Aequationes Mathematicae 35 (1988) 186–212
University of Waterloo
0001–9054/88/030186–27\$1.50 + 0.20/0

Relations de dépendance entre les équations fonctionnelles de Cauchy

JEAN DHOMBRES

Dédié avec nos meilleurs voeux à Monsieur le Professeur Otto Haupt à l'occasion de son centenaire

Résumé

Afin d'examiner les relations entre les différentes équations de Cauchy, nous résolvons, sans aucune hypothèse de régularité, l'équation fonctionnelle

$$a f(xy) + b f(x)f(y) + c f(x + y) + d (f(x) + f(y)) = 0,$$

pour des fonctions f, définies sur un anneau unifère divisible par deux et prenant leurs valeurs dans un corps, Les coefficients a, b, c, et d appartiennent au centre de ce corps. Entre autres applications, nous en déduisons qu'une seule équation, à savoir

$$f(xy) + f(x + y) = f(x)f(y) + f(x) + f(y),$$

caractérise les endomorphismes des corps dont la caractéristique est différente de 2. En introduisant la notion d'équations fonctionnelles étrangères et d'équations fonctionnelles fortement étrangères, nous concluons à l'indépendance, au sens de cette notion, des équations classiques de Cauchy.

Summary

In order to study the inter-relations between the four Cauchy functional equations, we solve the functional equation

$$a f(xy) + b f(x) f(y) + c f(x + y) + d (f(x) + f(y)) = 0.$$

The function f is defined over a ring which is divisible by 2 and which possesses a unit, while the values of f are in a(skew)-field. The constants a, b, c and d belong to this field and commute with all

---

AMS (1980) subject classification: Primary 39A20, 39A40. Secondary 13A15.

Manuscript received October 7, 1986, and in final form, April 18, 1987.

elements of the s-field. No regularity assumption is made on f. Among other applications, we show that the single equation

$$f(xy) + f(x + y) = f(x)f(y) + f(x) + f(y),$$

is enough to characterize field endormophisms in fields of characteristic different from 2. We introduce the notion of alien functional equations and that of strongly alien functional equations, to conclude that for such notions, Cauchy equations are indeed largely independent.

Introduction

Dans son célèbre *Cours d'analyse algébrique* de 1821, Cauchy résolut, sous l'hypothèse de continuité, quatre équations fonctionnelles qui portent désormais son nom [1], à savoir:

$$f(x + y) - (f(x) + f(y)) = 0, \text{ que nous notons } C_1(f) = 0, \tag{1}$$

$$f(xy) - f(x)f(y) = 0, \text{ que nous notons } C_2(f) = 0, \tag{2}$$

$$f(x + y) - f(x)f(y) = 0, \text{ que nous notons } C_3(f) = 0, \tag{3}$$

et

$$f(xy) - (f(x) + f(y)) = 0, \text{ que nous notons } C_4(f) = 0. \tag{4}$$

Pour $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'équation (1) est l'équation qualifiée d'équation additive de Cauchy. Elle est satisfaite par les fonctions linéaires $f(x) = ax$, pour une constante réelle a. L'équation (2) est l'équation des puissances car les solutions continues sont des puissances de x. L'équation (3) est l'équation exponentielle de Cauchy et pour $f:]0, \infty[= \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. L'équation (4) est l'équation logarithmique de Cauchy. Sans hypothèse de régularité sur f, et moyennant l'axiome du choix, ces équations possèdent d'autres solutions que celles mentionnées ([2] ou [5]).

Notre propos, dans ce travail, est d'examiner les relations de dépendance entre les quatre équations fonctionnelles de Cauchy. Evidemment, la conclusion varie selon ce que nous entendons par une relation de dépendance. Aussi nous allons introduire plusieurs façons de mesurer cette indépendance. Outre ces différentes notions, la nature des espaces de départ et des espaces d'arrivée des fonctions f joue un rôle certain. Nous nous proposons alors d'imposer des hypothèses de nature algébrique sur ces espaces, en évitant de faire des hypothèses de régularité sur la fonction inconnue f puisque nous savons combien de faibles hypothèses de régularité limitent les solutions des équations de Cauchy.

Premier exemple. Afin de préciser notre propos, commençons par un premier exemple bâti à partir de résultats classiques, dont nous aurons d'ailleurs besoin par la suite. Depuis Darboux au moins, on sait que les seules fonctions numériques satisfaisant simultanément (1) et (2), pour tous x et y de $\mathbb{R}$, sont la fonction identiquement nulle et la fonction identité sur $\mathbb{R}$ (Cf. [2] et [3]). Autrement dit, les équations (1) et (2) n'ont en commun que des solutions triviales, en désignant par cette expression des constantes ou l'identité. On peut alors convenir de qualifier la propriété précédente en disant que les équations (1) et (2) sont s-indépendantes sur $\mathbb{R}$ selon la définition suivante.

DÉFINITION 1. Les équations (i) et (j), pour $i, j = 1, 2, 3$ ou 4 $(i \neq j)$ sont s-indépendantes sur X, Y si les seules solutions communes $f\colon X \to Y$ à (i) et (j) sont $f \equiv 0$ ou $f(x) \equiv x$.

Par contre, il existe une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, non triviale, et qui satisfait simultanément (1) et (2) pour tous x et y de $\mathbb{C}$ (Cf. [2], [4]). Les équations (1) et (2), ne sont donc pas s-indépendantes sur $\mathbb{C}$.

Une question naturelle d'algébre, que nous ne regarderons pas ici, consiste à caractériser les anneaux A, voire les corps K, pour lesquels les équations (1) et (2) sont s-indépendantes sur A (ou K) dire (Au lieu de dire s-indépendantes sur A, A, on se contente de dire s-indépendantes sur A).

On vérifie sans peine les résultats suivants:

Les équations (2) et (3) sont s-indépendantes sur un anneau,

Les équations (1) et (3) sont s-indépendantes sur un anneau,

Les équations (1) et (4) sont s-indépendantes sur $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$, c'est-à-dire pour des fonctions $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

Les équations (1) et (4) sont a fortiori s-indépendantes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Mais (4), pour $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, n'a que la solution $f \equiv 0$, d'où notre restriction volontaire à $\mathbb{R}_+$.

Les équations (2) et (4) sont s-indépendantes sur $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}$, c'est-à-dire pour $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Elles sont a fortiori s-indépendantes sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

C'est sur une notion moins brutale d'indépendance que nous allons porter notre attention.

1. Equations étrangères

Convenons d'une définition, étant entendu que lorsque nous parlons d'une équation fonctionnelle telle que (1), pour $f: X \to Y$, nous supposons cette équation vérifiée pour tous x et y dans X. Nous noterons aussi E l'équation $E(f) = 0$.

DÉFINITION 2. Soient $E_1(f) = 0$ et $E_2(f) = 0$ deux équations fonctionnelles portant sur une fonction $f: X \to Y$ où X et Y sont des ensembles non vides. Les équations E_1 et E_2 sont étrangères relativement à X et Y, si toute solution $f: X \to Y$ de

$$E_1(f) + E_2(f) = 0, \tag{5}$$

est solution du système

$$\begin{cases} E_1(f) = 0 \\ E_2(f) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on notera $E_1 \perp E_2$ le cas où les deux équations fonctionnelles E_1 et E_2 sont étrangères.

