Aequationes Mathematicae **15** (1977) 249–264
University of Waterloo
Birkhäuser Verlag, Basel

Zweidimensionale Quasialgebren mit Nullteilern

PETER PLAUMANN und KARL STRAMBACH

Abstract. We investigate quasi-algebras F with zero divisors of dimension 2 over a commutative field K which have a K-basis 1, j with an ideal Kj. Assume that j belongs to the nucleus of F. If j is an idempotent (and can not be replaced by a nilpotent element) then F is an algebra, i.e. satisfies both distributative laws. If j is nilpotent the possibilities for f depend on the solution of a functional equation first studied by Gołąb and Schinzel for the field of real numbers. We discuss this functional equation in arbitrary locally compact fields.

Unsere Note stellt einen Beitrag zur Klassifikation der 2-dimensionalen Quasialgebren dar. Über Quasikörper existieren zahlreiche Untersuchungen, so daß wir uns auf Quasialgebren mit Nullteilern beschränken. Ist die Quasialgebra A über dem Grundkörper K sogar zweiseitig distributiv, so bleiben nur zwei Möglichkeiten: die dualen Zahlen $K[x]/(x^2)$ und die pseudokomplexen Zahlen $K \oplus K$ (vgl. Benz [1]).

Wir untersuchen zweidimensionale Quasialgebren F über einem kommutativen Körper K, die eine solche K-Basis $\{1, j\}$ besitzen, daß Kj ein Ideal ist. Insbesondere diskutieren wir die Frage, wie sich die Forderung

(N) j liegt im Kern von F

auf die Struktur dieser Quasialgebren auswirkt. Es ergeben sich starke Ähnlichkeiten zum zweiseitig distributiven Fall, die es uns gestatten, die zweidimensionalen Quasialgebren mit (N) in solche vom dualen und solche vom pseudokomplexen Typ einzuteilen, je nachdem ob für Kj ein nilpotentes Ideal gewählt werden kann oder nicht. Es zeigt sich, daß eine zweidimensionale Quasialgebra über einem Körper K, welche (N) erfüllt und vom pseudokomplexen Typ ist, bereits die Algebra der pseudokomplexen Zahlen über K sein muß.

Die Klassifikation der Quasialgebren vom dualen Typ hängt von der Kenntnis der Lösungen der Gołąb-Schinzel'schen Funktionalgleichung

$$f(x + yf(x)) = f(x)f(y)$$

AMS (1970) subject classification: Primary 17E05, 16A76. Secondary 16A80, 33A70.

Eingegangen am 16.7.1975, *und in veränderter Form am* 16.10.1975.

ab. Mit den Methoden aus [2] diskutieren wir diese über beliebigen lokal kompakten Körpern. Damit folgt, daß es über einem lokal-kompakten Körper K genau dann Quasialgebren mit (N) gibt, welche keine Algebren sind, wenn K total unzusammenhängend ist. Die Forderung, daß eine zweidimensionale Quasialgebra F, welche (N) erfüllt, eine Fastalgebra ist, d.h. eine assoziative Multiplikation hat, erzwingt, daß F bereits eine Algebra ist.

Abschließend untersuchen wir die Quasialgebren von dualem Typ (welche nach dem eben gesagten die einzigen Möglichkeiten darstellen, eine zweidimensionale Algebra mit Nullteilern so zu verbiegen, daß ein Distributivgesetz und das Assoziativgesetz verletzt sind, die Bedingung (N) aber noch gilt) und stellen wesentliche Unterschiede zur Algebra der dualen Zahlen fest: Die Menge der Nichteinheiten kann größer werden als das maximale Ideal, und es können von 0 und 1 verschiedene Idempotente auftreten.

Dem ersten Anschein nach stellen die Quasialgebren vom dualen Typ natürliche Kandidaten als Koordinatenbereiche affiner Hjelmslevebenen dar. Genauere Untersuchung der erforderlichen Bedingungen (s. Bacon, §6) zeigt jedoch, daß dies nur im zweiseitig distributiven Fall zutrifft. Den daraus resultierenden Nichtexistenzsatz für Hjelmslevebenen einer bestimmten Homogenität zu formulieren, sei dem Leser überlassen.

§1. Exkurs über die Funktionalgleichung von Gołąb und Schinzel

Für unsere algebraischen Untersuchungen benötigen wir einen Überblick über stetige Lösungen der Funktionalgleichung

$$(*) \quad g(x+yg(x)) = g(x)g(y)$$

in einem lokal kompakten Körper K. Wie schon in [2] für den Fall $K=\mathbb{R}$ gezeigt wird, gelten auch bei beliebigem Körper K für eine Lösung $f \neq 0$ von (*) die Aussagen

(I) $f(0)=1$.
(II) Ist $f(a)=f(b)\neq 0$, so ist $b-a$ eine Periode von f.
(III) $f(K)$ ist eine Unterhalbgruppe der multiplikativen Halbgruppe von K.

