Aequationes Mathematicae 47 (1994) 175–190
University of Waterloo
0001-9054/94/030175-16 $1.50 + 0.20/0

Sur les fonctions de pluralité

Z. MOSZNER

Résumé. On donne une forme de la solution générale de l'équation fonctionnelle conditionnelle

$$f(x)f(y) \neq \underline{0} \Rightarrow f(x+y) = f(x)f(y),$$

où $f\colon R^n_+ \to R^n_+$, pour $n = 2$ et n arbitraire. On caractérise aussi des solutions continues, de plus on résout un problème du F. S. Roberts et un problème de prolongement, en faisant une remarque au sujet des solutions homogènes.

M. Fred S. Roberts a formulé le problème ([5] Problem 1) de donner toutes les fonctions $f\colon R^n_+ := [0, \infty[^n \setminus \{\underline{0}\} \to R^n_+$ pour lesquelles

$$f(x)f(y) \neq \underline{0} \Rightarrow f(x+y) = f(x)f(y), \tag{1}$$

où $\underline{0} := (0, \ldots, 0) \in R^n$ et pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ on a $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$ et $xy = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n)$.

Une fonction remplissante (1) est dite une fonction de pluralité (généralisée [3] p. 308) et elle joue un rôle important dans la théorie du choix ([4]—dans ce travail la condition (1) est nommée "c-consistency"). Cette fonction a été aussi le thème d'une session spéciale pendant le 29ème symposium sur des équations fonctionnelles en Wolfville ([3] p. 308).

I. Le cas $n = 2$

Nous avons le

AMS (1991) subject classification: 39B40.

Manuscript received March 2, 1992 and, in final form, June 25, 1993.

THÉORÈME 1. *La fonction* f: $R_+^2 \to R_+^2$ *remplit la condition* (1) *si et seulement si* $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ *et*

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \exp[a_1(x) + a_2(y)] & si\ (x, y) \in Z_1, \\ 0 & si\ (x, y) \in Z_1' := R_+^2 \setminus Z_1, \end{cases} \tag{2}$$

$$f_2(x, y) = \begin{cases} \exp[a_3(x) + a_4(y)] & si\ (x, y) \in Z_2, \\ 0 & si\ (x, y) \in Z_2' := R_+^2 \setminus Z_2, \end{cases} \tag{3}$$

où a_1, a_2, a_3, a_4: $R \to R$ *sont des fonctions additives et* Z_1 *et* Z_2 *sont des ensembles satisfaisants aux conditions*

$$Z_1 + Z_1 \subset Z_1, \tag{4}$$

$$Z_2 + Z_2 \subset Z_2, \tag{5}$$

$$Z_1' + Z_2 \subset Z_1', \tag{6}$$

$$Z_2' + Z_1 \subset Z_2', \tag{7}$$

$$Z_1 \cup Z_2 = R_+^2. \tag{8}$$

Démonstration de "seulement si". Posons $Z_i := \{(x, y) \in R_+^2 : f_i(x, y) \neq 0\}$ pour $i = 1, 2$. La condition (1) a la forme

$$[\mathrm{I}]\begin{cases} |f_1(x_1, y_1)f_1(x_2, y_2)| + |f_2(x_1, y_1)f_2(x_2, y_2)| \neq 0 & (9) \\ \text{a pour conséquence} \\ f_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = f_1(x_1, y_1)f_1(x_2, y_2) & (10) \\ \text{et} \\ f_2(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = f_2(x_1, y_1)f_2(x_2, y_2). & (11) \end{cases}$$

Si (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in Z_1$, donc $f_1(x_1, y_1) \neq 0 \neq f_1(x_2, y_2)$ et de là d'aprés [I] on a $f_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \neq 0$, donc $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in Z_1$, d'où (4) a lieu. De même manière nous avons (5).

Soit $(x_1, y_1) \in Z_1'$ et $(x_2, y_2) \in Z_2$, donc $f_1(x_1, y_1) = 0$ et $f_2(x_2, y_2) \neq 0$. Il en résulte que $f_2(x_1, y_1) \neq 0$, d'où d'aprés [I] on a $f_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = 0$ et de là (6) a lieu. De la même manière nous avons (7).

La relation (8) a lieu puisque $f(x, y) \neq (0, 0)$ pour chaque (x, y) de R^2_+.

Nous démontrerons dans la suite que

$$(x, y) \in Z_1 \Rightarrow \forall n \in N \colon \frac{1}{n}(x, y) \in Z_1.$$

Supposons, pour la démonstration "ad absurdum", qu'il existe un (x, y) de Z_1 et un n de N tels que $(1/n)(x, y) \in Z'_1$. Puisque $f_1((1/n)(x, y)) = 0$, on a $f_2(1/n)(x, y)) \neq 0$, donc d'aprés [I],

$$f_1\left(\frac{2}{n}(x, y)\right) = 0 = f_1\left(\frac{1}{n}(x, y)\right) f_1\left(\frac{1}{n}(x, y)\right).$$

En outre, puisque $f_2((2/n)(x, y)) \neq 0$ et $f_2((2/n)(x, y)) \neq 0$ on a d'aprés [I]

$$f_1\left(\frac{3}{n}(x, y)\right) = 0 = f_1\left(\frac{1}{n}(x, y)\right) f_1\left(\frac{2}{n}(x, y)\right).$$

Similairement nous constatons que $f_1(x, y) = f_1((n/n)(x, y)) = 0$, donc la contradiction avec $(x, y) \in Z_1$. Nous avons donc d'aprés (4) la conclusion: Z_1 forme un presque-cône sur Q (c. à. d., un cône sur le corps Q des nombres rationnels sans le point $(0, 0)$).

