Zur Wachstumsordnung der Lösungen einer Klasse nichtlinearer Differentialgleichungen

Herrn HELLMUTH KNESER zum 60. Geburtstag gewidmet

Von HANS SCHUBART und HANS WITTICH in Karlsruhe

1. In verschiedenen Arbeiten [1], [2], [3], und Darstellungen [4] wurde die Wertverteilung der eindeutigen analytischen Lösungen einer nichtlinearen Differentialgleichung $w'' = P(z, w)$, wobei $P(z, w)$ ein Polynom in $w = w(z)$ und z bedeutet, untersucht. Bekanntlich [1]) sind dann nur die folgenden Fälle:

$$w'' = 6w^2 + a(z)\,, \quad a(z) = A_0 + A_1 z \tag{1}$$

und

$$w'' = 2w^3 + b(z)\,w + C\,, \quad b(z) = B_0 + B_1 z \tag{2}$$

möglich, wenn gefordert wird, daß die Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung $w'' = P(z, w)$ eindeutige analytische Funktionen sein sollen.

Die Aussagen über die Wertverteilung der Lösungen von (1) und (2) konnten in den oben genannten Arbeiten nur zum Teil auch unter der Annahme einer unendlichen[2]) Wachstumsordnung[3]) $\lambda = \overline{\lim\limits_{r=\infty}} \dfrac{\log T(r, w)}{\log r}$ gewonnen werden, während vor allem die Ergebnisse über die verzweigten Werte der Lösungen nur unter der einschränkenden Bedingung endlicher Wachstumsordnung λ [4]) bewiesen werden konnten. Um diese endliche Wachstumsordnung in allen Fällen der Differentialgleichungen (1) und (2) voraussetzen zu können, mußte auf eine Arbeit von BOUTROUX [5] zurückgegriffen werden[5]), in der die genannten Differentialgleichungen für $A_1 \neq 0$, $B_1 \neq 0$ asymptotisch integriert werden.

Sollen nun Aussagen über die Lösungen einer Differentialgleichung möglichst ohne eine — auch nur asymptotische — Integration gewonnen werden und wird die gegebene Differentialgleichung als das die (Lösungs-)Funktion definierende Element betrachtet, so ist dieser Hinweis auf die BOUTROUXsche Arbeit nicht ganz befriedigend. Ohne die Ergebnisse von BOUTROUX zu benutzen, soll daher im folgenden der nachstehende Satz bewiesen werden:

Satz. *Die Lösungen von* (1) *und* (2) *besitzen eine endliche Wachstumsordnung* λ, *die der Ungleichung* $\lambda \leqq 3$ *genügt.*

---

[1]) Siehe etwa [1].
[2]) Siehe etwa [2].
[3]) Die Bezeichnungsweise folgt R. NEVANLINNAS Lehrbuch: Eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1953.
[4]) Siehe etwa [2] und [3].
[5]) Siehe etwa [4], Seite 80.

2. Um die Schreibarbeit etwas zu erleichtern und ohne — wie sich aus dem folgenden ergibt — die allgemeine Gültigkeit des Beweises zu beeinträchtigen, können wir die Konstanten in (1) und (2) spezialisieren. Statt dieser Differentialgleichungen betrachten wir daher

$$(\mathrm{E}_1) \quad w'' = 6w^2 - 6\,, \qquad (\mathrm{E}_2) \quad w'' = 2w^3 + w + C\,,$$

bzw.

$$(\mathrm{P}_1) \quad w'' = 6w'' - 6z\,, \qquad (\mathrm{P}_2) \quad w'' = 2w^3 + zw + C\,.$$

Die Bezeichnung soll andeuten[6]), daß sich (1) und (2) für $A_1 = B_1 = 0$ mit Hilfe elliptischer Funktionen und deren Ausartungen integrieren lassen, während für $A_1 \neq 0$, $B_1 \neq 0$[7]) die beiden ersten Painlevéschen Differentialgleichungen entstehen.