Ist K ein topologischer Körper, so bildet die Menge der Perioden einer stetigen Funktion $f: K \to K$ eine abgeschlossene Untergruppe $P(f)$ der additiven Gruppe von K. Die Funktion f heißt *mikroperiodisch*, falls $P(f)$ nicht diskret ist. (Die Konvention, daß ein topologischer Körper nicht diskret sei, erweist sich hier als zweckmäßig.)

HILFSSATZ 1. *Ist K ein Teilkörper des topologischen Körpers L und m eine stetige K-Linearform auf L, so ist $f = 1 + m$ eine stetige mikroperiodische Lösung von* (*)

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= 1 + m(x) + m(y) + m(x)m(y) \\ &= 1 + m(x + y + ym(x)) \\ &= f(x + yf(x)). \end{aligned}$$

Ist $p \in \ker m$, so folgt aus

$$f(p) = 1 + m(p) = 1 = f(0)$$

mit (II), daß p eine Periode von f ist. Also gilt $\ker m \subseteq P(f)$. Als K-Unterraum von L trifft aber $\ker m$ jede Umgebung von 0 in L nicht-trivial. Also ist f mikroperiodisch.

BEMERKUNG 1. *Ist K ein lokal kompakter Körper, welcher kein topologischer Primkörper ist, so läßt* (*) *in K stetige mikroperiodische Lösungen zu.*

Wir wollen eine Funktion f auf einen lokal kompakten Körper *unitär* nennen, falls $f(K) \subseteq \{x \in K : \|x\| = 1\}$ gilt. (Die Topologie eines lokal kompakten (nicht diskreten) Körpers wird bekanntlich von einer Bewertung induziert. (vgl. [6], Kap. I))

HILFSSATZ 2. *In einem lokal kompakten, zusammenhängenden Körper K ist eine stetige unitäre Lösung f von* (*) *notwendig mikroperiodisch.*

Beweis. Für $K = \mathbb{R}$ ist die Behauptung klar. Im Fall $K = \mathbb{C}$ würden wir bei nicht mikroperiodischem f eine nach (II) existierende kompakte Umgebung V von 0 betrachten, auf der f injektiv ist. Dann induzierte aber f einen Homöomorphismus von V in $\{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$, was aus Dimensionsgründen unmöglich ist.

Lemma 8 aus [2] benutzt von einer Lösung f von (*) nur die Tatsache, daß f nicht unitär ist. Der Beweis von Théorème 2 in [2] bleibt also gültig.

SATZ 1. *Für einen topologischen Körper K sind die stetigen Lösungen von (*), welche weder mikroperiodisch noch unitär sind, genau die Funktionen* $f_{G,m}$ *von folgender Gestalt:*

(+) *Es ist m ein Element der multiplikativen Gruppe* K_* *von K und G eine offene Untergruppe von* K_* *mit*

$$f_{G,m}(x)=\begin{cases}1+mx & \text{für} \quad 1+mx\in G\\ 0 & \text{für} \quad 1+mx\notin G.\end{cases}$$

BEMERKUNG 2. *Im Fall* $K=\mathbb{R}$ *ist* $\mathbb{R}_+$ *die einzige offene Untergruppe von* K_*, *im Fall* $K=\mathbb{C}$ *gibt es keine solche Untergruppen. Fur lokal kompakte, zusammenhängende Korper ergeben sich an stetigen Lösungen, welche weder mikroperiodisch noch unitär sind, nur die aus [2] bekannten für* $K=\mathbb{R}$.

Ist hingegen K ein lokaler Körper, d.h. lokal kompakt und total unzusammenhängend, so hat die multiplikative Gruppe K_* von K folgende Struktur:

$$K_*\cong\mathbb{Z}\times E\times U_1$$

mit einer endlichen Gruppe E und einer kompakten Gruppe U_1, die eine absteigende Filtrierung $\{U_i\}$ mit $U_i/U_{i+1}\cong\mathbb{Z}(p)$ besitzt (vgl. [3], §15). Insbesondere besitzt also K_* unendlich viele offene Untergruppen G. Da 0 kein Häufungspunkt einer dieser offenen Untergruppe ist, gilt für irgendein $m\in K_*$

$$(**)\quad \lim_{x\to 0} x\cdot g\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

Wir wollen nur für einen lokal kompakten, zusammenhängenden Körper K alle stetigen Lösungen von (*) bestimmen. Da jede echte Untergruppe von $(\mathbb{R},+)$ diskret ist, sind im Fall $K=\mathbb{R}$ die Konstanten 0,1 die einzigen mikroperiodischen Lösungen von (*), und wir können uns im Hinblick auf Satz 1 auf den Fall $K=\mathbb{C}$ beschränken.