De même nous constatons que Z_2 forme un presque-cône sur Q.

La fonction f_i considérée sur Z_i est positive, donc d'aprés [I] la fonction $\ln f_i$ sur Z_i est additive et de là homogène sur Q. Il est de même si nous prolongeons cette fonction au point $(0, 0)$, en posant sa valeur à ce point égale à 0. On peut prolonger cette fonction à la fonction additive sur R^2 tout entier ([2] Th. 2 p. 86 ou [1] Th. 5 p. 88), d'où nous avons les formes (2) et (3) pour les fonctions f_1 et f_2.

Démonstration de "si". Pour vérifier [I] pour les fonctions f_1 et f_2 de la forme (2) et (3) il suffit considérer d'aprés (8) les cas suivants: (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in (Z_1 \cap Z_2) \cup (Z_1 \cap Z'_2) \cup (Z_2 \cap Z'_1)$, donc les cas

1) $(x_1, y_1) \in Z_1 \cap Z_2$ et $(x_2, y_2) \in Z_1 \cap Z_2$,
2) $(x_1, y_1) \in Z_1 \cap Z'_2$ et $(x_2, y_2) \in Z_1 \cap Z_2$,
3) $(x_1, y_1) \in Z_2 \cap Z'_1$ et $(x_2, y_2) \in Z_1 \cap Z_2$,
4) $(x_1, y_1) \in Z_1 \cap Z_2$ et $(x_2, y_2) \in Z_1 \cap Z'_2$,
5) $(x_1, y_1) \in Z_1 \cap Z'_2$ et $(x_2, y_2) \in Z_1 \cap Z'_2$,

6) $(x_1, y_1) \in Z_2 \cap Z'_1$ et $(x_2, y_2) \in Z_1 \cap Z'_2$,
7) $(x_1, y_1) \in Z_1 \cap Z_2$ et $(x_2, y_2) \in Z_2 \cap Z'_1$,
8) $(x_1, y_1) \in Z_1 \cap Z'_2$ et $(x_2, y_2) \in Z_2 \cap Z'_1$,
9) $(x_1, y_1) \in Z_2 \cap Z'_1$ et $(x_2, y_2) \in Z_2 \cap Z'_1$.

Puisque la condition [I] est symétrique par rapport aux (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les cas 4), 7), 8) s'établissent aux cas 2), 3), 6) convenablement.

Dans le cas 1), la vérification de [I] est évidente. Dans le cas 2), l'équation (10) est vérifiée évidemment et pour (11) nous avons

$$f_2(x_1, y_1)f_2(x_2, y_2) = 0 \cdot f_2(x_2, y_2) = 0 = f_2(x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

puisque $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in Z'_2$ d'après (7).

Dans le cas 3), l'équation (11) est vérifiée évidemment et pour (10) nous avons

$$f_1(x_1, y_1)f_1(x_2, y_2) = 0 \cdot f_1(x_2, y_2) = 0 = f_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

puisque $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in Z'_1$ d'après (6).

Dans le cas 5), l'équation (10) est vérifiée et pour (11) on a

$$f_2(x_1, y_1)f_2(x_2, y_2) = 0 \cdot 0 = 0 = f_2(x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

puisque $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in Z'_2$ d'après (7).

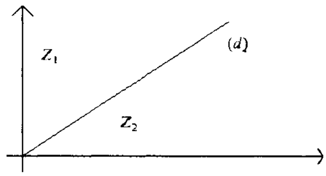
Dans le cas 6), $f_1(x_1, y_1) = 0$ et $f_2(x_2, y_2) = 0$, d'où [I] a lieu, puisque l'antécédent (9) de l'implication [I] est fausse dans ce cas.

Dans le cas 9), l'equation (11) est vérifiée évidemment et pour (10) nous avons

$$f_1(x_1, y_1)f_1(x_2, y_2) = 0 \cdot 0 = 0 = f_1(x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

puisque $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in Z'_1$ d'après (6). □

REMARQUES. (i) Il y a beaucoup d'ensembles Z_1 et Z_2 remplissants les conditions (4)–(8). Par exemple, il suffit décomposer R^2_+ aux ensembles remplissants (4) et (5) et disjoints. Nous avons cette situation si nous prenons un élément (a, b) de la base de Hamel de R^2 et pour Z_1 prenons l'ensemble de ces éléments de R^2_+ qui ont des coefficients positifs (ou non-négatifs) auprès "a" dans le développement de ces éléments par rapport à cette base de Hamel, en posant en même temps $Z_2 = R^2_+ \setminus Z_1$. Nous pouvons aussi prendre comme Z_1 et Z_2 les ensembles dans le



dessin, en ajoutant la demi-droite (d) à l'ensemble Z_1 ou à l'ensemble Z_2 ou à tous les deux ensembles en même temps (dans ce dernier cas, Z_1 et Z_2 ne sont pas disjoints, mais ils remplissent les conditions (4)–(8)).

(ii) Remarquons qu'on peut remplacer les conditions (4)–(8) par les conditions suivantes.