On rappelle qu'un anneau $(A, +, \cdot)$ est (uniquement) divisible par deux si pour tout x de A il existe un (unique) y de A tel que $2y = x$. On notera 1 l'unité d'un anneau unifère. Notre premier résultat énonce un cas intéressant d'équations étrangères. Nous le généraliserons ultérieurement.

PROPOSITION 3. *Soit X un anneau unifère divisible par 2 et Y un anneau unifère tel que les deux propriétés suivantes soient satisfaites:*

(i) *$y^3 = y$ et $y \in Y$ impliquent $y = +1$, ou $y = -1$, ou $y = 0$,*

(ii) *$y^2 = 0$ et $y \in Y$ impliquent $y = 0$.*

Les équations fonctionnelles C_1 et C_2 sont étrangères relativement à X et Y.

Une autre façon d'énoncer la proposition 3, quelque peu étonnante, est de dire que la seule équation fonctionnelle

$$f(x + y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(x)f(y) \qquad (x, y \in X), \tag{7}$$

caractérise les endomorphismes entre les anneaux X et Y ayant les propriétés décrites à la proposition 3. Par définition, un endomorphisme d'anneaux satisfait les deux équations suivantes pour tous x, y de X

$$\begin{cases} f(x + y) = f(x) + f(y), \\ f(xy) \quad\;\; = f(x)f(y). \end{cases}$$

Démonstration de la proposition 3. Supposons que $f: X \to Y$ soit solution de l'équation (7). Faisons d'abord $x = 0$, puis $y = 0$ dans (7), pour déduire,

$$f(x)f(0) = f(0)f(x) = 0. \tag{8}$$

Posons $g(x) = f(x) - f(0)$. Grâce à (7) et (8), on constate que $g:X \longrightarrow Y$ satisfait également (7) avec en outre $g(0) = 0$.

Posons $a = g(1)$ et faisons $y = 1$ dans (7), de sorte que

$$g(x + 1) = (g(x) + 1)a. \tag{9}$$

Si l'on fait $x = 1$ dans (7) et que l'on compare avec (9), on a

$$ag(x) = g(x)a. \tag{10}$$

Si l'on fait $y = -1$ dans (7) et que l'on multiplie à droite par a en tenant compte de $g(x) = (g(x - 1) + 1)\,a$, déduite de (9), et de $(g(-1) + 1)a = 0$, on obtient pour tout x de X, $g(-x)a = -g(x)$, que nous écrivons plutôt sous la forme

$$g(x)a = -g(-x). \tag{11}$$

Nous en déduisons aussitôt

$$g(x)a^2 = g(x), \tag{12}$$

et en particulier avec $x = 1$,

$$a^3 = a.$$

Grâce à l'hypothèse (i) faite sur Y, on a soit $a = 0$, soit $a = 1$, soit enfin $a = -1$. Par ailleurs, grâce à l'hypothèse (ii) et $f(0)^2 = 0$ déduite de (8), on a $f(0) = 0$ et donc $f = g$.

α) Lorsque $a = 0$, d'après (12), $g = 0$ et donc $f = 0$. C'est un cas très particulier d'endomorphisme d'anneaux.

β) Lorsque $a = 1$, l'équation (11) fournit $f(x) = -f(-x)$. Changeons y en $-y$ dans (7) et additionnons à l'équation (7). Il vient

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x).$$

Faisons $x = y$ dans cette équation, et utilisons $f(0) = 0$,

$$f(2x) = 2f(x).$$

Soit encore la relation fonctionnelle,

$$f(x + y) + f(x - y) = f(2x).$$

Soient u et v deux éléments quelconques de X. Grâce à la divisibilité par 2 de X, il existe au moins un couple (x, y), avec x et y dans X, tel que $x + y = u$ et $x - y = v$.

On déduit pour tous u, v de X,

$$f(u) + f(v) = f(u + v).$$

Reportant dans (7) avec $x = u$ et $y = v$, on a

$$f(u)f(v) = f(uv).$$

Ainsi f est un homomorphisme d'anneaux.

γ) Enfin, lorsque $a = -1$, la relation (11) fournit $g(x) = g(-x)$. Changeant y en $-y$ dans (7) et soustrayant à (7), on obtient en tenant compte de $f = g$ la relation fonctionnelle,

$$f(x + y) = f(x - y).$$

Puisque X est divisible par deux, on déduit que f est une constante, qui ne peut être que nulle car $f(0) = 0$. C'est encore un endomorphisme d'anneaux et nous en avons ainsi terminé avec la démonstration de la proposition 3.

Remarque. Nous n'avons pas utilisé au cours de la démonstration toute la structure algébrique supposée sur X et Y et l'on pourrait diminuer ces hypothèses tout en conservant la conclusion de la proposition 3.

Donnons une application intéressante de la proposition 3 à des espaces fonctionnels.

Proposition 4. *Soit Z un espace topologique à la fois compact et connexe et $C_R(Z)$ l'algèbre de Banach de toutes les fonctions continues réelles définies sur Z et munie de la norme uniforme. Une application $P: C_R(Z) \to C_R(Z)$, non identiquement nulle, satisfait*

$$P(f + g) + P(fg) = Pf + Pg + P(f)P(g) \qquad (f, g \in C_R(Z)), \tag{13}$$

si et seulement s'il existe une fonction continue ψ: $Z \to Z$ et

$$Pf(z) = f(\psi(z)), \qquad (z \in Z). \tag{14}$$

Démonstration. Appliquons la proposition 3 avec $X = Y = C_R(Z)$ puisque $C_R(Z)$ a les propriétés (i) et (ii) grâce à la connexité de Z. Par suite, pour tous f et g dans $C_R(Z)$, on a simultanément

$$P(f + g) = Pf + Pg \tag{15}$$

et

$$P(fg) = P(f)P(g). \tag{16}$$

En particulier, $P(f^2) = (Pf)^2$ Ainsi l'image par P d'une fonction non négative sur Z est également non négative. De (16) également, on déduit $P(1)^2 = P(1)$ et par connexité on déduit $P(1) = (0)$ ou $P(1) = 1$ en notant 1 la fonction identiquement égale à 1 sur Z et 0 la fonction identiquement nulle. Le cas $P(1) = 0$ donne $Pf = 0$ grâce à (16). Mais par hypothèse l'application P n'est pas identiquement nulle. On a donc $P(1) = 1$. Pour a dans $\mathbb{R}$ et z_0 dans Z, on pose la fonction φ selon

$$\varphi(a) = P(a1)(z_0).$$

Il vient grâce à (15) et (16) et pour tous a et b de $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) \\ \varphi(ab) \quad\;\; = \varphi(a)\varphi(b). \end{cases}$$

Nous avons déjà dit (cf. [2]) qu'on déduisait du système de ces deux équations l'identité $\varphi(a) = a\varphi(1)$ pour tout a de $\mathbb{R}$. Cette identité fournit $P(a1) = aP(1) = a\,1$.

