Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae
Tomus 24 (1—2), (1973), pp. 199—201.

ÜBER EINIGE VERMUTUNGEN VON L. FEJES TÓTH

Von
J. LINHART (Salzburg)

Eine Scheibe ist eine beschränkte offene konvexe Menge in der euklidischen Ebene. Unter einer *n-Nachbarnpackung* verstehen wir eine Menge disjunkter Scheiben, bei der jede Scheibe genau n andere berührt. Auf Grund des Eulerschen Polyedersatzes gibt es für $n>5$ keine n-Nachbarnpackung aus endlich vielen glatten Scheiben [1]. L. FEJES TÓTH wies darauf hin, daß es für $n<5$ sogar n-Nachbarnpackungen aus endlich vielen *kongruenten* glatten Scheiben gibt, vermutete jedoch, daß dies für $n=5$ nicht mehr gilt [1]. Wir zeigen dagegen folgenden Satz:

SATZ. *n-Nachbarnpackungen aus endlich vielen kongruenten glatten Scheiben gibt es genau für* $0\leqq n\leqq 5$.

BEWEIS. Es ist nur die Existenz einer entsprechenden 5-Nachbarnpackung nachzuweisen. Wir betrachten kongruente Scheiben, die aus einem Rechteck mit zwei an den kürzeren Seiten aufgesetzten Halbkreisen bestehen (Abb. 1). Das Verhältnis von Länge zu Breite soll dabei groß sein (z. B. 20: 1 in der Abb.).

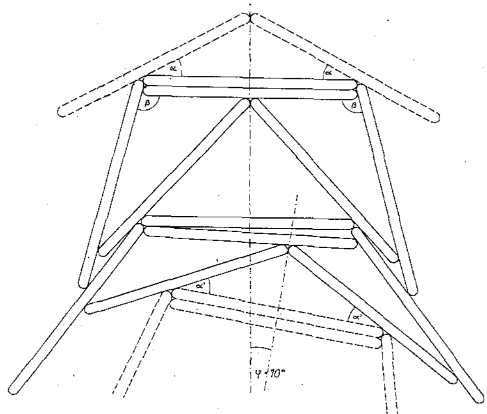

Abb. 1

Wir legen zwölf Scheiben so zusammen, wie es die Abbildung andeutet. Die Anordnung ist nicht ganz symmetrisch, wir wollen aber trotzdem von einer Symmetrieachse sprechen (in der Zeichnung strich-punktiert). Wir bilden nun eine zweite solche Gruppe von zwölf Scheiben und fügen sie, um einen Winkel φ gedreht, an die erste an. (Die genauere Lage dürfte aus der Abb. erkenntlich sein). Den Schnittpunkt der beiden Symmetrieachsen bezeichnen wir mit S_1. An die zweite Gruppe legen wir eine dritte an, um denselben Winkel φ gedreht. Den Schnittpunkt der zweiten und dritten Symmetrieachse bezeichnen wir mit S_2, usw. Die Lage der $(m+1)$-ten Gruppe relativ zur m-ten soll dabei genauso sein, wie die der zweiten zur ersten. Dann ist der Abstand $\overline{S_m S_{m+1}}$ zweier aufeinanderfolgenden Schnittpunkte konstant. Wenn wir $\varphi = \dfrac{2\pi}{k}$ mit einer nicht zu kleinen natürlichen Zahl k wählen (etwa $k=36$ in der Abb.), bilden daher die Punkte S_m die Ecken eines regelmäßigen k-Ecks. Die Anordnung schließt sich also nach k Schritten, und wir erhalten eine Packung von endlich vielen (genau $12k$) Scheiben, von denen jede genau fünf andere berührt. Damit die Gruppen wirklich in der angegebenen Weise aneinander passen, ist zu überlegen, ob es bei gegebenem φ einen Winkel α (siehe Abb.) gibt, derart, daß beim Anlegen der Scheiben der nächsten Gruppe der entsprechende Winkel α' gleich α ist. Wenn wir sehr schmale und lange Scheiben betrachten, erhalten wir den Zusammenhang zwischen β und α' näherungsweise, wenn wir die Scheiben durch Strecken ersetzen (Abb. 2). Die Beziehung zwischen α und