- L'ensemble Z_1 est un presque-cône, pour lequel Z_1' forme aussi un presque-cône, Z_2 est un presque-cône tel que $Z_2 \supset Z_1'$, pour lequel Z_2' forme aussi un presque-cône et les conditions suivantes sont remplies:

  $$(Z_1 \cap Z_2) + Z_1' \subset Z_1' \quad \text{et} \quad (Z_1 \cap Z_2) + Z_2' \subset Z_2'.$$

II. Le cas où *n* est arbitraire

Nous avons dans ce cas le

THÉORÈME 2. *Soit* $f = (f_1, \ldots, f_n)$, *où* f_v; $R_+^n \to R_+$, *et désignons par*

$$Z_v := \{(x_1, \ldots, x_n) \in R_+^n : f_v(x_1, \ldots, x_n) \neq 0\}, \qquad v = 1, \ldots, n,$$

$$i = (i_1, \ldots, i_n), \qquad j = (j_1, \ldots, j_n), i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_n \in \{0, 1\},$$

$ij = (i_1 j_1, \ldots, i_n j_n)$, $E^1 := E$, $E^0 := R_+^n \setminus E$ *pour un ensemble* $E \subset R_+^n$.
La fonction f remplit (1) *si et seulement si*

$$f_v(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \exp[a_{v1}(x_1) + \cdots + a_{vn}(x_n)] & \textit{pour } x \in Z_v, \\ 0 & \textit{pour } x \in R_+^n \setminus Z_v, \end{cases} \tag{12}$$

où $a_{v1}, \ldots, a_{vn} : R \to R$ $(v = 1, \ldots, n)$ *sont des fonctions additives et des ensembles* Z_v *remplissent les conditions suivantes*:

$$Z_1 \cup \cdots \cup Z_n = R_+^n, \tag{13}$$

$$\left.\begin{array}{l}\forall i,j\colon ij\neq \underline{0}\Rightarrow\\ Z_1^{i_1}\cap\cdots\cap Z_n^{i_n}+Z_1^{j_1}\cap\cdots\cap Z_n^{j_n}\subset Z_1^{i_1j_1}\cap\cdots\cap Z_n^{i_nj_n}.\end{array}\right\}\tag{14}$$

Démonstration de "si". Supposons que $f(x)f(y)\neq \underline{0}$, d'où il existe un k tel que $f_k(x)f_k(y)\neq 0$, donc $x,y\in Z_k=Z_k^1$. Soient i et j tels que $x\in Z_1^{i_1}\cap\cdots\cap Z_n^{i_n}$ et $y\in Z_1^{j_1}\cap\cdots\cap Z_n^{j_n}$. Nous avons $i_k=j_k=1$, donc $ij\neq\underline{0}$, d'où d'après (14) $x+y\in Z_1^{i_1j_1}\cap\cdots\cap Z_n^{i_nj_n}$, donc $x+y\in Z_v^{i_vj_v}$, $x\in Z_v^{i_v}$, $y\in Z_v^{j_v}$ pour $v=1,\ldots,n$. Si $i_vj_v=0$ on a $f_v(x+y)=0$ et $i_v=0$ ou $j_v=0$, donc $f_v(x)=0$ ou $f_v(y)=0$, d'où $f_v(x+y)=f_v(x)f_v(y)$. Si $i_vj_v\neq 0$ on a $i_v=j_v=1$, alors $f_v(x+y)=f_v(x)f_v(y)$ a lieu d'après (12). La condition (13) implique que f donnée par (12) n'est pas idéntiquement $\underline{0}$, donc elle a ses valeurs dans R_+^n.

Démonstration de "seulement si". La fonction f remplissante (1) ne peut pas être identiquement $\underline{0}$, d'où (13). Supposons que (14) n'ait pas lieu, donc ils existeraient i, j tels que $ij\neq\underline{0}$ et z tel que $z\in Z_1^{i_1}\cap\cdots\cap Z_n^{i_n}+Z_1^{j_1}\cap\cdots\cap Z_n^{j_n}$ et $z\notin Z_1^{i_1j_1}\cap\cdots\cap Z_n^{i_nj_n}$. On a $z=x+y$, où $x\in Z_1^{i_1}\cap\cdots\cap Z_n^{i_n}$ et $y\in Z_1^{j_1}\cap\cdots\cap Z_n^{j_n}$. Puisque il existe un k tel que $i_kj_k\neq 0$, on a $f_k(x)\neq 0\neq f_k(y)$, d'où $f(x)f(y)\neq\underline{0}$. De plus il existe un l tel que $z\notin Z_l^{i_lj_l}$. Si $i_lj_l=0$ on a $f_l(z)=f_l(x+y)\neq 0=f_l(x)f_l(y)$, donc (1) n'a pas lieu. Si $i_lj_l\neq 0$, d'où $i_l=j_l=1$, on a $f_l(z)=f_l(x+y)=0\neq f_l(x)f_l(y)$, donc dans ce cas (1) n'a pas lieu nonplus.

Remarquons que pour chaque $a\in R_+^n$ et pour chaque $k\in\{1,\ldots,n\}$ il existe un $i_k(a)$ tel que $a\in Z_k^{i_k(a)}$. Si x, $y\in Z_v$, alors $i_v(x)=1=i_v(y)$, d'où d'après (14)

$$\begin{aligned}x+y&\in Z_1^{i_1(x)}\cap\cdots\cap Z_n^{i_n(x)}+Z_n^{i_1(y)}\cap\cdots\cap Z_n^{i_n(y)}\\&\subset Z_1^{i_1(x)i_1(y)}\cap\cdots\cap Z_n^{i_n(x)i_n(y)}\subset Z_v^{i_v(x)i_v(y)}=Z_v.\end{aligned}$$

Chaque Z_v est donc fermé par rapport à l'addition, d'où nous recevons la forme (12) pour la fonction f par un raisonnement analogue à cel dans la démonstration du théorème 1. □

Pour n donné concrètement, en considérant toutes les possibilités concernantes i et j, nous trouvons (14) comme les conditions pour les ensembles Z_v. Dans le cas $n=2$, en prenant en considération la symétrie de la condition (14) par rapport à i et j, nous obtenons les conditions suivantes:

$$Z_1\cap Z_2+Z_1\cap Z_2\subset Z_1\cap Z_2,\qquad Z_1\cap Z_2+Z_1\cap Z_2'\subset Z_1\cap Z_2',$$

$$Z_1\cap Z_2+Z_1'\cap Z_2\subset Z_1'\cap Z_2,\qquad Z_1\cap Z_2'+Z_1\cap Z_2'\subset Z_1\cap Z_2',$$

$$Z_1'\cap Z_2+Z_1'\cap Z_2\subset Z_1'\cap Z_2.$$

Ces conditions sont moins claires que les conclusions (4)–(7). Pour $n = 3$ nous obtenons par cette méthode 22 conditions.