HILFSSATZ 3. *Für eine Lösung* $g: K \to K$ *von* (*) *in einem Körper* K *und ein* $t \in K$ *sind äquivalent:*

(a) $t \in P(g)$.
(b) $t \cdot g(K) \subseteq P(g)$.

Beweis. Gilt (a), so ist $g(t) = g(0) = 1$ nach (I). Für alle $x \in K$ ist also $g(x + tg(x)) = g(x)$, woraus mit (II) folgt, daß $tg(x) \in P(g)$ ist. Also gilt (b). Wegen $1 = g(0) \in g(K)$ folgt umgekehrt (a) aus (b).

HILFSSATZ 4. *Es sei* H *eine zusammenhängende Unterhalbgruppe der multiplikativen Gruppe von* $\mathbb{C}$ *mit* $1 \in H$, *und es sei* G *der Abschluß der von* H *erzeugten Untergruppe in* $(\mathbb{C}, +)$. *Dann liegt einer der folgenden Fälle vor:*

(Aa) $H = \{1\}$ *und* $G = \mathbb{Z}$
(Ab) $1 \neq H \subseteq \mathbb{R}$ *und* $G = \mathbb{R}$
(B) $G = \mathbb{C}$.

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß H abgeschlossen ist. Dann ist klar, daß im Fall

$$H \subseteq \mathbb{R}$$

nur die Möglichkeiten (Aa) und (Ab) offenstehen. Angenommen, die Behauptung sei falsch. Dann ergeben sich folgende Möglichkeiten:

(α) $G = \mathbb{R}a$, $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
(β) $G = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b$, aber $G \neq \mathbb{Z}$
(γ) $G = \mathbb{R}a + \mathbb{Z}b$ und a, b über $\mathbb{R}$ linear unabhängig.

Im Fall (α) ist $HH \subseteq H \subseteq \mathbb{R}a$ und $HH \subseteq (\mathbb{R}a)(\mathbb{R}a) = \mathbb{R}a^2$, also $\mathbb{R}a \cap \mathbb{R}a^2 \neq \emptyset$, was wegen $a \notin \mathbb{R}$ unmöglich ist. Im Fall (β) ist G diskret, also notwendig $H = \{1\}$. Im Fall (γ) schließlich ist H in einer der Zusammenhangskomponenten $\mathbb{R}a + nb$, $n \in \mathbb{Z}$ von G enthalten. Wegen $1 \in H$ können wir $nb = 1$ wählen. Für $ra + 1 \in H$ mit $0 \neq r \in \mathbb{R}$ muß

$$r^2a^2 + 2ra + 1 = (ra+1)^2 = sa + 1$$

mit $s \in \mathbb{R}$ sein. Hieraus folgt aber $a = (s - 2r)/r^3 \in \mathbb{R}$, also ein Widerspruch.

LEMMA 1. *Ist* $0, 1 \neq g$ *eine stetige, mikroperiodische Lösung von* (*) *in* $\mathbb{C}$, *so ist* $g(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$ *und* $P(g) = \mathbb{R}a$ *mit* $0 \neq a \in \mathbb{C}$.

Beweis. Da $P(g)$ nicht diskret ist, gibt es $0 \neq a \in \mathbb{C}$ mit $Ra \subseteq P(g)$. Wegen Hilfssatz 3 ist $g(\mathbb{C}) \subseteq P(g)a^{-1}$. Wäre $g(\mathbb{C}) \not\subseteq \mathbb{R}$, so folgte mit (III) und Hilfssatz 4 hieraus $P(g) = \mathbb{C}$. Also gilt $g(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{R}$ und auch $\mathbb{R}a \subseteq P(g)$.

SATZ 2. *Die stetigen Lösungen von* (*) *in* $\mathbb{C}$ *sind gerade die Funktionen der Gestalt*

$$g(ru+sv) = h(r) \quad \text{für alle} \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist $\{u, v\}$ *eine* $\mathbb{R}$*-Basis von* $\mathbb{C}$ *und* h *eine stetige Lösung von* (*) *in* $\mathbb{R}$. *Eine solche Lösung ist mikroperiodisch mit* $P(g) = \mathbb{R}v$ (*und* $v \in \mathbb{C}$), *und* $\lim_{x\to 0} x \cdot g(1/x)$ *existiert nur für* $g = 0$ *und* $g = 1$.

