

# Der Fördereffekt in ventillosen, elastischen Leitungen

Von H. J. Rath und I. Teipel, Lehrstuhl A für Mechanik, Technische Universität Hannover, Deutschland

## 1. Einleitung

Man hat schon verschiedentlich festgestellt, daß man durch Erzeugung von pulsierenden Strömungen in elastischen Leitungen einen sehr beachtlichen Fördereffekt bewirken kann, obwohl an keiner Stelle Ventile oder Klappen angebracht worden sind. Nimmt man sich beispielsweise einen Schlauch in Form eines Kreisringes—seine eine Hälfte bestehe aus einem sehr starren und die andere Hälfte aus einem relativ weichen Kunststoff—, so ergibt sich bei periodischem Zusammendrücken eine Strömung in tangentialer Richtung durch den Kreisring [1], bei der eine beträchtliche Geschwindigkeit erreicht wird (Fig. 1). Der Grund für diesen Strömungsvorgang liegt in der Hauptsache in den unterschiedlichen elastischen Eigenschaften der Werkstoffe.

Dieses Phänomen wurde von Liebau [2] zur Erklärung des Arbeitens eines klappendefekten Herzens herangezogen. Die Aortenklappen eines älteren Menschen können so stark verkalkt sein, daß sie fast unbeweglich sind. Dennoch bleiben solche Patienten lebensfähig. Auch hier sollen wieder die elastischen Eigenschaften der verschiedenen Partien des gesamten Herzens die Förderung auf einen normalen Zustand zurückführen. Ebenfalls soll mit diesem Effekt der hohe Druckabfall in den Arteriolen des menschlichen Körpers gedeutet werden. Um Klarheit über diese Vorgänge zu erhalten, wurden von v. Bredow [3] experimentelle Untersuchungen durchgeführt.

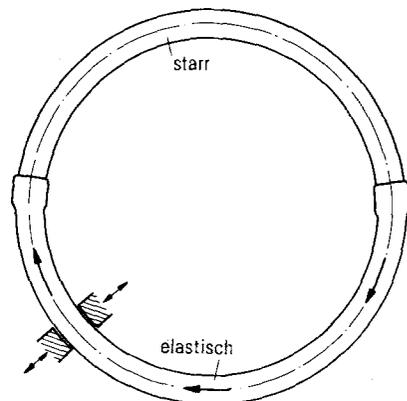


Figure 1  
Schlauchsystem mit verschiedenen Werkstoffen

Für die theoretische Behandlung dieses Phänomens ist es notwendig, eine nicht-lineare Theorie anzusetzen. Es ist bekannt, daß bei einer periodischen Anfangsverteilung eine lineare Differentialgleichung kein Fördervolumen ergeben kann. Die Flüssigkeitsteilchen schwingen lediglich um ihre Ruhelage. Erst durch die nicht-linearen Terme ändern sich die Wellenlänge und die Amplitude der Anfangsverteilung, so daß sich die Teilchen von ihrem ursprünglichen Ort entfernen.

In dieser Arbeit wird daher eine nichtlineare Theorie zur Berechnung dieses Pumpmechanismus verwendet. Die nichtlinearen Differentialgleichungen der Strömungsmechanik werden durch einfache Beziehungen der Elastomechanik ergänzt. Um die Rechnungen nicht zu unübersichtlich werden zu lassen, sollen für das Fluid und den Wandwerkstoff bestimmte Voraussetzungen getroffen werden. Experimentelle Ergebnisse werden schließlich zum Vergleich mit den theoretischen Resultaten herangezogen.

## 2. Die Grundgleichungen

Bevor das Gleichungssystem aufgeschrieben wird, müssen zunächst einige Annahmen getroffen werden. Man betrachtet den Vorgang als eindimensional und instationär, und das Fluid sei inkompressibel. Der Schlauch wird als dünnwandig angesetzt, so daß man die tangential Spannung als konstant über den Querschnitt der Schlauchwand ansehen darf. Weiterhin wird ein lineares Stoffgesetz verwendet. Relaxationseffekte einerseits und eventuell auftretende Axialspannungen im Schlauch andererseits werden nicht berücksichtigt.