M. F. S. Roberts a posé aussi le problème ([5] Problem 2) de caractériser toutes les fonctions $f: R^n_+ \to 0(n)$ qui remplissent (1), où $0(n)$ est l'ensemble de tous les éléments de R^n_+ dont les coordonnées sont égaux à 0 ou 1.

Remarquons que ces fonctions sont caractérisées par le théorème 1 (pour $n = 2$) dans le cas $a_\nu(x) = 0$ et par le théorème 2 dans le cas $a_{\nu\mu}(x) = 0$.

Nous avons aussi le

THÉORÈME 3. *La fonction f remplissante* (1) *est continue seulement si $Z_\nu = \varnothing$ ou $Z_\nu = R^n_+$ pour chaque $\nu = 1, \ldots, n$ et il existe un μ tel que $Z_\mu = R^n_+$.*

Démonstration. Les ensembles Z_ν sont ouverts, donc ils ne peuvent pas être disjoints, puisque nous avons (13) et R^n_+ est connexe. Ils existent donc deux des Z_ν, soit Z_1 et Z_2, qui ne sont pas disjoints. Par conséquence, il existe un point $p \in Z_1 \cap Z_2$ et puisque $Z_1 \cap Z_2$ est ouvert, il existe un entourage E de ce point tel que $E \subset Z_1 \cap Z_2$.

Remarquons que si $q \in Z'_\nu = R^n_+ \setminus Z_\nu$ pour un $\nu = 1, \ldots, n$, alors $(1/m)q \in Z'_\nu$ pour chaque $m \in N$. En effet soit $f_\nu((1/m)q) \neq 0$; alors $f_\nu((2/m)q) = f_\nu((1/m)q)f_\nu((1/m)q) \neq 0$ et par suite $f_\nu((3/m)q) = f_\nu((1/m)q)f_\nu((2/m)q) \neq 0$, etc., donc $f_\nu(q) \neq 0$, ce qui est une contradiction avec $q \in Z'_\nu$.

Nous allons démontrer que si $q \in Z_\nu$, alors $(1/m)q \in Z_\nu$ pour chaque $m \in N$. En effet si $f_\nu((1/m)q) = 0$, il doit exister un μ tel que $f_\mu((1/m)q) \neq 0$ et de là

$$f_\mu\left(\frac{2}{m}q\right) = f_\mu\left(\frac{1}{m}q\right)f_\mu\left(\frac{1}{m}q\right) \neq 0 \quad \text{et} \quad f_\nu\left(\frac{2}{m}q\right) = f_\nu\left(\frac{1}{m}q\right)f_\nu\left(\frac{1}{m}q\right) = 0.$$

Il en résulte que

$$f_\mu\left(\frac{3}{m}q\right) = f_\mu\left(\frac{1}{m}q\right)f_\mu\left(\frac{2}{m}q\right) \neq 0 \quad \text{et} \quad f_\nu\left(\frac{3}{m}q\right) = f_\nu\left(\frac{1}{m}q\right)f_\nu\left(\frac{2}{m}q\right) = 0,$$

etc., d'où $f_\nu(q) = 0$, ce qui est en contradiction avec $q \in Z_\nu$.

Supposons maintenant qu'il existe un $q \in Z'_1 \cap Z_2$, alors $(1/m)q \in Z'_1 \cap Z_2$ pour chaque $m \in N$. En prenant m suffisamment grand nous aurions $p + (1/m)q \in E \subset Z_1 \cap Z_2$, d'où par $p \in Z_1 \cap Z_2$ on a $f_2(p)f_2((1/m)q) \neq 0$ et de là

$$0 \neq f_1\left(p + \frac{1}{m}q\right) = f_1(p)f_1\left(\frac{1}{m}q\right) = f_1(p) \cdot 0 = 0.$$

Cette contradiction nous montre que $Z_1' \cap Z_2 = \phi$, d'où $Z_2 \subset Z_1$. De même manière nous pouvons démontrer que $Z_1 \subset Z_2$, donc $Z_1 = Z_2$ si Z_1 et Z_2 ne sont pas disjoints.

Supposons qu'il existe un μ tel que $\emptyset \neq Z_\mu \neq R^n_+$. Il doit exister au moins un Z_ν tel que $Z_\nu \neq Z_\mu$, puisque nous avons (13). La somme des Z_ν qui sont différents de Z_μ forme un ensemble ouvert qui avec l'ensemble ouvert Z_μ, disjoint de cette somme, donne R^n_+ tout entier, ce qui est impossible, puisque R^n_+ est connexe.

Nous avons donc $Z_\nu = \emptyset$ ou $Z_\nu = R^n_+$ pour chaque $\nu = 1, \ldots, n$. D'après (13) au moins un Z_ν doit être égal à R^n_+. □

Remarquons que si la fonction f remplissante (1) est continue alors les fonctions $a_{\alpha\beta}(x_\beta)$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$, doivent être additives et continues.