Beweis. Sei g eine stetige Lösung von (*) in $\mathbb{C}$. Wegen Hilfssatz 2 und Bemerkung 2 ist g notwendig mikroperiodisch, und nach Lemma 1 ist $P(g) = \mathbb{R}v$. Sei $\{u, v\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{C}$. Dann wird wiederum nach Lemma 1 durch $h(r) = g(ru)$ eine stetige Funktion $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert, die offenbar (*) erfüllt, und wegen $P(g) = \mathbb{R}v$ gilt $g(ru+sv) = g(ru) = h(r)$. Die Umkehrung ist klar, und die zusätzlichen Behauptungen folgen aus der in [2], Théorème 1, angegebenen Form der Lösungen von (*) in $\mathbb{R}$.

§2. Die Algebraische Diskussion

Unter einer Quasialgebra F verstehen wir einen Vektorraum über einem kommutativen Körper K, auf dem eine (nicht notwendig assoziative) Multiplikation mit Einselement e so erklärt ist, daß das linke Distributivgesetz

$$a(b+c) = ab + ac \tag{1}$$

gilt und außerdem für α, $\beta \in K$ und x, $y \in F$ die Identitäten $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ und

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) = x(y\alpha) \tag{2}$$

erfüllt sind (vgl. [5]). Wie üblich identifizieren wir das Element αe mit α für beliebiges α aus K. Mit dieser Identifikation besagt (2) gerade, daß K im Zentrum von F liegt.

Ist das multiplikative Monoid von F eine Halbgruppe, d.h. assoziativ, so heiße F eine Fastalgebra.

In einer nullteilerfreien Fastalgebra von endlichem Rang über K sind die Linksmultiplikationen als injektive lineare Abbildungen auch surjektiv. Die multiplikative Halbgruppe von F besitzt eine Eins und ist somit eine Gruppe. Also ist F in diesem Fall ein Fastkörper—eine Situation, auf die wir hier nicht eingehen werden. (Die lokal kompakten zusammenhängenden Fastkörper sind alle bekannt (siehe Kalscheuer [4]).) In [5] Hilfssatz 2 haben wir gezeigt, daß eine lokal kompakte zusammenhängende Quasialgebra vom Rang 2 über $\mathbb{R}$ ohne Nullteiler ein Quasikörper ist. Im Gegensatz dazu scheinen zweidimensionale Quasialgebren mit Nullteilern bisher nicht untersucht worden zu sein.

In der Folge bezeichne F stets eine zweidimensionale Quasialgebra mit Nullteilern über einem kommutativen Körper K, welche eine K-Basis $\{1, j\}$ besitzt, so daß K_j ein Rechtsideal von F ist. Eine solche Algebra wollen wir eine zerlegbare Quasialgebra nennen. Für zweidimensionale Fastalgebren ist Zerlegbarkeit keine zusätzliche Forderung.

HILFSSATZ 5. *Eine zweidimensionale Fastalgebra F (über K) mit Nullteilern besitzt ein eindimensionales Rechtsideal.*

Beweis. Seien $r \neq 0 \neq s$ Elemente von F mit $rs = 0$. Dann ist $J = \{x \in F \mid rx = 0\}$ ein von 0 verschiedenes Rechtsideal von F, und wir dürfen $\dim_K J = 2$ annehmen. Dann ist aber Kr ein eindimensionales Rechtsideal von F.

In einer zerlegbaren Quasialgebra mit K-Basis $\{1, j\}$, für die Kj ein Rechtsideal ist, gilt zunächst

$$j^2 = \delta j \tag{3}$$

mit $\delta \in K$. Ist $\delta \neq 0$, so können wir j durch $j' = (1/\delta)j$ ersetzen und erhalten $(j')^2 = ((1/\delta)j)((1/\delta)j) = (1/\delta^2)\delta j = j'$. Also können wir zu $\delta \in \{0, 1\}$ normieren. Gibt es in F ein eindimensionales Rechtsideal Kj_1 mit $j_1^2 = 0$, so nennen wir F eine *Quasialgebra von dualem Typ* (und nehmen für eine K-Basis $\{1, j\}$ stets einen Basisvektor dieser Art); andernfalls nennen wir F eine *Quasialgebra von pseudokomplexem Typ.*

In jeder zweidimensionalen Quasialgebra F wird die Multiplikation nun vollständig durch zwei Funktionen f, $g: K \to K$ beschrieben, und zwar mittels

$$(1 + xj)j = f(x) + g(x)j, \tag{4}$$

wobei noch

$$f(0)=0, \qquad g(0)=1 \tag{5}$$

gelten muß (vgl. [5]). Die Forderung, daß F eine topologische Quasialgebra sei, bedeutet, daß K ein topologischer Körper ist, f und g stetig sind und folgende Aussagen gelten:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{\xi\to 0} \xi \cdot f\left(\frac{\eta}{\xi}\right)=0 \\ &\lim_{\xi\to 0} \xi \cdot g\left(\frac{\eta}{\xi}\right)=\delta\eta \end{aligned}\right\} \quad \text{für alle} \quad \eta \in K \tag{6}$$