Unter diesen Annahmen ergeben sich für die Kontinuitätsgleichung und die Bewegungsgleichung [siehe etwa [4]]:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + W \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + W \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_v}{\partial x} = 0 \quad (2.1b)$$

Dabei bedeuten  $A$  der Strömungsquerschnitt,  $W$  die Strömungsgeschwindigkeit,  $\rho$  die Dichte des Fluids,  $p$  der Druck und  $p_v$  der Reibungsdruck,  $x$  und  $t$  sind die Längen- und die Zeitkoordinate. Für eindimensionale, laminare Strömung wird häufig der Reibungsterm durch den Ansatz nach Hagen-Poiseuille ausgedrückt:

$$\frac{\partial p_v}{\partial x} = 32\mu \frac{W}{D_1^2} \quad (2.2)$$

$\mu$  ist die dynamische Zähigkeit der Flüssigkeit,  $D_1$  der Durchmesser des unverformten Schlauches. Obwohl Gl. (2.2) nur für stationäre Strömung abgeleitet wird, soll sie hier auch für instationäre Vorgänge als gültig angenommen werden.

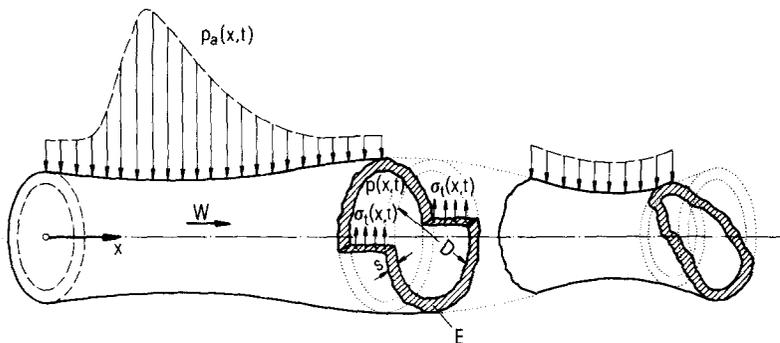


Figure 2  
Schlauchmodell.

Zur Vervollständigung des Gleichungssystems (2.1) muß noch eine Beziehung  $p = p(A)$  hinzugefügt werden. In der Wand des Schlauches tritt eine Tangentialspannung  $\sigma_t$  auf, die sich unter den oben aufgeführten Annahmen bestimmen läßt zu (Fig. 2):

$$\sigma_t = \frac{D_1}{2s} (p - p_a), \tag{2.3}$$

wobei  $s$  die konstante Wandstärke und  $p_a$  der variable Außendruck sein soll. Mit dem Hookeschen Gesetz kann auf den jeweiligen Durchmesser  $D$  geschlossen werden:

$$\sigma_t = E \frac{D - D_1}{D_1}. \tag{2.4}$$

$E$  ist der Elastizitätsmodul der Gefäßwand. Führt man den Leitungsquerschnitt  $A$  auf den Durchmesser  $D$  und mit Gl. (2.3) und Gl. (2.4) auf den Druck zurück, so erhält man:

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D_1^2}{4} \left[ 1 + \frac{D_1 p - p_a}{2s E} \right]^2. \tag{2.5}$$

Eingesetzt in Gl. (2.1a) ergibt schließlich

$$\frac{\partial p}{\partial t} + W \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{sE}{D_1} \left[ 1 + \frac{D_1 p - p_a}{2s E} \right] \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial p_a}{\partial t} + W \frac{\partial p_a}{\partial x}. \tag{2.6}$$

Zusammen mit Gl. (2.1b) liegt ein nichtlineares partielles Differentialgleichungssystem vor, das zur Beschreibung der Strömungsvorgänge in elastischen Leitungen herangezogen wird. Es handelt sich dabei um ein System vom hyperbolischen Typus.

Verschiedentlich wird der Durchmesser in Gl. (2.3) nicht konstant gehalten, wodurch sich ein anderes Gleichungssystem ergibt und die Wellen sich erst nach einer längeren Laufzeit aufteilen.