Remarquons enfin que la fonction de pluralité peut être mesurable, n'étant pas en même temps continue. En effet p.ex. pour $n = 2$ il suffit prendre pour Z_1 et Z_2 les presque-cônes comme dans le dessin (mais tels que $Z_1 \neq \emptyset \neq Z_2$) et les fonctions a_1, a_2, a_3, a_4 continues (et additives) dans les formules (2) et (3).

III. Le problème du F. S. Roberts

M. Fred S. Roberts a posé ([5] Problem 3) le problème suivant:

– est-ce que chaque fonction f: $R^n_+ \to 0(n)$ remplissante (1) et les conditions

$$f_i(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = f_{\pi(i)}(x_1, \ldots, x_n), \tag{15}$$

où π est une permutation arbitraire de $1, \ldots, n$, et

$$f(e_i) = e_i, \tag{16}$$

où $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ avec 1 à la position "i", doit satisfaire la condition (indicator plurality function [2])

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow x_i \geqslant x_j \qquad \text{pour chaque } j = 1, \ldots, n.$$

La réponse à cette question est négative. Et voilà un exemple pour $n = 2$. Un exemple pour n arbitraire est donné indépendamment par S. Z. Rosenbaum dans [6].

Soit B la base de Hamel de l'espace vectoriel R sur le corps Q des nombres rationnels, telle que $1 \in B$ et désignons par $r(x)$, pour x dans R, le coefficient auprès de 1 dans le développement de x dans la base B. Posons

$$E_1 := \{a > 0\colon r(a) > 0\},$$

$$E_2 := \{a > 0\colon r(a) \le 0\},$$

$$D_a := \{(x_1, x_2) \in R_+^2 : x_2 = x_1 + a\} \qquad \text{si } a \in E_1,$$

$$D_a := \{(x_1, x_2) \in R_+^2 : x_2 = x_1 - a\} \qquad \text{si } a \in E_2,$$

$$D_0 := \{(x_1, x_2) \in R_+^2 : x_2 = x_1\},$$

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_1, x_2) \in \bigcup_{a \in E_1 \cup E_2} D_a =: Z, \\ 0 & \text{si } (x_1, x_2) \in R_+^2 \backslash Z =: Z_1, \end{cases}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x_1, x_2) \in R_+^2 \backslash (Z \cup D_0), \\ 1 & \text{si } (x_1, x_2) \in Z \cup D_0 =: Z_2. \end{cases}$$

Pour démontrer que $f = (f_1, f_2)$ remplit (1) il suffit de montrer que les ensembles Z_1 et Z_2 satisfont aux conditions (4)–(8). Soient (x_1, x_2), (y_1, y_2) dans Z_1, donc (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \notin Z$. Si $x_1 < x_2$, donc $x_2 - x_1 > 0$ et puisque $x_2 = x_1 + (x_2 - x_1)$ et $(x_1, x_2) \notin Z$, alors $r(x_2 - x_1) \le 0$. Si $x_1 > x_2$, donc $x_1 - x_2 > 0$ et puisque $x_2 = x_1 - (x_1 - x_2)$ et $(x_1, x_2) \notin Z$, alors $r(x_1 - x_2) > 0$, d'où $r(x_2 - x_1) < 0$. Si $x_1 = x_2$, on a $r(x_2 - x_1) = 0$. Nous avons la même situation pour la paire (y_1, y_2). Puisque $x_2 + y_2 = x_1 + y_1 + [(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)]$ et $r((x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)) = r(x_2 - x_1) + r(y_2 - y_1) \ge 0$, donc $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \notin D_a$ pour chaque a de E_1. Si $x_1 > x_2$ ou $y_1 > y_2$ on a $r(x_1 - x_2) > 0$ ou $r(y_1 - y_2) > 0$, donc $r((x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)) = r(x_1 - x_2) + r(y_1 - y_2) > 0$, d'où d'après $x_2 + y_2 = x_1 + y_1 - [(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)]$ la paire $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \notin D_a$ pour chaque a de E_2. Si $x_1 \leqslant x_2$ et $y_1 \leqslant y_2$, alors $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \leqslant 0$, d'où $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \notin D_a$ pour chaque a de E_2. Nous avons donc démontré (4).

Soient (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in Z_2$. Si $(x_1, x_2) \in D_0$, donc $x_1 = x_2$, et si $(y_1, y_2) \in D_0$, donc $y_1 = y_2$, alors $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, d'où $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in D_0 \subset Z_2$. Si $(x_1, x_2) \in D_0$ et $(y_1, y_2) \in D_a$ pour un a de $E_1 \cup E_2$, alors $x_2 + y_2 = x_1 + y_1 + (y_2 - y_1)$ ou $x_2 + y_2 = x_1 + y_1 - (y_1 - y_2)$, d'où $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in D_a$ pour un a de $E_1 \cup E_2$. Nous avons la même situation pour $(y_1, y_2) \in D_0$. Supposons que $(x_1, x_2) \in D_a$ pour un a de E_1 et $(y_1, y_2) \in D_b$ pour un b de E_1. Nous avons $r(x_2 - x_1) > 0$ et $r(y_2 - y_1) > 0$, d'où $r((x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)) > 0$, alors $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in D_c$ pour un c de E_1. Nous avons la même situation si a, $b \in E_2$. Soit $(x_1, x_2) \in D_a$ pour un

a de E_1 et $(y_1, y_2) \in D_b$ pour un b de E_2 et considérons les cas suivants:

(i) $(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) > 0$,
(ii) $(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) < 0$,
(iii) $(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) = 0$.