De même, soit $f \in C_R(Z)$ et posons pour $a \in \mathbb{R}$ et $z_0 \in Z$, $\psi(a) = P(af)(z_0)$. Avec $f = 1$, $\psi(a) = \varphi(a)(= a)$.

On dispose encore une fois de l'équation additive de Cauchy pour la fonction ψ. Puisque f est continue, et Z compact, il existe un nombre réel b et $b + af \geqslant 0$ pour tout a appartenant à un intervalle non dégénéré convenable de $\mathbb{R}$. Aussi, $\psi(a) \geqslant -b$ sur cet intervalle.

On en déduit (Cf. [2], [5]) que $\psi(a) = a\psi(1)$, c'est-à-dire

$$P(af) = aP(f) \qquad (a \in \mathbb{R}; f \in C_R(Z)).$$

L'application $P: C_R(Z) \to C_R(Z)$ est linéaire. Cet opérateur linéaire est d'ailleurs continu. En effet, P est un opérateur monotone sur $C_R(Z)$ puisqu'il transforme une fonction non négative de $C_R(Z)$ en une fonction non négative. De $-\|f\|1 \leqslant f \leqslant \|f\|1$ où $\|f\| = \sup_{\xi \in Z}|f(\xi)|$, on déduit aussitôt la majoration prouvant la continuité de P,

$$|Pf(z)| \leqslant \|f\|.$$

Il est alors facile (cf. par exemple [2], chap. 10 ou [6]) d'en déduire la forme (14) pour P, où $\psi: Z \to Z$ est une application continue. Réciproquement, un opérateur de la forme (14) satisfait évidemment l'équation (13).

REMARQUES.

1) La proposition 4 ne subsisterait pas si à la place de $C_R(Z)$ on mettait $C(Z)$, l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes.
2) Si l'on omet l'hypothèse que P n'est pas identiquement nul dans la proposition 4, on écrit à la place de (14), pour tout z de Z

$$Pf(z) = f(\psi(z))P(1)(z), \tag{17}$$

et

$$P(1)(z) = P(1)^2(z). \tag{18}$$

Dans ce cas, la forme (17) jointe à (18), fournit la solution générale de (13), même lorsque Z est réunion finie d'espaces compacts connexes disjoints. Le passage à un compact Z quelconque provient d'une modification possible de la proposition 3. Cette modification revient à faire porter une condition sur la fonction inconnue f au lieu de la faire porter sur l'anneau Y.

THÉORÈME 5. *Soit X un anneau unifère divisible par 2 et Y un anneau unifère. Soit $f: X \to Y$ pour laquelle nous supposons $f(0) = 0$.*

Dans ces conditions, la fonction f est solution de

$$f(x+y)+f(xy)=f(x)+f(y)+f(x)f(y) \qquad (x, y \in X),$$

si et seulement si, on a simultanément pour tous x, y de X

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x)+f(y) \\ f(xy) \quad\; = f(x)f(y). \end{cases}$$

On peut convenir d'énoncer ce théorème 5 en disant que les équations C_1 et C_2 sont étrangères dans la classe des fonctions $f\colon X \to Y$ nulles à l'origine (avec les propriétés dites sur X et Y).

Démonstration. Le raisonnement effectué pour la démonstration de la proposition 3 reste valable, avec les conditions du théorème 5, jusqu'à l'établissement de la relation (12). Remarquons qu'avec les notations de la démonstration de cette proposition 3, puisque $f(0)=0$, nous avons $f=g$.

Changeons y en $-y$ dans (7) et additionnons à (7) préalablement multipliée à droite par a en utilisant (11). Il vient:

$$f(x-y)-f(-x-y)=f(x)-f(-x). \tag{19}$$

Posons $h(x)=f(x)-f(-x)$ et remarquons grâce à (11) que

$$h(x)=f(x)(a+1).$$

La relation (19) devient

$$h(x)=f(x-y)-f(-x-y).$$

En particulier, faisant $y=-x$, et utilisant $f(0)=0$, on a:

$$h(x)=f(2x). \tag{20}$$

Utilisons (11) à nouveau pour déduire

$$(f(x)+f(-x))(a+1)=0.$$

Additionnons (7) à l'équation (7) dans laquelle on a changé y en $-y$ et multiplions le résultat par $(a + 1)$ en tenant compte de (19) et de (11). Il vient

$$(f(x + y) + f(x - y))(a + 1) = 2f(x)(a + 1).$$

En particulier avec $y = x$,

$$f(2x)(a + 1) = 2f(x)(a + 1).$$

D'où en utilisant la fonction h,

$$h(x + y) + h(x - y) = h(2x).$$

Comme lors de la démonstration du théorème 3, puisque X est divisible par 2, on déduit

$$h(x) + h(y) = h(x + y) \qquad (x, y \in X).$$

Grâce à (20), il vient

$$f(2x) + f(2y) = f(2x + 2y) \qquad (x,y \in X).$$

Comme X est divisible par 2, on obtient l'additivité de f, et grâce à (7), la multiplicativité de f, ce qui termine la preuve du théorème 5.

REMARQUES.

1) Le théorème 5 resterait valable si au lieu de faire $f(0) = 0$ on supposait l'existence d'un x_0 de X tel que $f(x_0)$ soit inversible à gauche dans Y. Cette dernière hypothèse, grâce à (8), fournirait aussitôt $f(0) = 0$.

La conclusion du théorème 5 subsisterait de même si Y n'était pas unifère, à condition de remplacer l'hypothèse que nous venons de faire par la suivante: il existe x_0 dans X et $f(x_0)y = 0$ pour $y \in Y$ implique $y = 0$.

2) Lorsque Y est un corps, la propriété $f(0) = 0$ est toujours satisfaite pour une solution $f: X \to Y$ de (7). Par suite, l'équation fonctionnelle (7) caractérise les endomorphismes d'anneaux $f: X \to Y$ où X est un anneau divisible par 2 et Y un corps. En particulier, *cette équation* (7) *caractérise les endomorphismes des corps dont la caractéristique est différente de* 2.
3) Si l'on ne supposait pas $f(0) = 0$, ni l'hypothèse faite à la première remarque, ni même Y unifère, mais en gardant les hypothèses sur X, on déduirait tout de

même qu'une solution $f: X \to Y$ de (7) satisfait, outre (8), le système des deux équations fonctionnelles suivantes

$$\begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0), \\ f(xy) \quad\ = f(x)f(y) + f(0). \end{cases}$$

Le théorème 5 est adapté pour généraliser la proposition 4 selon la proposition 6.

PROPOSITION 6. *Soit Z un espace compact et $C_R(Z)$ l'algèbre de Banach de toutes les fonctions continues réelles définies sur Z et munie de la norme uniforme. Une application $P: C_R(Z) \to C_R(Z)$ satisfait* (13) *si et seulement s'il existe ψ: $Z \to Z$ continue et*

$$Pf(z) = \chi(z) f(\psi(z)) \qquad (z \in Z), \tag{21}$$

où χ est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble à la fois ouvert et fermé de Z.