### 3. Experimenteller Aufbau

Um den Fördereffekt experimentell zu untersuchen, wurde von v. Bredow [3] eine Versuchseinrichtung aufgebaut, bei der zwei mit Wasser gefüllte Glasgefäße durch einen elastischen Schlauch verbunden wurden (Fig. 3). Im Ruhezustand war der Wasserspiegel in beiden Behältern gleich groß. An der Stelle  $x_E$  wird nun ein zeitlich periodischer Außendruck  $p_a$  aufgebracht. Es tritt eine Förderung ein, obgleich die Verbindung von Gefäß zu Schlauch ohne Klappen konstruiert ist. Bei den umfangreichen Versuchen ergibt sich die Frequenz von  $p_a$  als die Haupteinflußgröße. Je nach ihrem Wert stellt sich eine Förderung vom linken Gefäß in das rechte oder umgekehrt ein. Man kann ohne Schwierigkeit erreichen, daß, ausgehend von der Ruheshöhe  $H$  des Wasserspiegels, ein Gefäß mehr oder weniger vollständig leer gepumpt wird.

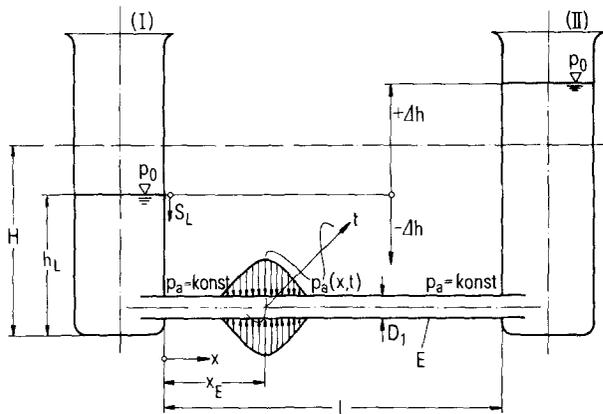


Figure 3  
Versuchsaufbau.

Der hier beschriebene Strömungsvorgang soll nun mit den im zweiten Abschnitt angegebenen Gleichungen theoretisch behandelt werden. Dabei ist völlig klar, daß man nur eine qualitative Übereinstimmung erwarten kann, da die Voraussetzungen für Theorie und Experiment doch sehr verschieden sind. Einmal sind die elastischen Eigenschaften der Versuchsleitung nicht durch das einfache Gesetz Gl. (2.4) darstellbar. Zum anderen wird der Schlauch im Experiment so stark zusammengedrückt, daß ein mehrdimensionaler Strömungsvorgang entsteht. Zur Simulation des Außendruckes wird für die Theorie angenommen, daß im Bereich zwischen  $0,2 \leq x/l \leq 0,4$  gelten soll:

$$p_a(x, t) - p_0 = \left[ C_0 + C_1 \frac{x}{l} + C_2 \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right] \sin \omega t. \quad (3.1)$$

$p_0$  ist der konstante Außendruck in den Bereichen  $x/l < 0,2$  und  $x/l > 0,4$ ,  $x$  und  $l$  sind Größen, die der Fig. 3 direkt entnommen werden können.  $C_0$ ,  $C_1$  und  $C_2$  sind Konstanten, die aus der gewünschten Druckverteilung bestimmt werden können,

und  $\omega$  ist die Kreisfrequenz der Erregung. Ein solcher Ansatz scheint im Hinblick auf die Versuchsdurchführung gerechtfertigt zu sein.

#### 4. Das Berechnungsverfahren

Es ist zweckmäßig, bei dem ursprünglichen Gleichungssystem anstelle vom Druck mit der Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit  $a$  zu rechnen, da die Abhängigkeitsgebiete der Differenzenverfahren sehr stark mit  $a$  zusammenhängen. Aus der Druckverteilung ergibt sich

$$a = \pm \sqrt{\frac{sE}{\rho D_1} \left[ 1 + \frac{D_1(p - p_a)}{2sE} \right]} \quad (4.1)$$