Dans le cas (i), puisque nous avons $r(x_2 - x_1) > 0$ et $r(y_1 - y_2) \leq 0$, la paire $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in D_c$ pour un c dans E_1. Dans le cas (ii) on a $x_2 + y_2 = x_1 + y_1 - [(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)]$ et de là $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in D_c$ pour un c dans E_2. Dans le cas (iii) $x_2 + y_2 = x_1 + y_1$, d'où $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in D_0 \subset Z_2$, c.q.f.d. La condition (5) est donc démontrée.

Pour démontrer (6) remarquons que $Z_1' = Z_2 \backslash D_0$, donc (6) a la forme $(Z_2 \backslash D_0) + Z_2 \subset Z_2 \backslash D_0$. Pour démontrer cela, il suffit d'aprés (5) montrer que si $(x_1, x_2) \in Z_2 \backslash D_0$ et $(y_1, y_2) \in Z_2$, alors $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \notin D_0$. Supposons pour la démonstration "ad absurdum" que $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in D_0$, donc $x_2 + y_2 = x_1 + y_1$, d'où avec $x_1 \neq x_2$, on a aussi $y_1 \neq y_2$. Si $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$ ou $x_1 > x_2$ et $y_1 > y_2$ nous avons une contradiction. Soit $x_1 < x_2$ et $y_1 > y_2$, d'où avec $(x_1, x_2) \in Z_2$ et $x_2 = x_1 + (x_2 - x_1)$ on a $r(x_2 - x_1) > 0$ et à cause de $(y_1, y_2) \in Z_2$ et $y_2 = y_1 - (y_1 - y_2)$ on a $r(y_1 - y_2) \leq 0$, donc $r(x_2 - x_1) \neq r(y_1 - y_2)$, contrairement à $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$. Dans le cas $x_1 > x_2$ et $y_1 < y_2$ nous avons une situation analogue. La démonstration de (6) est donc achevée.

Étant que $Z_2' = Z_1 \backslash D_0$, l'inclusion (7) prende la forme $(Z_1 \backslash D_0) + Z_1 \subset Z_1 \backslash D_0$, il suffit donc démontrer d'après (4) que si $(x_1, x_2) \in Z_1 \backslash D_0$ et $(y_1, y_2) \in Z_1$, alors $(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \notin D_0$. Supposons que $x_2 + y_2 = x_1 + y_1$, d'où par $x_1 \neq x_2$, on a aussi $y_1 \neq y_2$. Si $x_1 < x_2$ et $y_1 < y_2$ ou $x_1 > x_2$ et $y_1 > y_2$ nous avons une contradiction. Soit $x_1 < x_2$ et $y_1 > y_2$. Puisque $x_2 = x_1 + (x_2 - x_1)$ et $(x_1, x_2) \notin Z$ donc $r(x_2 - x_1) \leq 0$ et puisque $y_2 = y_1 - (y_1 - y_2)$ et $(y_1, y_2) \notin Z$ on a $r(y_1 - y_2) > 0$, nous avons une contradiction avec $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$. Dans le cas $x_1 > x_2$ et $y_1 < y_2$ nous avons la situation analogue. La démonstration de (7) est donc terminée.

La relation (8) a lieu puisque $Z_1 \cup Z_2 = (R_+^2 \backslash Z) \cup (Z \cup D_0) = R_+^2$.

La relation (15) a la forme suivante dans le cas $n = 2$:

$$f_1(x_1, x_2) = f_2(x_2, x_1), \tag{18}$$

équivalente à la condition

$$(x_1, x_2) \in Z_1 \leftrightarrow (x_2, x_1) \in Z_2. \tag{19}$$

Si $(x_1, x_2) \in Z_1$, alors $(x_1, x_2) \notin Z$. Considérons les cas

(i) $x_1 = x_2$, (ii) $x_1 < x_2$, (iii) $x_1 > x_2$.

Ad (i). $(x_2, x_1) \in D_0 \subset Z_2$.

Ad (ii). Puisque $x_2 = x_1 + (x_2 - x_1)$, alors $r(x_2 - x_1) \leq 0$ et de là, d'après $x_1 = x_2 - (x_2 - x_1)$, on a $(x_2, x_1) \in Z \subset Z_2$.

Ad (iii). Puisque $x_2 = x_1 - (x_1 - x_2)$, donc $r(x_1 - x_2) > 0$ et de là, d'après $x_1 = x_2 + (x_1 - x_2)$, on a $(x_2, x_1) \in Z \subset Z_2$.

Inversement, si $(x_1, x_2) \in Z_2$ nous avons dans le cas (i) $(x_2, x_1) \in D_0 \subset Z_1$. Dans le cas (ii) pusique $(x_1, x_2) \in Z$ et car $x_2 = x_1 + (x_2 - x_1)$, on a que $r(x_2 - x_1) > 0$, d'où $x_1 = x_2 - (x_2 - x_1)$ et de là $(x_2, x_1) \notin Z$, alors $(x_2, x_1) \in Z_1$. Dans le cas (iii) le raisonnement est analogue. Nous avons donc (19).

La condition (16) a lieu puisque $(1, 0) \in Z_1$ $(0 = 1 - 1)$ et $(0, 1) \in Z_2$ $(1 = 1 + 0)$ et la condition (17) n'est pas remplie puisque, p.ex., $f_1(\pi, 0) = 0 \neq 1$, puisque $(\pi, 0) \in Z$ $(0 = \pi - (0 \cdot 1 + \pi))$.