Démonstration. Un opérateur de la forme (21), avec les propriétés décrites de ψ et χ satisfait (13). Réciproquement, si P satisfait (13), on a $P(0) = 0$ d'après (8). On dispose donc de (15) et (16) d'après le théorème 5. En particulier $P(1)^2 = P(1)$ et ainsi $P(1) = \chi$, une fonction caractéristique et continue, donc la fonction caractéristique d'un sous-ensemble Z' la fois ouvert et fermé dans Z.

Comme pour la démonstration de la proposition 4, on montre que P est linéaire, continue et multiplicatif. Par suite, $Pf(z) = f(\varphi(z))$ pour tout z de Z' où $\varphi: Z' \to Z$ est continue. Lorsque z n'appartient pas à Z', $Pf(z) = 0$. Prolongeant par le théorème d'Urysohn φ à tout Z en une fonction continue $\psi: Z \to Z$ on obtient la forme (21).

La définition des équations fonctionnelles étrangères recèle une difficulté sémantique en ce sens que $E_1(f) = 0$ et $-E_1(f) = 0$ sont deux équations fonctionnelles ayant les mêmes ensembles de solutions, si l'on utilise des fonctions à valeurs réelles par exemple. Pourtant, E_1 et E_2 peuvent être étrangères sans que $-E_1$ et E_2 le soient. On le constate en vérifiant que sur un corps K de caractéristique différente de 2, la fonction constante $f(x) = 2$ est solution de

$$f(x) + f(y) + f(xy) = f(x+y) + f(x)f(y) \qquad (x, y \in K),$$

mais n'est pas un homomorphisme de corps. Ainsi $C_1 \perp C_2$ mais l'on n'a pas $-C_1 \perp C_2$.

Toutefois, la situation précédente n'est pas éloignée du cas des équations étrangères.

Convenons d'une nouvelle définition pour laquelle nous conservons les notations de la définition 2.

DÉFINITION 7. Deux équations fonctionnelles $E_1(f) = 0$ et $E_2(f) = 0$ sont faiblement étrangères relativement à X et Y lorsque toute fonction $f: X \to Y$ qui est une solution non constante de (5) est solution du système (6).

Cette définition est justifiée par le résultat suivant.

THÉORÈME 8. *Soit X un anneau unifère divisible par 2 et Y un corps. Les équations $\pm C_1$ et $\pm C_2$ sont faiblement étrangères relativement à X et Y.*

Démonstration. Le théorème 5 (cf. remarque 2 suivant ce théorème) prouve que C_1 et C_2 sont étrangères relativement à X et Y. Du coup $-C_1$ et $-C_2$ sont également étrangères. Il nous suffit de prouver que $-C_1$ et C_2 sont faiblement étrangères pour terminer la preuve du théorème 8. Il s'agit donc de résoudre l'équation fonctionnelle suivante pour $f: X \to Y$,

$$f(x) + f(y) + f(xy) = f(x+y) + f(x)f(y) \qquad (x, y \in X), \tag{22}$$

ou plus précisément d'en chercher les solutions non constantes et de montrer qu'elles satisfont le système (6).

Avec $y = 0$, on déduit de (22) l'égalité $(2 - f(x))f(0) = 0$. Si $f(0) \neq 0$, c'est que f est une fonction constante égale à 2. Supposons désormais $f(0) = 0$ et posons $b = f(1)$. Avec x remplacé par $x - 1$ et $y = 1$ dans (22), on déduit

$$f(x) = f(x-1)(2-b) + b.$$

On ne peut avoir $b = 2$ car alors f serait une constante égale à b, et comme $f(0) = 0$, on aurait l'égalité contradictoire $b = 0$. Par suite $(2 - b)^{-1}$ existe dans le corps Y et

$$f(x-1) = (f(x) - b)(2-b)^{-1}. \tag{23}$$

Faisons $y = -1$ dans (22) et utilisons (23) pour déduire

$$f(x) = f(-x)(b-2).$$

Changeons y en $-y$ dans (22), multiplions à droite par $(2 - b)$ et ajoutons à (22) pour obtenir

$$f(x)(3 - b) = f(x + y) + f(x - y)(2 - b). \tag{24}$$

En particulier, faisant $x = y$ dans (24) et utilisant $f(0) = 0$, on a

$$f(x)(3 - b) = f(2x). \tag{25}$$

D'où, tenant compte de (24) et de (25), on obtient la relation fonctionnelle,

$$f(2x) = f(x + y) - f(y - x). \tag{26}$$

Pour tous u, v de X, il existe x et y dans X tels que $x + y = u + v$ et $y - x = v$ puisque X est divisible par 2.

On a ainsi

$$f(u) = f(u + v) - f(v) \qquad (u, v \in X).$$

La fonction f est additive sur X et, d'après (22), également multiplicative.

Ce qui termine la démonstration du théorème 8.

Remarque. La conclusion du théorème 8 est encore valable en supposant seulement que Y, au lieu d'être un corps, est un anneau unifère, mais en ajoutant $f(0) = 0$. Il suffit en effet d'appliquer le théorème 5 et d'aménager la preuve ci-dessus du théorème 8 en ne passant pas par (23). On trouve de même (24), etc.

Corollaire 9. *Les seules solutions* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de* (22) *pour tous* x, y *de* $\mathbb{R}$ *sont*, $f(x) \equiv x$, $f(x) \equiv 0$, *et* $f(x) \equiv 2$.

Les seules solutions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de* (7) *pour tous* x, y, *de* $\mathbb{R}$ *sont*, $f(x) \equiv x$ *et* $f(x) \equiv 0$.

On peut généraliser le théorème 8 de la façon suivante.

Théorème 10. *Soit X un anneau unifère divisible par 2 et Y un corps commutatif. Soient k et l deux éléments non nuls du corps Y.*

1) *Les équations kC_1 et lC_2 sont faiblement étrangères relativement à X et Y.*
2) *Les équations kC_1 et lC_2 sont étrangères relativement à X et Y, si et seulement si, $k = l$.*

Le théorème 10 est une conséquence d'un théorème général (Théorème 11) qui mêle les quatre équations fonctionnelles de Cauchy. Remarquons toutefois que puisque nous nous plaçons sur un ensemble X possèdant un zéro, la quatrième équation C_4 n'intervient pas vraiment, comme nous l'avions remarqué dès l'introduction.