(s. [5]

Wir prüfen nun nach, welche Einschränkungen bestimmte Spezialfälle des Assoziativgesetzes für Multiplikationsfunktionen f, g mit sich bringen. Genauer wollen wir fordern, daß der Basisvektor j der zerlegbaren (zweidimensionalen) Quasialgebra F im Kern von F liegt. (Der Kern oder Nukleus eines Monoids F ist bekanntlich die Menge aller Elemente $a \in F$ mit

$$(ax)y = a(xy), \qquad (xa)y = x(ay),$$
$$(xy)a = x(ya) \quad \text{für alle} \quad x, y \in F.$$

Wir weisen ausdrücklich auf die unterschiedliche Definition in [5] hin, die erzwingt, daß der Kern eine Unteralgebra ist.) Eine (zweidimensionale) zerlegbare Quasialgebra mit j im Kern heiße nuklear. Es sei angemerkt, daß wegen des Fehlens des rechten Distributivgesetzes der Kern einer Quasialgebra im allgemeinen nicht einmal ein Teilraum ist. Somit ist der Begriff der nuklearen Quasialgebra weiter als der Begriff der Fastalgebra.

Offenbar sind die Nuklearität definierenden Assoziativgesetze

$$(ja)b = j(ab) \tag{7_0}$$
$$(ab)j = a(bj) \tag{8_0}$$
$$(aj)b = a(jb) \tag{9_0}$$

der Reihe nach äquivalent zu folgenden Identitäten:

$$[j(1+\alpha j)]j = j[(1+\alpha j)j] \tag{7}$$

$$[(1+\alpha j)(1+\beta j)]j=(1+\alpha j)[(1+\beta j)j] \tag{8}$$

$$[(1+\alpha j)j]j=(1+\alpha j)\cdot j^2 \tag{9}$$

In Multiplikationsfunktionen ausgedrückt erhalten wir:

$$f(\alpha)+\delta g(\alpha)=(1+\alpha\delta)\delta \tag{7_1}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{a)} & f(\beta)+g(\beta)f(\alpha)=f\left(\dfrac{\alpha+\beta g(\alpha)}{1+\beta f(\alpha)}\right)\\[2ex] \text{b)} & \alpha f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)=g\left(\dfrac{\alpha+\beta g(\alpha)}{1+\beta f(\alpha)}\right)\end{array}\right\}\quad \text{falls}\quad \beta f(\alpha)\neq -1$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{c)} & f(\beta)+g(\beta)f(\alpha)=0\\ \text{d)} & \alpha f(\beta)+g(\alpha)g(\beta)=(\alpha+\beta g(\alpha)\delta\end{array}\right\}\quad \text{falls}\quad \beta f(\alpha)=-1 \tag{8_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\dfrac{g(\alpha)}{f(\alpha)}\right)=\delta f(\alpha)\\[2ex] g\left(\dfrac{g(\alpha)}{f(\alpha)}\right)=\delta g(\alpha)\end{array}\right\}\quad \text{für}\quad f(\alpha)\neq 0. \tag{9_1}$$

Wir untersuchen zunächst die Algebren vom pseudokomplexen Typ, d.h. den Fall $\delta=1$. Dann gilt zunächst

$$f(\alpha)+g(\alpha)=1+\alpha. \tag{7_2}$$

Ist $\beta f(\alpha)\neq -1$, so folgt aus (8_1) und (7_2) die Beziehung

$$\begin{aligned}1+\frac{\alpha+\beta g(\alpha)}{1+\beta f(\alpha)}&=(1+\alpha)f(\beta)+g(\beta)(f(\alpha)+g(\alpha))\\ &=(1+\alpha)(1+\beta).\end{aligned} \tag{$8_{2.1}$}$$

Wir nehmen nun an, daß K mindestens 4 Elemente enthält und wählen in K ein festes $\beta\neq -1$, 0. (Der Leser ist eingeladen, die Richtigkeit der späteren Behauptung in den Galoisfeldern $GF(2)$ und $GF(3)$ zu prüfen.) Es gebe in K zunächst ein Element α mit $f(\alpha)\neq -(1/\beta)$, 0. Aus $(8_{2.1})$ und (7_2) ergibt sich dann

$$\frac{\alpha+\beta(1+\alpha-f(\alpha))}{1+\beta f(\alpha)}=\alpha+\beta+\beta\alpha, \tag{$8_{2.2}$}$$

also

$$-\beta f(\alpha)=(\alpha+\beta+\alpha\beta)\beta f(\alpha) \tag{$8_{2.3}$}$$

oder

$$0=(1+\alpha)(1+\beta) \quad \text{oder} \quad f(\alpha)=0, \tag{$8_{2.4}$}$$

woraus $\alpha=-1$ folgt. Wegen der Annahme $|K|\geq 4$ gibt es β_1, $\beta_2 \in K\backslash\{-1,0\}$ mit $\beta_1 \neq \beta_2$. Für $\alpha\neq -1$ muß, wie eben gezeigt, entweder $f(\alpha)=0$ oder $f(\alpha) = -(1/\beta_1)=-(1/\beta_2)$ sein.