Trägt man diese Beziehung in die Gleichungen (2.1b) und (2.6) ein und ersetzt  $p_a$  durch Gl. (3.1), so erhält man

$$\frac{\partial a}{\partial t} + W \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{4} a \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad (4.2a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + W \frac{\partial W}{\partial x} + 4a \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_v}{\partial x} + \frac{1}{l\rho} \left( C_1 + 2C_2 \frac{x}{l} \right) \sin \omega t = 0. \quad (4.2b)$$

Durch Einführen von dimensionslosen Kenngrößen in die Gleichungen (4.2a) und (4.2b) ergeben sich gewisse Ähnlichkeitskennzahlen, von denen nur die Strouhalzahl  $Str$  hier als wichtigste Kennzahl aufgeführt werden soll:

$$Str = \frac{\omega l}{a_0} \quad (4.3)$$

Hierbei sei  $a_0$  die sogenannte Moens- Korteweggeschwindigkeit, die sich aus Gl. (4.1) mit  $p = p_a$  ermitteln läßt:

$$a_0 = \sqrt{\frac{sE}{\rho D_1}} \quad (4.4)$$

Da das zu untersuchende Strömungsfeld sehr komplex ist, wurde eine Lösung dieses Systemes auf numerischem Wege gesucht. Wie schon erwähnt, handelt es sich dabei um ein System vom hyperbolischen Typus. Es liegt daher nahe, ein Charakteristikenverfahren zu verwenden. Jedoch zeigte sich schon nach kurzer Rechnung, daß der Programmaufwand so groß und unübersichtlich wurde, so daß zu einfachen Differenzenverfahren mit Rechteckgittern übergegangen wurde.

Aus der Vielfalt der bekannten Differenzenverfahren wurde das Verfahren 2. Ordnung von MacCormack [5] ausgewählt. Diese Methode wird verschiedentlich in der einschlägigen Literatur [6] als die genaueste bei vorgegebenem Aufwand bezeichnet. Sie arbeitet mit Zwischenschritten. In Fig. 4 hat man den entsprechenden

Rechenstern dargestellt. Für den ersten Schritt werden die folgenden Differenzenapproximationen benutzt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} (\bar{f}_j^{n+1} - f_j^n) \quad (4.5a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} (f_{j+1}^n - f_j^n). \quad (4.5b)$$

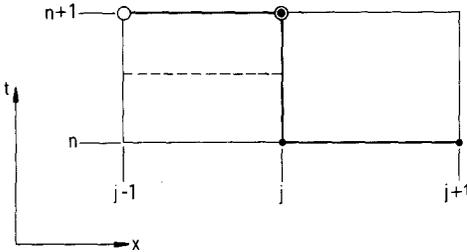


Figure 4  
Allgemeiner Differenzenschritt.

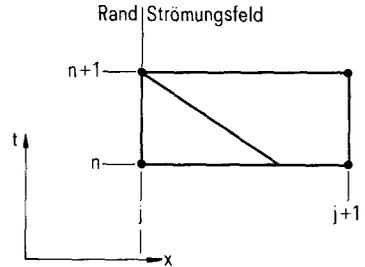


Figure 5  
Randschritt.

In dieser Phase wird  $\bar{f}$  aus der zeitlichen Ableitung ermittelt. Nachdem man alle diese Zwischenwerte auf der Linie  $n + 1$  berechnet hat, wird der zweite Schritt des Differenzenverfahrens durchgeführt:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{2}{\Delta t} \left( f_j^{n+1} - \frac{f_j^n + \bar{f}_j^{n+1}}{2} \right) \quad (4.6a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{1}{\Delta x} \left( \bar{f}_j^{n+1} - \bar{f}_{j-1}^{n+1} \right). \quad (4.6b)$$

Hieraus kann der endgültige Wert für  $f_j^{n+1}$  bestimmt werden. Man beachte, daß für die örtlichen Ableitungen keine symmetrischen Differenzenquotienten verwendet wurden. Was die numerische Stabilität dieser Methode angeht, so kann man zeigen, daß die charakteristischen Richtungen des Ausgangsgleichungssystems die entscheidenden Aussagen liefern. Der neu zu berechnende Punkt  $f_j^{n+1}$  muß innerhalb des Einflußgebietes der Punkte mit den Werten  $f_{j-1}^n$  und  $f_{j+1}^n$  liegen.