Beachten wir nun, daß nach der geometrischen Deutung der Charakteristik $T(r, w)$ von SHIMIZU und AHLFORS[8])

$$T(r, w) + O(1) = \int_0^r \frac{A(t)}{t}\,dt \quad \text{mit} \quad A(r) = \frac{1}{\pi}\iint_{|z| \leqq r} \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,df_z \;{}^{9})$$

gilt, so ergibt sich wegen

$$(3) \qquad \frac{|w|^k}{(1+|w|^2)^2} \leqq 1 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

der behauptete Satz für die Lösungen von (E_1) und (E_2) sehr einfach auf folgende Weise[10]):

Wir multiplizieren (E_1) bzw. (E_2) mit w' und integrieren dann ausgehend von einem Punkt z_0, der dem Regularitätsgebiet der Lösungen angehören soll, längs eines polstellenfreien Weges in der z-Ebene. Aus (E_1) bzw. (E_2) werden damit die Beziehungen:

$$(\mathrm{E}_1') \qquad w'^2 = 4w^3 - 12w + C_1 \quad (C_1 = w'^2(z_0) - 4w^3(z_0) + 12w(z_0))\,,$$

bzw.

$$(\mathrm{E}_2') \qquad w'^2 = w^4 + w^2 + 2Cw + C_2 \quad (C_2 = w'^2(z_0) - w^4(z_0) - w^2(z_0) - 2Cw(z_0))\,,$$

woraus vermöge (3) für die Lösungen von (E_1) und (E_2)

$$(4) \qquad \frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2} \leqq K_0 < \infty$$

folgt.

Nach SHIMIZU und AHLFORS ist also

$$A(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^r \left(\frac{|w'|^2}{(1+|w|^2)^2}\,\varrho\,d\varrho\right) d\varphi \leqq K_0 r^2$$

und es gilt: *Die Lösungen von* (1) *und* (2) *haben für* $A_1 = B_1 = 0$ *eine endliche Wachstumsordnung, die der Ungleichung* $\lambda \leqq 2$ *genügt.* Sollte in dieser Ungleichung für eine Lösung der genannten Differentialgleichungen das Gleichheitszeichen richtig sein, so

---

6) Siehe etwa [3] und [1].
7) Siehe etwa [1] und [3].
8) Siehe etwa [4], Seite 13 u. f.
9) df_z bedeutet hier das Flächenelement in der z-Ebene.
10) Siehe auch [1] und [4].

gilt zusätzlich, daß diese Lösungen höchstens vom Mitteltypus[11]) der Ordnung $\lambda = 2$ sein können.

3. Für die Lösungen von (P_1) und (P_2) werden wir den folgenden Satz beweisen: *Die Wachstumsordnung λ der durch (P_1) und (P_2) definierten Painlevéschen Transzendenten ist höchstens gleich drei. Ist sie gleich drei, so sind die Lösungen höchstens vom Normaltypus dieser Wachstumsordnung.*

Zunächst erhalten wir auf die gleiche Art wie in Abschnitt 2 aus (P_1) bzw. (P_2) die Gleichungen

$$(P_1') \qquad w'^2 = 4w^3 - 12zw + 12F_1 + C_3$$

bzw.

$$(P_2') \qquad w'^2 = w^4 + zw^2 + 2Cw - F_2 + C_4 .$$

Dabei sind C_3 und C_4 Integrationskonstante und für F_1 bzw. F_2 gilt, wenn $w_1(z)$ bzw. $w_2(z)$ die Lösungen von (P_1) bzw. (P_2) bezeichnen,

$$(5_1) \quad F_1(z) = \int_{z_0}^{z} w_1(\zeta)\, d\zeta , \qquad (5_2) \quad F_2(z) = \int_{z_0}^{z} w_2{}^2(\zeta)\, d\zeta .$$

Die hier auftretenden Integrale $F_1(z)$ und $F_2(z)$ sind wegen des Polstellenverhaltens der betrachteten Funktionen[12]) wegunabhängig. Nach (3) und der geometrischen Deutung der Charakteristik $T(r, w)$ erhalten wir damit zunächst vermöge (P_1) bzw. (P_2) für $l = 1, 2$:

$$(6_l) \qquad T(r, w_l) \leqq K_l\left(r^3 + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^r \frac{|F_l|}{(1+|w_l|^2)^2}\,\varrho\, d\varrho\right) d\varphi\right) \quad (K_l < \infty) .$$

Wir müssen demnach noch zeigen, daß es zwei (endliche) Konstante K_1' und K_2' gibt, für die mit $l = 1,2$

$$(7_l) \qquad I_l = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^r \frac{|F_l|}{(1+|w_l|^2)^2}\,\varrho\, d\varrho\right) d\varphi \leqq K_l' r^3$$

gilt.