THÉORÈME 11. *Soit X un anneau unifère divisible par 2 et Y un corps. Soient a, b, c et d, quatre éléments du centre de Y. Le tableau suivant, à partir des valeurs de ces quatre éléments, fournit toutes les solutions $f: X \to Y$ de l'équation fonctionnelle*

$$af(xy) + bf(x)f(y) + cf(x + y) + d(f(x) + f(y)) = 0. \tag{27}$$

- $c + d \neq 0$
  - $a + d \neq 0$ — $f = B$
  - $a + d = 0$
    - $b \neq 0$
      - $c \neq 0$
        - $a \neq 0$ — $f = 0$; $f = (a - c)b^{-1} - b^{-1}aH$
        - $a = 0$ — $f = -cb^{-1}E$
      - $c = 0$ — $f = b^{-1}a(1 - M)$
    - $b = 0$ — $f = 0$
- $c + d = 0$
  - $b \neq 0$
    - $c \neq 0$, $d \neq 0$
      - $a \neq 0$ — $f = (c - a)b^{-1}$; $f = -b^{-1}aH$
      - $a = 0$ — $f = b^{-1}d(E - 1)$
    - $c = d = 0$ — $f = -b^{-1}aM$
  - $b = 0$
    - $a + d \neq 0$
      - $c \neq 0$, $d \neq 0$
        - $a \neq 0$ — $f = 0$
        - $a = 0$ — $f = A$
      - $c = d = 0$ — $f = 0$
    - $a + d = 0$
      - $c \neq 0$, $d \neq 0$ — $f = e$
      - $c = d = 0$ — f arbitraire

Dans le tableau, A désigne une solution quelconque de C_1 $(A: X \to Y)$;
M désigne une solution quelconque de C_2 $(M: X \to Y)$;
E désigne une solution quelconque de C_3 $(E: X \to Y)$;
H désigne une solution quelconque de C_1 et C_2 $(H: X \to Y)$.

Enfin e est un élément quelconque de Y tandis que B est un élément de Y seulement assujetti à satisfaire $(a + bB + c + 2d)B = 0$.

Démonstration du théorème 10 *à partir du théorème* 11: Commençons par le résultat 1). L'équation $kC_1 + lC_2 = 0$ est l'équation (27) avec $a = l$, et $b = -l$; $c = k$ et $d = -k$. Le corps Y est commutatif et $c + d = a + b = 0$, ainsi que $b \neq 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ puisque $k \neq 0$, $l \neq 0$. On lit dans le tableau que f est un endomorphisme d'anneaux ($f = H$) ou que $f = (l - k)l^{-1} = 1 - kl^{-1}$. Ainsi kC_1 et lC_2 sont faiblement étrangères. En outre, $kC_1 \perp lC_2$ si et seulement si $k = l$.

La démonstration du théorème 11 est un peu longue et nous lui consacrons un paragraphe. Avant de la donner, fournissons quelques conséquences de ce théorème 11, quant à notre propos d'indépendance sur les équations fonctionnelles de Cauchy. Ce théorème montre l'indépendance au sens des équations étrangères des trois équations C_1, C_2 et C_3. De façon spécifique, on a la proposition 12, qu'il est facile de vérifier avec le tableau précédent et un peu de calculs.

PROPOSITION 12. *Soit X un anneau unifère divisible par* 2 *et Y un corps de caractéristique différente de* 2. *Les équations C_1, C_2 et C_3 sont deux à deux étrangères.*

Enonçons une autre conséquence du théorème 11 dans le cas de l'axe réel.

PROPOSITION 13. *Les seules $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont solutions de*

$$f(x + y) + f(x) + f(y) = f(xy) + f(x)f(y) \tag{28}$$

sont $f(x) \equiv 0$; $f(x) \equiv 2$ et $f(x) \equiv 2 - x$.

PROPOSITION 14. *Soient a, b deux nombres réels non nuls et c un nombre réel. La fonction $f(x) \equiv x$ est l'unique fonction non constante $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de*

$$b(f(xy) - f(x)f(y)) + a(f(x + y) - f(x) - f(y)) = c \tag{29}$$

Démonstration. Faisons $y = 0$ dans (29)

$$bf(x)f(0) = (b - a)f(0) - c.$$

Puisque $b \neq 0$, si $f(0) \neq 0$, f est une constante, ce qui est refusé. Par conséquent, $f(0) = 0$ et du coup $c = 0$. On est donc ramené au théorème 10 et aux endomorphismes de $\mathbb{R}$, considéré comme un anneau.

2. Démonstration du théorème 11

Le corps Y n'est pas supposé commutatif mais a, b, c et d commutent avec tous les éléments du corps et en particulier entre eux. La démonstration du théorème 11 est en deux étapes. Dans la première étape, suivant les valeurs de $f(0)$ et de $f(1)$, on obtient toutes les solutions de l'équation fonctionnelle (27). Dans la deuxième étape, on regroupe les résultats suivant les valeurs des coefficients a, b, c et d de façon à dresser le tableau du théorème 11.

1ère étape. Il y a beaucoup de cas à considérer qui se divisent en alternatives incompatibles. Nous utilisons un repérage par écriture lexicographique en suites de 1 et de 2.

1. $bf(0) + c + d \neq 0$ fournit $f = B$ avec $(a + bB + c + 2d)B = 0$ en faisant $x = 0$ dans l'équation (27).
2. $bf(0) + c + d = 0$ fournit $(a + d)f(0) = 0$
   2.1. $f(0) = 0$ fournit $c + d = 0$
      2.1.1. $d = c = 0$. Avec $x = 1$ dans (27), on a $(a + bf(1))f(y) = 0$
         2.1.1.1. $a + bf(1) \neq 0$ fournit $f = 0$ qui est effectivement solution.
         2.1.1.2. $a + bf(1) = 0$ se subdivise encore en

2.1.1.2.1. $b = 0$ conduit à $a = 0$ et donc f est arbitraire.

2.1.1.2.2. $b \neq 0$ avec $f(1) = -b^{-1}a$ fournit $f(x)f(y) = f(1)f(xy)$.

2.1.1.2.2.1. $f(1) \neq 0$ permet d'avoir $f(1)^{-1} f(x)$ comme fonction multiplicative et donc $f(x) = -b^{-1}a\ M(x)$ avec les notations du théorème 11. (c'est à dire; $M: X \to Y$; $M(xy) = M(x)M(y)$ pour tous x, y de X).

2.1.1.2.2.2. $f(1) = 0$ conduit à $f = 0$.

2.1.2. $d \neq 0$ et $c \neq 0$. Avec $a' = d^{-1}a$ et $b' = d^{-1}b$, on a l'équation

$$a'f(xy) + b'f(x)f(y) = f(x + y) - (f(x) + f(y)). \tag{30}$$

Faisant $x = 1$, on déduit avec $C = a' + b'f(1) + 1$

$$f(y + 1) = f(1) + Cf(y). \tag{31}$$

Comme $f(0) = 0$, on a aussi $f(1) = -Cf(-1)$. On fait alors $x = -1$ dans (30) et on remplace y par $x - 1$ dans (31). Il vient

$$Ca'f(-x) = (1 - C - Cb'f(-1))f(x).$$

De (30), on déduit $b'\ (f(1)f(x) - f(x)f(1)) = 0$. Puisque a' et b' sont dans le centre de Y, on calcule que C commute avec $f(x)$ pour tout x. Dès lors

$$a'Cf(-x) = -a'f(x). \tag{32}$$

2.1.2.1. $a \neq 0$ permet d'écrire (32) sous la forme

$$Cf(-x) = -f(x). \tag{33}$$

Faisant $y = -1$ dans (30), et tenant compte de (33) et des relations de commutativité, on a