On peut définir la fonction f dans l'exemple aussi comme il suit:

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 < x_2 \text{ et } r(x_2 - x_1) > 0 \text{ ou } x_1 > x_2 \text{ et } r(x_2 - x_1) \geq 0, \\ 1 & \text{en outre sur } R_+^2, \end{cases}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 < x_2 \text{ et } r(x_2 - x_1) > 0 \text{ ou } x_1 \geq x_2 \text{ et } r(x_2 - x_1) \geq 0, \\ 0 & \text{en outre sur } R_+^2. \end{cases}$$

Remarquons que la définition première de la fonction f possède une simple interprétation géométrique par les droites.

Remarquons aussi que pour $n = 2$ il suffit ajouter aux conditions (1), (15) et (16) la condition

$$\forall a > 0\colon f_1(a, 0) = 1 \quad \text{ou} \quad \forall b > 0\colon f_2(0, b) = 1 \tag{20}$$

pour avoir pour la fonction $f\colon R_+^2 \to 0(2)$ l'équivalence (17).

En effet supposons que $f_1(a, 0) = 1$ pour chaque a positif. D'après (18), puisque $f(R_+^2) \subset 0(2)$, nous avons que $f_1(x, x) = 1$, d'où, d'après (1), $f_1(x, y) = 1$ pour $x \geq y$. Il en résulte d'après (18) que $f_2(x, y) = 1$ pour $x \leq y$. Puisque $f_1(0, 1) = 0$, on a $(0, 1) \in Z_1'$ et de là $(0, r) \in Z_1'$ pour chaque r positif rationnel. Il en résulte d'après (6) que $f_1(x, y) = 0$ pour $x < y$. D'après (18), cela nous donne (17).

La démonstration dans le deuxième cas dans (20) est analogue.

La question suivante se pose: pour n arbitraire la supposition complémentaire analogue à (20) suffit-elle pour avoir (17)?

Remarquons que des autres conditions complémentaires suffisantes (avec (1), (15) et (16)) pour avoir (17) sont données dans [2].

IV. Problème du prolongement

L'équation (1) est une condition liée avec le problème du choix. Dans le problème original du choix [4] la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ est définie sur l'ensemble

$$Z^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in (N \cup \{0\})^n \colon x_1 + \cdots + x_n \neq 0\}$$

et $x_1 + \cdots + x_n$ est la somme des voix données. Cette somme est bornée dans la pratique, par exemple par un nombre c. Il se pose donc l'idée de remplacer l'équation conditionnelle (1) par l'équation

$$x_1 + \cdots + x_n + y_1 + \cdots + y_m \leq c \quad \text{et} \quad f(x)f(y) \neq \underline{0} \Rightarrow f(x+y) = f(x)f(y) \qquad (21)$$

et le problème se pose de caractériser les solutions de cette équation. Ce problème est resolu par un théorème au sujet du prolongement:

THÉORÈME 4. *Chaque fonction* $f \colon E := \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n_+ \colon x_1 + \cdots + x_n \leq c\} \to R^n_+$, *qui est une solution de* (21) *peut être prolongée uniquement à une solution de* (1).

Démonstration. Définissons pour $x, y \in R^n_+$ la relation ϱ de la manière suivante:

$$x \varrho y \Leftrightarrow \exists q \in Q \colon y = qx,$$

où $qx = q(x_1, \ldots, x_n) = (qx_1, \ldots, qx_n)$. Cette relation est une équivalence. Pour chaque $C \in R^n_+/\varrho$ il existe au moins un point $r(C) = (r_1, \ldots, r_n)$ tel que $r(C) \in C$ et $r_1 + \cdots + r_n \leq c$, puisque pour chaque $x \in C$ on a $(1/m)x \in C$ $(m \in N)$ et $(1/m)x \to \underline{0}$ si $m \to \infty$. Fixons pour chaque $C \in R^n_+/\varrho$ un point $r(C)$ de cette manière et posons

$$r(x) = r(C) \quad \text{pour } x \in C \in R^n_+/\varrho.$$

Posons enfin

$$F(x) = f(r(x))^{m/p} \quad \text{pour } x = \frac{m}{p} r(x), \quad \text{où } \frac{m}{p} \in Q, \qquad (22)$$

où $z^{m/p} = (z_1, \ldots, z_n)^{m/p} = (z_1^{m/p}, \ldots, z_n^{m/p})$.

Nous allons démontrer que F est un prolongement de f et que F remplit (1).

Soit $x \in E$ et $x = (m/p)r(x)$, où $(m/p) \in Q$. On peut démontrer par induction par rapport à m que

$$f\left(m\frac{1}{p}r(x)\right) = f\left(\frac{1}{p}r(x)\right)^m.$$

Il en résulte aussi que

$$f(r(x)) = f\left(p\frac{1}{p}r(x)\right) = f\left(\frac{1}{p}r(x)\right)^p,$$

d'où

$$f\left(\frac{1}{p}r(x)\right) = f(r(x))^{1/p}.$$

Nous avons donc d'après (22)

$$f(x) = f\left(\frac{m}{p}r(x)\right) = f(r(x))^{m/p} = F(x) \quad \text{pour } x \in E. \tag{23}$$

Remarquons que

$$F\left(\frac{1}{k}x\right) = F(x)^{1/k} \quad \text{pour chaque } x \text{ dans } R^n_+ \text{ et } k \text{ dans } N. \tag{24}$$