Zunächst betrachten wir I_1 und schreiben

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^r \frac{|F_1|}{(1+|w_1|^2)^2}\,\varrho\, d\varrho\right) d\varphi = \int_0^{2\pi} I_1^*(r, \varphi)\, d\varphi .$$

Den hier auftretenden Integranden $I_1^*(r, \varphi)$ werden wir nun auf einem Strahl $\varphi = \varphi_0$ $(0 \leqq \varphi_0 < 2\pi)$ der z-Ebene abschätzen. Hierzu definieren wir $L_1(\varrho, \varphi_0)$ durch

$$I_1^*(r, \varphi_0) = \int_0^r \frac{|F_1(\varrho e^{i\varphi_0})|\,\varrho}{(1+|w_1(\varrho e^{i\varphi_0})|^2)^2}\, d\varrho = \int_0^r L_1(\varrho, \varphi_0)\, d\varrho$$

und konstruieren für $L_1(\varrho, \varphi_0)$ eine obere Schranke $L_{12}(\varrho)$. Liegt nun auf dem Strahl $\varphi = \varphi_0$ ein Pol von $w_1(z)$ und damit auch ein solcher von $F_1(z)$, so gilt in

11) $\overline{\lim\limits_{r=\infty}} \dfrac{T(r, w)}{r^\lambda} = \varkappa < \infty$ bedeutet „Mittel"- oder auch „Normaltypus".

12) Siehe etwa [1] und [2].

den Umgebungen dieser Stellen $\varrho e^{i\varphi_0}$ sicher, da $w_1(z)$ Doppelpole und $F_1(z)$ einfache Polstellen besitzt[13])

$$(8_1) \qquad \varrho\,|w_1(\varrho e^{i\varphi_0})| > |F_1(\varrho e^{i\varphi_0})|\,.$$

Außerhalb dieser Polumgebungen ist aber die Funktion

$$\Phi_1(\varrho) = |F_1(\varrho e^{i\varphi_0})| - \varrho\,|w_1(\varrho e^{i\varphi_0})|$$

stetig, wir sparen daher neben den möglichen Polumgebungen auf dem Strahl $\varphi = \varphi_0$ noch die Strecken aus, auf denen $\Phi_1(\varrho) < 0$ oder m. a. W. (8_1) gilt. Für diese Strecken und die Polumgebungen erhalten wir nach (3)

$$(9_1) \qquad L_1(\varrho, \varphi_0) < \varrho^2 = L_{12}(\varrho)\,.$$

Für diese zunächst nur in gewissen Teilen des Strahls $\varphi = \varphi_0$ definierte obere Schranke $L_{12}(\varrho)$ von $L_1(\varrho, \varphi_0)$ gilt demnach

$$(10_1) \qquad \frac{dL_{12}(\varrho)}{d\varrho} = 2\varrho \leqq \frac{2L_{12}(\varrho)}{\varrho}\,.$$

Diese Differentialungleichung werden wir aber für eine entsprechend zu definierende obere Schranke in jedem Punkt des betrachteten Strahls bestätigen können und damit den behaupteten Satz beweisen. Da nämlich auf den restlichen Intervallen des Strahls $\varphi = \varphi_0$ $\Phi_1(\varrho) \geqq 0$, d. h.