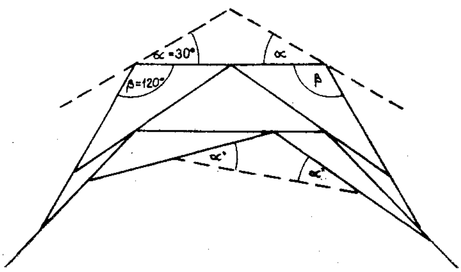

Abb. 2

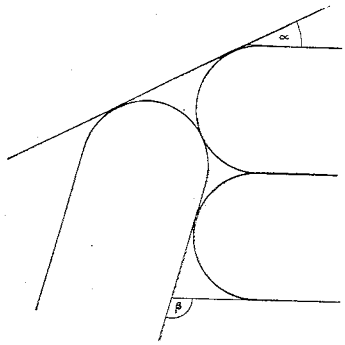

Abb. 3

β ist dagegen von der Länge unabhängig (Abb. 3). Für $\alpha = 30°$ muß $\beta \geqq 120°$ sein, und man erkennt aus Abb. 2, daß dann α' jedenfalls $<\alpha$ ist. Andererseits ist für sehr kleines α der Winkel β nur wenig größer als 90°, und wir sehen aus Abb. 4, daß

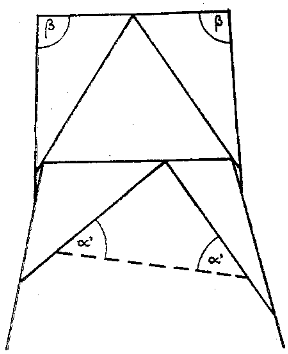

Abb. 4

dann $\alpha' > \alpha$ ist. Aus Stetigkeitsgründen muß es daher dazwischen eine Lage geben, bei der $\alpha' = \alpha$ ist.

Für n-Nachbarnpackungen von endlich vielen kongruenten Scheiben mit Minimalwinkel $\frac{2\pi}{h}$ (h reell $\geqq 2$) vermutete Fejes Tóth: $n \leqq \max(4, [h-1])$. Für glatte Scheiben ist $h=2$, auf Grund unseres Satzes ist es daher notwendig, diese Vermutung zu modifizieren. Vielleicht gilt $n \leqq \max(5, [h-1])$.

Für endliche n-Nachbarnpackungen von nicht notwendig kongruenten Scheiben vermutete Fejes Tóth: $n \leqq \max(5, [h-1])$, (h wie vorhin). Abb. 5 zeigt jedoch ein

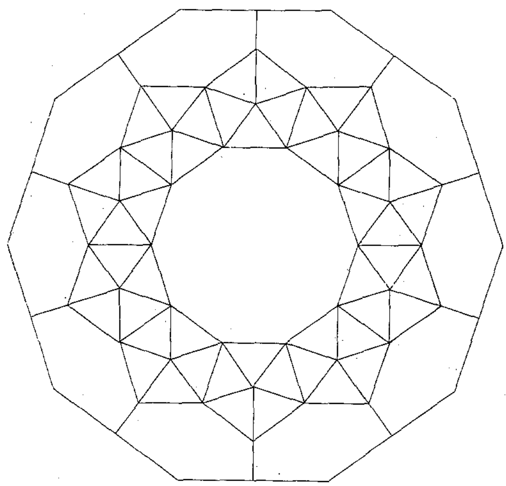

Abb. 5
Endliche 8-Nachbarnpackung für $h = 6\frac{2}{3}$

Beispiel einer endlichen 8-Nachbarnpackung mit $[h-1] = 5$. Daher bedarf auch diese Vermutung einer Abänderung. Wir haben allerdings bis jetzt keinen Anhalts-
könnte.

(Eingegangen am 5. April 1972.)

Nachtrag bei der Korrektur (12. Februar 1973.): Ein anderes Beispiel einer endlichen 5-Nachbarnpackung aus kongruenten glatten Scheiben gab G. WEGNER [2] an.

UNIVERSITÄT SALZBURG
PORSCHESTRASSE 1/E
A-5020 SALZBURG
ÖSTERREICH

Literaturverzeichnis

[1] L. FEJES TÓTH, Scheibenpackungen konstanter Nachbarnzahl, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **20** (1969), S. 375—381.
[2] G. WEGNER, Bewegungstabile Packungen konstanter Nachbarnzahl, *Studia Sci. Math. Hung.*, **6** (1971), S. 431-438.