$$f(x + y) + Cf(x - y) = (C + 1)f(x). \tag{34}$$

Multipliant par C et tenant compte de $C^2 f(x) = f(x)$, on a aussi

$$Cf(x + y) + f(x - y) = (C + 1)f(x).$$

En additionnant les deux dernières équations, il vient

$$(C + 1)(f(x + y) + f(x - y) - 2f(x)) = 0.$$

En soustrayant les deux mêmes équations, il vient

$$(C - 1)(f(x + y) - f(x - y)) = 0. \tag{35}$$

2.1.2.1.1. $C = 1$. Reportant dans (34), on a

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x). \tag{36}$$

Mais $f(0) = 0$(2.1.), donc avec $x = y$ dans cette équation, on déduit

$$f(2x) = 2f(x).$$

Reportant dans (34)

$$f(x + y) + f(x - y) = f(2x).$$

Comme X est divisible par 2, ceci signifie que $C_1(f) = 0$. Grâce à (30) et 2.1.2.1.

$$f(xy) = -a'^{-1}b'f(x)f(y).$$

Finalement, $f(x) = -b^{-1}aH(x)$ où H est un endomorphisme d'anneaux. On vérifie qu'une telle fonction est bien solution de (27) avec les conditions de 2.1.2.1.1.

2.1.2.1.2. $C \neq 1$. L'équation (35) fournit, puisque X est divisible par deux, que f est une constante.

2.1.2.2. $a = 0$. L'équation (27) devient

$$b'f(x)f(y) = f(x + y) - f(x) - f(y).$$

On pose $F(x) = b'f(x)$ et $G(x) = F(x) + 1$ et on vérifie $G(x + y) = G(x)G(y)$. Aussi $b'f(x) = E(x) - 1$.

2.1.2.2.1. $b = 0$ fournit $f = A$, qui est une solution.

2.1.2.2.2. $b \neq 0$ fournit $f(x) = b^{-1}d[E(x) - 1)]$, qui est effectivement une solution.

2.2. $f(0) \neq 0$ fournit $a + d = 0$ et avec $x = 1$ dans (27) on a $(a - bf(0))f(y+1) = af(1) - bf(1)f(y)$.

2.2.1. $a = bf(0)$ fournit $c = 0$.

2.2.1.1. $a = 0$ fournit $b = 0$, joint à $c = 0$ et $d = 0$ (2.2.).

Aussi toute fonction $f: X \to Y$ est, dans ces conditions, solution de (27).

2.2.1.2. $a \neq 0$ fournit $b \neq 0$ (2.2.1.). On vérifie alors que $1 - a^{-1}bf(x)$ est multiplicative. Soit $f(x) = b^{-1}a[1 - M(x)]$. Cette fonction est solution de (27).

2.2.2. $a \neq bf(0)$.

2.2.2.1. $b = 0$ fournit $a \neq 0$ et $f = B$.

2.2.2.2. $b \neq 0$. L'équation (27) donne

$$f(x + y) = (bf(0) - a)^{-1}(a(f(xy) - f(x) - f(y)) + bf(x)f(y)). \tag{37}$$

On en déduit

$$f(x) = (bf(0) - a)^{-1}(bf(x - 1) - a)f(1). \tag{38}$$

On ne peut donc pas avoir $f(1) = 0$ puisque $f(0) \neq 0$ (2.2.).
Si l'on fait $y = -1$ dans (37), et que l'on tient compte de (38), et de

$$b(f(0)f(x) - f(x)f(0)) = 0,$$

on calcule

$$af(-x) = f(x)(ab^{-1} - f(0))af(1)^{-1} + a((f(0) - b^{-1}a)f(1)^{-1} + 1)f(0).$$

2.2.2.2.1. $a \neq 0$.

On écrit l'équation précédente selon

$$f(-x) = Cf(x) + D, \tag{39}$$

en notant que $f(x)$ commute avec C et D. Par itération,

$$(1 - C^2)f(x) = CD + D.$$

On utilise (37) avec $-y$ et on tient compte de (39) pour obtenir

$$(bf(0) - a)(f(x - y) - Cf(x + y)) = (a(C - 1) + bD)f(x).$$

Pour une fois, nous allons distinguer trois cas au lieu de deux, selon que $C = 1$, $C = -1$ ou $C^2 \neq 1$.

2.2.2.2.1.1. $C = 1$ fournit certes $2D = 0$. Mais $C = (ab^{-1} - f(0)f(1)^{-1}$ et de $C = 1$ on déduit $a = b[f(1) + f(0)]$. D'où

$$D = [(f(0) - b^{-1}a)f(1)^{-1} + 1]f(0) = 0,$$

indépendamment de la caractéristique du corps Y. D'où $f(x - y) = f(x + y)$.

Comme X est divisible par 2, la fonction f est donc constante ($f = B$).

2.2.2.2.1.2. $C = -1$ fournit avec un élément L de Y,

$$f(x - y) + f(x + y) = Lf(x).$$

Mais on a nécessairement $L = 2$ en remarquant que $f(0) \neq 0$ et faisant $y = 0$. En particulier

$$f(0) + f(2x) = 2f(x).$$

D'où $f(x) = f(0) + A(x)$ où $A: X \to Y$ satisfait C_1. En outre, $bf(0) + c - a = 0$ provient de 2.2. et 2. Par ailleurs, $C = -1$ (2.2.2.2.1.2.) fournit $a = (f(0) - f(1))b$. Soit $f(0) = (a - c)b^{-1}$ et $f(1) = -cb^{-1}$. En reportant $f(x) = f(0) + A(x)$ dans (37), avec ces conditions, on trouve finalement

$$f(x) = (a - c)b^{-1} - ab^{-1}H(x).$$

où H est un endomorphisme d'anneaux. On vérifie qu'une telle fonction satisfait effectivement (27).

2.2.2.2.1.3. $C^2 \neq 1$ fournit une fonction f constante ($f = B$).

2.2.2.2.2. $a = 0$ fournit après un calcul

$$f(x) = -cb^{-1}E(x).$$

On vérifie qu'il s'agit bien d'une solution de (27).

2 ème étape. Il convient de regrouper tous les résultats précédents en ne faisant plus porter que des conditions sur les quatre éléments a, b, c, et d de façon à établir le tableau du théorème 11. Cette collation est quelque peu fastidieuse et, pour raccourcir, nous ne donnerons qu'un seul exemple. Supposons $c + d = 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$ et $a = 0$. Le cas 1 donne $f = B$ avec $B = b^{-1}d$. Le cas 2 avec $c + d = 0$, $b \neq 0$ impose $f(0) = 0$, donc 2.1. Puisque $c \neq 0$ et $d \neq 0$, on doit avoir 2.1.2. et puisque $a = 0$, on doit avoir 2.1.2.2. Come $b \neq 0$, on a 2.1.2.2.2., soit $f(x) = b^{-1}d(E(x) - 1)$ où E est une exponentielle. Mais $f = -b^{-1}d$ correspond à $E = 0$. On regroupe donc toutes les solutions f sous la forme unique $f = b^{-1}d(E - 1)$, etc.