Also gilt

$$f(\alpha)=\begin{cases} 0 & \alpha\neq -1 \\ \gamma & \alpha=-1 \end{cases} \tag{10}$$

und wegen (7_2) dann

$$g(\alpha)=\begin{cases} 1+\alpha & \alpha\neq -1 \\ -\gamma & \alpha=-1 \end{cases} \tag{11}$$

Wäre $\gamma\neq 1$, 0, so wäre $\beta=-(1/\gamma)\neq -1$. Wegen (8_1)c) gälte dann

$$0+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\gamma=0,$$

woraus doch $\gamma=1$ folgte. Also ist entweder $\gamma=1$ oder es ist $f=0$ und $g(\alpha) = 1+\alpha$. Wir verfolgen den Fall $\gamma=1$, da sonst F zweiseitig distributiv, somit wegen der Zweidimensionalität assoziativ und dann die Algebra der pseudokomplexen Zahlen über K ist. Wir wollen nun zeigen, daß durch die Setzungen gemäß (10) und (11) mit $\gamma=1$ genau dann (7_1)–(9_1) erfüllt werden, wenn die Charakteristik von K gleich 2 ist. Der Nachweis von (7_1), (8_1)a), b) ist unproblematisch; die Aussagen gelten bei beliebiger Charakteristik Damit die Situation von (8_1)c) und (8_1)d) vorliegt, müssen wir $\alpha=-1$ und $\beta=1$ annehmen.

Für $1\neq -1$ ist

$$f(1)+g(1)f(-1)=2\neq 0$$

so daß (8_1)c) verletzt ist. Für $1=-1$ gilt dagegen

$$f(1)+g(1)\cdot f(1)=1+1=0$$

und

$$1 \cdot f(1) + g(1)g(1) = 0 = (1 + 1 \cdot g(1))\delta,$$

so daß (8_1)c) und (8_1)d) erfüllt sind. Die Voraussetzung $f(\alpha) \neq 0$ in (9_1) erzwingt $\alpha = 1$ und weiter $f(\alpha) = g(\alpha) = 1$. Also gilt auch (9_1) im Fall der Charakteristik 2.

Somit haben wir bewiesen, daß höchstens im Fall der Charakteristik 2 eine Quasialgebra F_2 vom pseudokomplexen Typ existieren kann, welche keine Algebra ist. In F_2 müßte aber an Stelle des rechten Distributivgesetzes

$$(1+\alpha j)j = \begin{cases} (1+\alpha j)j & \text{für} \quad \alpha \neq 1 \\ 1+j & \text{für} \quad \alpha - 1 \end{cases}$$

gelten. Für $\alpha = 1$ wäre dann aber

$$(1+j)^2 = (1+j) + (1+j)j = 2(1+j) = 0.$$

Die Algebra F_2 ist also von dualem Typ, unserer Definition nach somit nicht von pseudokomplexem Typ. Damit haben wir bewiesen

SATZ 3. *Eine Quasialgebra über einem kommutativen Körper K (mit mindestens 4 Elementen) von pseudokomplexem Typ ist isomorph zur Algebra der pseudokomplexen Zahlen über K.*

Für eine Quasialgebra vom dualen Typ, d.h. $\delta = 0$, folgt aus (7_1) die Beziehung $f = 0$. Damit reduzieren sich die Bedingungen (8_1) und (9_1) zu

$$(*) \quad g(\alpha + \beta g(\alpha)) = g(\alpha)g(\beta),$$

der in §1 behandelten Funktionalgleichung von Gołąb und Schinzel. Da etwa die Linearfunktionen $g(x) = 1 + cx$ in jedem Körper K Lösungen von (*) sind und da die zugehörigen Quasialgebra genau dann zweiseitig distributiv ist, wenn $g = 1$ ist, gibt es über jeden Grundkörper Quasialgebren vom dualen Typ, welche nicht zweiseitig distributiv sind.