$$(11_1) \qquad |F_1(\varrho e^{i\varphi_0})| \geqq \varrho\,|w_1(\varrho e^{i\varphi_0})|$$

gilt, setzen wir dort wegen

$$L_1(\varrho, \varphi_0) = \frac{|F_1(\varrho e^{i\varphi_0})|\,\varrho}{(1 + |w_1(\varrho e^{i\varphi_0})|^2)^2} \leqq \varrho\,|F_1(\varrho e^{i\varphi_0})|$$

$$L_{12}(\varrho) = \varrho\,|F_1(\varrho e^{i\varphi_0})|\,.$$

Mit $F_1(z) = u_1 + iv_1$, $F_1{}'(z) = w_1(z)$,

$$\frac{d}{d\varrho}|F_1| = \frac{d}{d\varrho}\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{uu_\varrho + vv_\varrho}{\sqrt{u^2 + v^2}} \leqq {}^{14)}\, \frac{\sqrt{u^2 + v^2}\,\sqrt{u_\varrho^2 + v_\varrho^2}}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \sqrt{u_\varrho^2 + v_\varrho^2} = |w_1|$$

gilt nun weiter:

$$\frac{dL_{12}(\varrho)}{d\varrho} = |F_1(\varrho e^{i\varphi_0})| + \varrho\frac{d}{d\varrho}|F_1(\varrho e^{i\varphi_0})| \leqq |F_1(\varrho e^{i\varphi_0})| + \varrho\,|w_1| \leqq \text{(nach } (11_1))$$
$$\leqq |F_1| + |F_1| = 2\,|F_1| = \frac{2L_{12}(\varrho)}{\varrho}.$$

Damit erhalten wir zusammen mit (10_1) und gültig für alle ϱ des Strahles $\varphi = \varphi_0$

$$(12_1) \qquad L_1(\varrho, \varphi_0) \leqq L_{12}(\varrho)\,, \quad \frac{dL_{12}(\varrho)}{d\varrho} \leqq \frac{2L_{12}(\varrho)}{\varrho}\,.$$

Wir können also $I_1{}^*(\varrho, \varphi_0)$ folgendermaßen abschätzen:

$$I_1{}^*(r, \varphi_0) = \int_0^{\varrho_0} + \int_{\varrho_0}^{r} \leqq K'_{11} + \int_{\varrho_0}^{r} L_{12}(\varrho)\,d\varrho \qquad (1 \leqq \varrho_0 < \varrho)$$

---

[13]) Siehe etwa [1] und [2].

[14]) Nach der Schwarzschen Ungleichung.

und aus (12_1) folgt durch Integration der Differentialungleichung $L_{12}(\varrho) \leqq K_{11}'' \varrho^2$ und damit (7_1), denn die Integration nach φ verändert höchstens den konstanten Faktor der oberen Schranke von I_1.

Zum Beweis von (7_2) müssen wir lediglich (8_1) durch

$$(8_2) \qquad \varrho \, |w_2^2(\varrho e^{i\varphi_0})| > |F_2(\varrho e^{i\varphi_0})|$$

bzw. $\Phi_1(\varrho)$ durch

$$\Phi_2(\varrho) = |F_2(\varrho e^{i\varphi_0})| - \varrho \, |w_2^2(\varrho e^{i\varphi_0})|$$

ersetzen und beachten, daß $|F_2'| = |w_2^2|$ gilt. (9_2), (10_2), (11_2) und (12_2) folgen dann für ein L_{22} ganz analog.

Literaturverzeichnis

[1] H. Wittich, Eindeutige Lösungen der Differentialgleichung $w'' = P(z, w)$. Math. Ann. **125**, 355—365 (1952/53).

[2] H. Schubart, Zur Wertverteilung der Painlevéschen Transzendenten. Arch. Math. **7**, 284 bis 290 (1956).

[3] H. Schubart — H. Wittich, Über die Lösungen der beiden ersten Painlevéschen Differentialgleichungen. Math. Z. **66**, 364—370 (1957).

[4] H. Wittich, Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. Berlin 1955 (Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgebiete, Heft 8) S. 63 f.

[5] P. Boutroux, Recherches sur les transcendentes de M. Painlevé et l'étude asymptotique des l'équations différentielles. Ann. sci. Ècol. norm. sup., III. Sér. (1913/14).

Eingegangen am 1. 4. 1958