En effet soit $x = (m/p)r(x)$, donc par (22),

$$F(x) = f(r(x))^{m/p}$$

et puisque

$$\frac{1}{k}x = \frac{m}{kp}r(x)$$

on a

$$F\left(\frac{1}{k}x\right) = f(r(x))^{m/kp},$$

d'où (24). Soient $x, y \in R^n_+$. Il existe au moins un k dans N tel que $(1/k)x + (1/k)y \in E$. Supposons que $F(x)F(y) \neq \underline{0}$, d'où $F(x)^{1/k}F(y)^{1/k} \neq \underline{0}$. Nous avons en conséquence de (23) et (24)

$$f\left(\frac{1}{k}x\right) = F\left(\frac{1}{k}x\right) = F(x)^{1/k} \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{k}y\right) = F(y)^{1/k},$$

d'où

$$f\left(\frac{1}{k}x\right)f\left(\frac{1}{k}y\right) \neq \underline{0},$$

donc d'après (21)

$$f\left(\frac{1}{k}x + \frac{1}{k}y\right) = f\left(\frac{1}{k}x\right)f\left(\frac{1}{k}y\right).$$

Il en résulte par (23) que

$$F\left(\frac{1}{k}x + \frac{1}{k}y\right) = F\left(\frac{1}{k}x\right)F\left(\frac{1}{k}y\right),$$

d'où, d'après (24),

$$F(x+y)^{1/k} = F(x)^{1/k}F(y)^{1/k},$$

donc

$$F(x+y) = F(x)F(y),$$

c.q.f.d.

Ce prolongement est unique puisque si F^* est aussi un prolongement, alors pour $x = (m/p)r(x)$ on a d'après (22) et (1)

$$F^*(x) = F^*\left(\frac{m}{p}r(x)\right) = F^*(r(x))^{m/p} = f(r(x))^{m/p} = F(x). \qquad \square$$

COROLLAIRE. *On peut obtenir chaque solution de* (21) *par le rétrécissement d'une solution de* (1) *à l'ensemble E.*

Comprenons par un entourage de $\underline{0}$ l'ensemble de la forme $R^n_+ \cap G$, où G est un ensemble ouvert dans R^n et $\underline{0} \in G$. Il résulte de la démonstration du théorème 4 que nos considérations au sujet de l'unicité du prolongement ne dépendent pas du choix de c (le nombre qui borne la somme $x_1 + \cdots + x_n$), donc la solution de (1) est déterminée par ses valeurs dans un entourage arbitraire de $\underline{0}$, c. à d., les deux solutions de (1) égaux sur un entourage de $\underline{0}$ sont idéntique sur R^n_+ tout entier. Ce résultat montre que la généralisation des considérations au sujet du choix du cas des nombres entiers au cas des nombres réels (voir [2]) n'est pas bonne puisque le résultat des choix pour une population minuscule déterminerait le résultat des choix pour toute la population.

V. Cas de l'homogénéité

Dans [3] et [4], et aussi dans une note en préparation de MM. G. L. Forti et L. Paganoni au sujet des fonctions de pluralité, on considère les solutions de (1) qui satisfont à la condition d'homogénéité

$$f(rx) = f(x) \tag{25}$$

pour chaque $x \in R^n_+$ et $r > 0$, en supposant de plus que les valeurs de f sont dans l'ensemble $0(n)$. Remarquons que du théorème 2 nous avons le

COROLLAIRE. *Chaque solution de* (1) *remplissante* (25) *pour un* $r \neq 1$ *positif et rationnel et chaque* x *dans* R^n_+, *doit avoir ses valeurs dans* $0(n)$.

Démonstration. Nous voyons de (12) que si une solution f de (1) remplit (25) pour un r alors $x \in Z_v$ entraine $rx \in Z_v$. Il en résulte d'après (12) et (25) pour $x \in Z_v$ que

$$\exp[a_{v1}(rx_1) + \cdots + a_{vn}(rx_n)] = \exp[a_{v1}(x_1) + \cdots + a_{vn}(x_n)],$$

d'où, $a_{v\mu}$ étant additives et r étant rationnel,

$$r[a_{v1}(x_1) + \cdots + a_{vn}(x_n)] = a_{v1}(x_1) + \cdots + a_{vn}(x_n)$$

et de là, vu que $r \neq 1$, on a

$$a_{v1}(x_1) + \cdots + a_{vn}(x_n) = 0.$$

Nous obtenons donc de (12) que $f_\nu(x) = 1$, c.q.f.d.

On peut donner aussi une démonstration directe (sans recours au théorème 2). Puisque $f(x) \neq \underline{0}$ en conséquence de (1) nous constatons que $f((m/p)x) = f(x)^{m/p}$, donc si $f((m/p)x) = f(x)$, on a $f(x) = f(x)^{m/p}$. Il en résulte que $f_\nu(x) = f_\nu(x)^{m/p}$ pour chaque $\nu = 1, \ldots, n$ et si $m/p \neq 1$ nous avons $f_\nu(x) = 0$ ou $f_\nu(x) = 1$, c.q.f.d.

La question se pose si le corollaire est vrai pour r irrationnel?

TRAVAUX CITÉS

[1] ACZÉL, J. et DHOMBRES, J., *Functional equations in several variables.* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[2] KUCZMA, M., *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's equation and Jensen's inequality.* PWN–Uniwersytet Śląski. Warszawa–Kraków–Katowice, 1985.

[3] Report of Meeting. *The Twenty-ninth International Symposium on Functional Equations, June 3–June 10, 1991, Wolfville, N. S.* Aequationes Math. *43* (1992), 264–309.

[4] ROBERTS, F. S., *On the indicator function of the plurality function.* Math. Social Sci. *22* (1991), 163–174.

[5] ROBERTS, F. S., *P290.* Aequationes Math. *44* (1992), 124.

[6] ROSENBAUM, S. Z., *P290S2.* Aequationes Math. *46* (1993), 317–319.

Kazimierza W.87/4,
PL-30-074 Kraków,
Poland.