Eine Quasialgebra vom dualen Typ ist genau dann eine Fastalgebra, wenn der folgende Spezialfall des Assoziativgesetzes gilt:

$$[(1+\alpha j)(1+\beta j)](1+\gamma j) = (1+\alpha j)[(1+\beta j)(1+\gamma j)] \quad \text{für} \quad \alpha, \beta, \gamma \neq 0. \qquad (10_0)$$

Man rechnet nach, daß (10_0) zur Beziehung

$$(1+\alpha j)j+\beta[(1+\alpha j)j]j=(1+\alpha j)[(1+\beta j)j] \tag{10_1}$$

äquivalent ist.

Mittels der Multiplikationsfunktionen f und g reduziert sich wegen $f=0$ und $j^2=0$ die Beziehung (10_1) zu

$$g(\alpha)=g(\alpha)g(\beta) \quad \text{für alle} \quad \alpha,\beta\in K, \tag{10_2}$$

also $g=1$. Somit gilt unter Berücksichtigung von Satz 3 und Hilfssatz 5 der

SATZ 4. *Eine zweidimensionale Fastalgebra F über einem kommutativen Körper K ist entweder ein Fastkörper oder die Algebra der dualen bzw. pseudokomplexen Zahlen über K.*

Anschließend wollen wir die Frage der Existenz lokal kompakter topologischer nuklearer Quasialgebren untersuchen, welche keine Algebren sind. Nach dem oben Gezeigten ist dies gleichwertig zur Existenz stetiger Lösungen von (*), welche wegen (6) zusätzlich

$$(^{**}) \quad \lim_{n\to 0} xg(x)=0$$

erfüllen. Ist K zusammenhängend, so folgt aus [2], Théorème 1 und unserem Satz 2, daß $g=1$ die einzige solche Lösung ist. Also ist jede lokal kompakte zusammenhängende nukleare Quasialgebra zweiseitig distributiv. Über $\mathbb{C}$ gibt es keinen Fastkörper von endlichem Rang, und nach [4] ist $\mathbb{C}$ der einzige Fastkörper vom Rang 2 über $\mathbb{R}$. Zusammen mit der Bemerkung 3 ergibt sich daher

KOROLLAR 1. *Eine lokal kompakte zusammenhängende nukleare Quasialgebra der Dimension 2 über ihrem Grundkörper ist zweiseitig distributiv und damit zum Körper der komplexen Zahlen oder zur Algebra der dualen bzw. pseudokomplexen Zahlen über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ isomorph.*

In der Bemerkung 2 haben wir gesehen, daß die Funktionalgleichung (*) über einem lokalen Körper nicht-konstante stetige Lösungen zuläßt, welche (**) erfüllen. Also gilt

KOROLLAR 2. *Über einem lokalen Körper gibt es unendlich viele nicht-isomorphe nukleare Quasialgebren, welche keine Algebren sind; diese sind alle von dualem Typ.*

Wir untersuchen noch, wie stark unsere Definition der nuklearen Quasialgebren die Klasse der zerlegbaren einschränkt.

SATZ 5. *Für eine Quasialgebra F über einem kommutativen Körper K mit einer K-Basis $\{1, j\}$ und $j^2=0$ sowie den Multiplikationsfunktionen f und g sind die folgenden Bedingungen äquivalent*

(a) *Kj ist ein (zweiseitiges) Ideal*
(b) $f=0$
(c) *Für beliebige x, $y \in F$ gilt*

$$j(xy)=(jx)y$$
$$x(jy)=(xj)y.$$

Ist überdies eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt, so ist F sogar nuklear:

(d) *g erfüllt die Funktionalgleichung von Gołąb-Schinzel*
(e) *Es gilt $(xy)j=x(yj)$ für alle x, $y \in F$.*

Beweis. Wegen $(Kj)(1+\alpha j)=Kj$ ist Kj stets ein Linksideal, so daß wir (a) abschwächen können zu (a′) Kj ist ein Rechtsideal.

Wegen $(1+\alpha j)j=f(\alpha)+g(\alpha)j$ sind (a′) und (b) äquivalent. Ist $f=0$, so gelten wegen $\delta=0$ die Beziehungen (7_1) und (9_1) und somit auch (7_0) und (9_0), daher gilt (c). Daß (c) die Beziehung (b) impliziert, ist klar. Die übrigen Behauptungen sind alle bereits gezeigt worden.

Wie Satz 5 zeigt, ist in den Quasialgebren F von dualem Typ der Teilraum Kj das größte zweiseitige Ideal. Im Gegensatz zur Algebra der dualen Zahlen über dem Körper K ist die Menge der Nichteinheiten von F im allgemeinen echt größer als Kj. Genauer gilt die

BEMERKUNG 3. *Es sei F eine Quasialgebra über dem Körper K mit den Multiplikationsfunktionen f, g und der zugehörigen Basis $\{1, j\}$, für die $j^2=0$ gilt und Kj ein zweiseitiges Ideal ist. Für ein Element $x=1+\alpha j$ mit $0 \neq \alpha \in K$ folgt*

(i) *Genau dann besitzt x ein Rechtsinverses y, wenn $g(\alpha)\neq 0$ ist; in diesem Fall ist*

$$y=1-\frac{\alpha}{g(\alpha)}j$$

(ii) *Genau dann besitzt x ein Linksinverses*

$$y=1+\beta j, \quad \textit{wenn} \quad \alpha=-\frac{\beta}{g(\beta)}$$

erfüllt ist.