An den Rändern müssen die einzelnen Schritte leicht abgeändert werden, da man z.B. den Punkt  $(j, n + 1)$  aus Fig. 4, wenn er auf dem Rand läge, nicht berechnen könnte. Es soll hier die Methode von Stoker [7] verwendet werden, die eine Interpolation mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens benutzt. Diejenige Charakteristik, die vom Strömungsfeld herkommt und den Randpunkt trifft, wird zurückverfolgt bis hin zur letzten bereits ermittelten Zeitlinie (Fig. 5). Dadurch kann die dazugehörige Gleichung angegeben werden. Hinzuzufügen ist noch der Randwert selbst, so daß damit der Strömungszustand vollständig bestimmt ist.

## 5. Die Randbedingungen

Für die Rechnung wird angesetzt, daß zu Beginn des Vorganges in beiden Gefäßen in Fig. 3 die gleiche Anfangshöhe  $H$  herrsche. Während des Pumpvorganges verschieben sich diese Höhen dann, wodurch sich auch die Randbedingungen ändern. Die Vorgehensweise soll hier nur für den linken Rand gezeigt werden, da für die rechte Seite analoge Beziehungen gelten.

Als Randbedingung werden für den linken Behälter die instationäre Bernoullische Gleichung und die Kontinuitätsgleichung angesetzt:

$$\text{sign}(W)\zeta\frac{1}{2}W^2 + \frac{1}{2}W^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2}W_0^2 + \frac{p_0}{\rho} + gh_L - \int_0^{h_L} \frac{\partial W}{\partial t} ds_L \quad (5.1)$$

$$A_0W_0 = AW = f(t). \quad (5.2)$$

Der Index 0 kennzeichnet die Größen an der Wasseroberfläche —  $p_0$  entspricht somit dem äußeren Luftdruck —, während  $h_L$  die momentane Höhe des linken Wasserspiegels angibt (Fig. 3).  $s_L$  sei die Stromfadenkoordinate und  $g$  die Erdbeschleunigung. Die Querschnitte  $A_0$  des Behälters und  $A$  des Schlauches am Einlauf sind konstant. Der Verlustfaktor  $\zeta$  beschreibt die Einlauf- und Umlenkverluste jeweils an dem Behältereinlauf. Hierzu ist zu bemerken, daß beispielsweise bei einheitlicher Strömung in positive  $x$ -Richtung (Fig. 3) am linken Rand ein Druckverlust infolge Querschnittsverengung und am rechten Rand ein Verlust aufgrund einer Querschnittserweiterung vom Schlauch zum Behälter auftritt. Der Verlustfaktor  $\zeta$  kann auch unterschiedliche Werte annehmen, je nachdem, welche Art einer unstetigen Querschnittsveränderung vorliegt. In [3] wurde jedoch nachgewiesen, daß diese Unsymmetrie nur eine sehr geringe Förderung bewirkt. Insofern kann der Verlustfaktor  $\zeta$  für beide Behälter als gleich groß angesehen werden. Je nach der Strömungsrichtung kann der Verlustterm in Gl. (5.1) ein unterschiedliches Vorzeichen haben. Dieses wird durch die Signum-Funktion berücksichtigt.

Der Einfluß der einzelnen Verluste an den Rändern ist also nicht wesentlich für die Pumpleistung. Im einleitenden Kapitel wurde bereits darauf hingewiesen, daß man für eine Kombination von unterschiedlich elastischen Schläuchen — der Grenzfall des teilweise starren Rohres ist mit eingeschlossen — auch einen Fördereffekt erhält. Theoretisch resultiert dieses aus den jeweiligen Laufzeiten der Wellen in den Gefäßwänden, da die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit auch eine Funktion des Elastizitätsmoduls der Wand ist (Gl. (4.1)). Durch Einsetzen von  $W_0$  aus Gl. (5.2) in Gl. (5.1) steht für den linken Rand eine Gleichung für die beiden Unbekannten  $W$  und  $p$  zur Verfügung. Eine weitere Beziehung liefert das Strömungsfeld im Schlauch, indem — wie im Kapitel 4 beschrieben — die jeweilige Randcharakteristik berücksichtigt wird. Eine ausführliche Darstellung des numerischen Verfahrens ist in [8] gegeben worden.