3. Une autre forme d'indépendance

Une forme plus forte d'indépendance est suggérée en prenant l'analogue de Pexider de la condition qui définit les équations étrangères (cf. [2], [5] et [7] pour l'équation de Pexider). Convenons d'une terminologie, tout en gardant les notations de la définition 2.

DÉFINITION 15. Deux équations fonctionnelles E_1 et E_2 sont fortement étrangères relativement à X et Y lorsque tout couple de fonctions f, g de X dans Y, solution de

$$E_1(f) + E_2(g) = 0, \tag{40}$$

$$\begin{cases} E_1(f) = 0 \\ E_2(g) = 0. \end{cases} \tag{41}$$

satisfait aussi le système d'équations fonctionnelles.

On dispose d'un résultat d'existence explicite d'équations fortement étrangères, du moins en supposant une certaine régularité quant à l'une des deux fonctions en jeu. De façon précise, on a la proposition 16.

PROPOSITION 16. *Avec $X = Y = \mathbb{R}$, les équations aC_1 et bC_2, lorsque a et b sont des nombres réels non nuls, sont fortement étrangères dans la classe des couples de fonctions (f, g) pour lesquels g est continue en 1 et vaut* 1 *en* 1.

Cette proposition est une conséquence du résultat descriptif suivant qui généralise la proposition 3 du moins dans le cas où Y est un corps.

THÉORÈME 17. *Soit X un anneau unifère divisible par 2 et Y un corps de caractéristique différente de 2. Soient a et b deux éléments non nuls de Y. Toutes les solutions $f, g: X \to Y$ de*

$$a[f(x + y) - f(x) - f(y)] + b[g(xy) - g(x)g(y)] = 0 \qquad (x, y \in X), \tag{42}$$

telles que

$$g(1) = 1, \tag{43}$$

sont données par l'une des deux formes suivantes:

1) *f est solution de C_1 pour tous x, y de X; g est solution de C_2 pour tous x, y de X (et $g(1) = 1$).*
2) *g est solution de C_1, $g(1) = 1$, et g satisfait en outre*

$$g(xy) - g(x)g(y) = g(yx) - g(y)g(x) \qquad (x, y \in X). \tag{44}$$

Pour f on a

$$f(x) = A(x) + \tfrac{1}{2}a^{-1}b[g(x)^2 - g(x^2)] \qquad (x \in X),$$

où $A: X \longrightarrow Y$ est une solution de C_1 pour tous x, y de X.

Démonstration de la proposition 16 *à partir du théorème 17*. Pour $f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, nous devons résoudre (42) avec $g(1) = 1$ et g continue en 1. D'après le premier cas du théorème 17, on a bien $C_1(f) = C_2(g) = 0$. D'après le deuxième cas, puisque $C_1(g) = 0$ et puisque g est continue en 1, c'est que g est de la forme $g(x) = cx$ pour tout x de $\mathbb{R}$ où c est un élément de $\mathbb{R}$. Mais $g(1) = 1$ fournit $c = 1$. En particulier, on a $C_2(g) = 0$. Pour suite, $g(x^2) = g(x)^2$ et la fonction f donnée par le théorème 17, dans ce second cas, vaut A, c'est à dire est une solution de C_1. On a bien $C_1(f) = C_2(g) = 0$.

Remarque. Sans changer le résultat de la proposition 16, on pourrait imposer d'autres conditions de régularité sur g, voire même sur f au lieu de g.

Démonstration du théorème 17. Echangeons d'abord x et y dans (42) et retranchons le résultat obtenu de (42). Il vient

$$g(xy) - g(x)g(y) = g(yx) - g(y)g(x) \qquad (x, y \in X).$$

α) Si $g(0) \neq 0$, l'equation (42) avec $y = 0$ indique que g est constante, c'est à dire $g = 1$ dans le cas présent. En particulier, $C_2(g) = 0$ et de (42) on déduit $C_1(f) = 0$. Soit le premier cas du théorème 17.

β) Si $g(0) = 0$, l'équation (42) fournit $f(0) = 0$. En faisant $y = 1$ dans (42) et tenant compte de (43), on a

$$f(x + 1) = f(x) + f(1).$$

Par récurrence, on dispose pour tout x de X, et tout entier relatif n, de la relation,

$$f(x + n) = f(x) + f(n).$$

L'équation (42) donne aussitôt

$$g(nx) = g(n)g(x).$$

Avec $n = -1$, on a

$$g(-x) = g(-1)g(x). \tag{45}$$

En particulier, puisque l'on a (43),

$$g(-1)^2 = 1.$$

Comme Y est un corps, on n'a plus que les deux possibilités $g(-1) = -1$ et $g(-1) = +1$.

1*er cas*: $g(-1) = 1$. On déduit de (45) la parité de la fonction g. Changeons alors y en $-y$ dans (42) et retranchons à (42). Il vient

$$f(x + y) + f(-y) = f(x - y) + f(y). \tag{46}$$

Avec $x = y$ dans (46) et puisque $f(0) = 0$, on dispose de

$$f(2x) + f(-x) = f(x).$$

Changeons x en $-x$ dans l'équation précédente et ajoutons à l'équation précédente, pour avoir

$$f(2x) + f(-2x) = 0.$$

Puisque X est divisible par 2, on déduit que f est impaire. L'équation (46) donne

$$f(x + y) = f(x - y) + 2f(y).$$

Echangeons les rôles de x et de y dans l'équation précédente et ajoutons à l'équation précédente en tenant compte du fait que f est impaire

$$2f(x + y) = 2f(x) + 2f(y).$$

Puisque Y est un corps de caractéristique différente de 2, on déduit $C_1(f) = 0$ et, grâce à (42), $C_2(g) = 0$. On dispose donc encore du premier cas du théorème 1.

2ème cas: $g(-1) = -1$. On déduit de (45) que g est impaire. Changeons x en $-x$ et y en $-y$ dans (42) et soustrayons à (42). Il vient la relation fonctionnelle,

$$f(-x - y) - f(-x) - f(-y) = f(x + y) - f(x) - f(y). \tag{47}$$

Changeons x en $-x$ dans (42) et additionnons à (42). Il vient

$$f(-x + y) + f(x + y) = f(x) + f(-x) + 2f(y). \tag{48}$$

Posons $F(x) = f(x) + f(-x)$ et $H(x) = f(x) - f(-x)$. L'équation (47) fournit

$$H(x + y) = H(x) + H(y) \qquad (x, y \in X). \tag{49}$$

Changeons y en $-y$ dans (48) et additionnons à (48). Il vient

$$F(x + y) + F(x - y) = 2F(x) + 2F(y) \qquad (x, y \in X). \tag{50}$$

Cette équation (50) souvent appelée équation quadratique ([2]. [8], [9], [10], [11]) a sous les conditions du théorème 17, une solution générale de la forme