Beweis. Die Gleichung

$$1=(1+\xi j)(1+\eta j)=1+(\xi+\eta g(\xi))j$$

ist zu $0=\xi+\eta g(\xi)$ gleichwertig.

Unsere Überlegungen in §1 zeigen, daß Lösungen der Funktionalgleichung (*) im allgemeinen weder die Bedingung unter (i) noch unter (ii) für alle $\alpha\in K$ erfüllen.

In Quasialgebren von dualem Typ sind die Bedingungen (i) und (ii) der Bemerkung 4 nicht unabhängig. Es gilt die

BEMERKUNG 5. *In einer nuklearen Quasialgebra F ist jedes Element, das ein einseitiges Inverses besitzt, bereits eine Einheit.*

Beweis. In der Algebra der pseudokomplexen Zahlen ist die Behauptung offensichtlich. Sei also F von dualem Typ. Ist $g(\alpha)\neq 0$, so ist

$$\left(1-\frac{\alpha}{g(\alpha)}j\right)(1+\alpha j)=1+\left[-\frac{\alpha}{g(\alpha)}+\alpha g\left(-\frac{\alpha}{g(\alpha)}\right)\right]j.$$

Wegen der Funktionalgleichung (*) für g gilt

$$g(\alpha)g\left(-\frac{\alpha}{g(\alpha)}\right)=g\left(\alpha-\frac{\alpha}{g(\alpha)}g(\alpha)\right)=g(0)=1,$$

woraus

$$\left(1-\frac{\alpha}{g(\alpha)}j\right)(1+\alpha j)=1$$

und mit Bemerkung 4 die Behauptung folgt.

Abschließend überlegen wir uns, daß das bereits in der Algebra F_2 über einem Körper K der Charakteristik 2 beobachtete Phänomen durchaus kein Sonderfall ist: Im Gegensatz zur Algebra der dualen Zahlen über einem Körper K können in Quasialgebren von dualem Typ über einem Körper K von 0 und 1 verschiedene Idempotente auftreten.

BEMERKUNG 6. *Es sei F eine nukleare Quasialgebra über einem kommutativen Körper K und $\{1, j\}$ eine K-Basis von F mit den zugehörigen Multiplikationsfunktionen f, g; außerdem sei Kj ein Ideal von F und es gelte $j^2=0$. Gibt es $\alpha \in K$ mit $g(\alpha)=0$, so erfüllt das Element $i=(1+\alpha j)\in F$ die Beziehungen $ij=0$ und $i^2=i$.*

Beweis. Gemäß Satz 5 ist $f=0$. Hieraus folgt

$$ij=(1+\alpha j)j=g(\alpha)j=0$$

und

$$i^2=(1+\alpha j)(1+\alpha j)=1+\alpha j+\alpha g(\alpha)j=1+\alpha j=i.$$

Wir haben bereits erwähnt, daß Lösungen der Funktionalgleichung (*) im allgemeinen Nullstellen haben. Dies zeigt, daß in Quasialgebren von dualem Typ sehr häufig ein Element i wie in Bemerkung 6 existiert.

REFERENCES

[0] BACON, P. Y., *Coordinatized Hjelmslev Planes.* Thesis, University of Florida, Gainsville, 1974.

[1] BENZ, W., *Vorlesungen über Geometrie der Algebren.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1943.

[2] GOŁĄB, S. and SCHINZEL, A., *Sur l'equation fonctionelle* $f[x+y\cdot f(x)]=f(x)\cdot f(y)$. Publ. Math. Debrecen *6* (1959), 113–125.

[3] HASSE, H., *Zahlentheorie.* Akademie-Verlag, Berlin 1963.

[4] KALSCHEUER, F., *Die Bestimmung aller stetigen Fastkörper über dem Körper der scellen Zahlen als Grundkörper.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg *13* (1940), 413–435.

[5] PLAUMANN, P. and STRAMBACH, K., *Zusammenhängende Quasikörper mit Zentrum*. Arch. Math., (Basel) *21* (1970), 455–465.
[6] WEIL, A., *Basic number theory*. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1973.

Mathematisches Institut
der Universität
852 *Erlangen*
Bismarckstraße 1 1/2
Germany