchmesser von $\mathfrak{K}$ schneidet dann $P_k P_{k'}$ in einem von M verschiedenen Punkt. $\mathfrak{E}$ enthält also von $P_k P_{k'}$ zwei verschiedene Punkte und folglich die ganze Achse. Schließlich würde damit aus (5) folgen: Es gibt eine Ebene, die M enthält und keinen der Kreise c_k exzentrisch schneidet. — Eine solche Ebene existiert aber nicht, denn die einzigen Ebenen, die diese Forderungen bezüglich c_1 bis c_8 erfüllen, sind die neun Symmetrieebenen des Würfels, und jede von diesen schneidet nach Konstruktion zwei, beziehungsweise vier der übrigen Kreise exzentrisch.

Damit ist (1) bewiesen; das heißt, *es gibt im $\mathfrak{R}^3$ konvexe Körper, deren eigene Dicke größer ist als die maximale Dicke ihrer ebenen Schnitte.*

Eingegangen am 20. 6. 1957