$$F(x) = S(x, x) \qquad (x \in X), \tag{51}$$

où $S: X \times X \rightarrow Y$ est une fonction symétrique et biadditive (cf. par exemple [2] ou [11]). Revenant à l'équation (42), on déduit après calcul, en tenant compte de (49), et de ce que l'on peut diviser par deux dans Y,

$$aS(x, y) + b[g(xy) - g(x)g(y)] = 0. \tag{52}$$

Remplaçons x par $x + z$ dans (52) afin de faire jouer l'additivité de S par rapport à la première variable. Il vient

$$0 = g(xy + zy) - g(x + z)g(y) - g(xy) + g(x)g(y) - g(zy) + g(z)g(y).$$

Posons $D(x, z) = g(x + z) - g(x) - g(z)$, ce qui permet une écriture ramassée de l'équation précédente selon

$$D(xy, zy) = D(x, z)g(y). \tag{53}$$

Remplaçons y par yy' dans (53) où y et y' sont deux éléments arbitraires de X. Il vient en appliquant (53) deux fois, et pour tous x, z, y, y' de X,

$$D(x, z)[g(yy') - g(y)g(y')] = 0. \tag{54}$$

S'il existe x et z de X tels que $D(x, z) \neq 0$, c'est que g satisfait $C_2(g) = 0$. Du coup, $C_1(f) = 0$ et on obtient encore le premier cas du théorème 17.

Par contre, si $D(x, z) = 0$ pour tous x et z de X, on a $C_1(g) = 0$. En reportant la valeur de $S(x, y)$ déduite de (52), il vient

$$F(x) = a^{-1}b[g(x)^2 - g(x^2)].$$

D'où

$$2f(x) = H(x) + a^{-1}b[g(x)^2 - g(x^2)].$$

En divisant par 2, et tenant compte de (44), on obtient ainsi la deuxième forme du théorème 17.

On vérifie aisément que les formes générales 1) et 2) fournissent bien des solutions de (42), ce qui termine la démonstration du théorème 17.

Remarques

1) Il est plus suggestif et quelque peu surprenant de retenir que sous les conditions du théorème 17, pour une solution (f, g) de l'équation fonctionnelle (42), on a toujours $C_1(g) = 0$ ou $C_2(g) = 0$, c'est à dire l'additivité ou la multiplicativité de g.
2) Lorsque X et Y sont commutatifs, on peut omettre la condition (44) ce qui donne une description explicite de toutes les solutions de (42).
3) Lorsque $a = \pm 1$ et $b = \pm 1$, la conclusion du théorème 17 subsiste lorsque l'on diminue les hypothèses faites sur Y en supposant seulement que Y est un anneau unifère sans diviseur de O et uniquement divisible par 2.

   Si l'on garde les conditions sur X mais l'on suppose seulement que Y est un anneau unifère tel que $x^2 = 1$ et $x \in Y$ implique $x = \pm 1$, alors toute solution de (42) avec $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, satisfait

$$[g(x + y) - g(x) - g(y)][g(zt) - g(z)g(t)] = 0, \tag{55}$$

et

$$2[g(x+y)-g(x)-g(y)][f(z+t)-f(z)-f(t)]=0, \tag{56}$$

pour tous x, y, z et t de X.

4) Le théorème 17 cesse d'être vrai si, en gardant toutes les autres hypothèses, on omet $g(1) = 1$. Ainsi si $H: X \to Y$ est un homomorphisme d'anneaux, si X est un anneau, si Y est un anneau commutatif uniquement divisible par 3, le couple (f, g) défini par:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{3}a^{-1}b(H(x))^3 \\ g(x) = H(x)[H(x)+1], \end{cases}$$

est solution de (42). Mais cette solution n'est pas en général de l'une des formes décrites dans le théorème 17. D'ailleurs on a $g(1) = H(1)[H(1)+1]$ et $g(1) = 2$ si H n'est pas identiquement nul. Nous donnerons dans un autre travail la solution générale de l'équation fonctionnelle $a\,C_1(f) + b\,C_2(g) = 0$.

5) On peut imaginer bien d'autres formes de dépendance entre les équations fonctionnelles C_i ($i = 1, 2, 3$ et 4) que la s-indépendance, ou que cette propriété des équations faiblement ou fortement étrangères. En lien direct avec les équations conditionnelles, nous étudierons ailleurs la m-indépendance, c'est à dire le cas où

$$E_1(f)E_2(f) = 0$$

implique $E_1(f) = 0$ ou $E_2(f) = 0$. L'analogue de Pexider est l'équation fonctionnelle $E_1(f)E_2(g) = 0$.

RÉFÉRENCES

[1] CAUCHY, A. L., *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*, 1ère partie, analyse algébrique, Paris, 1821. Le cours est reproduit dans l'édition des *Oeuvres d'Augustin Louis Cauchy*, Paris, Gauthier-Villars, série 2, volume 3, 1897. Pour un court historique de ces équations fonctionnelles, voir le chapitre 21 dans [2] ou encore J. DHOMBRES, Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction, Archives for History of Exact Sciences, vol 36, No 2, 1986, pp. 91–181. Voir auni, J. DHOMBRES, *On the historical role of functional equations. In Functional equations: History, Applications and Theory*, (Ed. J. Aczél), Reidel, Dordrecht-Boston, 1984, pp. 17–31.

[2] ACZÉL, J., and DHOMBRES, J., *Functional equations in several variables*. Cambridge University Press, à paraître.

[3] DARBOUX, G., *Sur le théorème fondamental de la géométrie projective*, Math. Ann. *17* (1880) 55–61.

[4] KESTELMAN, H., *Automorphisms in the field of complex numbers*. Proc. London Math. Soc. (*2*), *53* (1951) 1–12.

[5] ACZÉL, J., *Lectures on functional equations and their applications.* Academic Press, New-York-London, 1966.

[6] DHOMBRES, J., *Sur les fonctions simultanément suradditives et surmultiplicatives.* C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 5 (1983) 207–210.

[7] PEXIDER, J. V., *Notiz über Funktionaltheoreme,* Monatsh. Math. Physik *14* (1903), 293–301.

[8] JORDAN, P. and Von NEUMANN, J., *On inner products in linear metric spaces.* Annals of Math. (*2*), *36* (1935), 719–723.

[9] KUREPA, S., *Quadratic and sesquilinear functionals.* Glasnik Mat.-Fiz.-Astr. (*2*), *20* (1965) 79–92.

[10] BAKER, J. A., *On quadratic functionals along rays.* Glanik Mat. Ser. III *3* (*23*) (1968), 215–229.

[11] DHOMBRES, J., *Utilisation des équations fonctionnelles pour la caractérisation des espaces préhilbertiens.* Rend. Sem. Mat. Fis. Milano *54* (1984), 159–186 (1987).

[12] DHOMBRES, J., *Autour de* $f(xy) - f(x)f(y)$, Aequationes Math. *27* (1984), 231–235.

Institut de Mathématiques,
Université de Nantes,
2 Chemin de la Houssinière,
F-44072 Nantes Cédex France.