### 6. Die Ergebnisse

Um einen direkten Vergleich mit den Experimenten durchführen zu können, wurden für die Rechnungen folgende spezielle Angaben verwendet:  $l = 1,8$  m,  $\rho = 998$  kg/m<sup>3</sup>,  $\mu = 10^{-3}$  kg/ms und  $sE/\rho D_1 = 143$  m<sup>2</sup>/s<sup>2</sup>. Die Erregerstelle lag immer zwischen  $0,2 \leq x/l \leq 0,4$ .

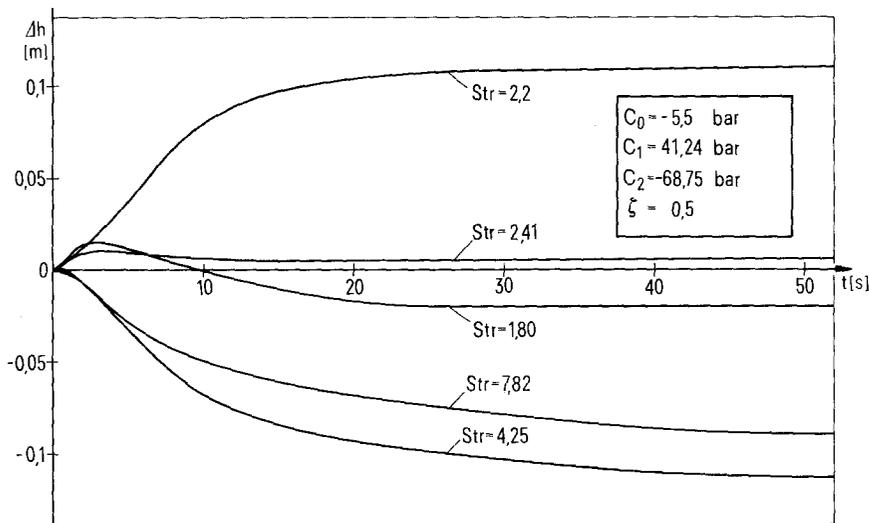


Figure 6  
Verlauf der Förderhöhe über der Zeit.

Für diese Werte ist der Verlauf der Förderhöhe in Abhängigkeit von der Zeit in Fig. 6 dargestellt worden. Wie aus Fig. 3 bereits früher zu erkennen war, bezeichnet man mit  $\Delta h$  den Unterschied zwischen den Flüssigkeitsspiegeln der beiden Gefäße. Ein positives  $\Delta h$  bedeutet dabei, daß eine Förderung von (I) nach (II) (Fig. 3) stattfindet. Setzt man ferner  $\zeta = 0,5$ ,  $C_0 = -5,5$  bar,  $C_1 = 41,1$  bar und  $C_2 = -68,6$  bar, so erhält man die Kurven in Fig. 6. Wie man sieht, ist der Einfluß der Strouhalzahl Str entsprechend Gl. (4.3) erheblich. Es tritt eine Umkehrung der Förderrichtung auf. Bei den asymptotischen Zuständen handelt es sich um Mittelwerte, denen eine Schwingung mit der Frequenz der Außendruckerregung überlagert ist. Da deren Amplitude sehr klein ist — sie beträgt ca. 3% des asymptotischen Endwertes der Förderhöhe —, wurde sie in Fig. 6 nicht eingezeichnet.

Eine Übersicht über die Abhängigkeit von Str für die asymptotische Förderhöhe ist in Fig. 7 und Fig. 8 dargestellt worden. Als Parameter wurden  $C_0$ ,  $C_1$  und  $C_2$ , beziehungsweise  $\zeta$  variiert. Ist der Druckberg relativ gering ( $C_0 = -2,204$  bar,  $C_1 = 16,5$  bar,  $C_2 = -27,4$  bar), so findet zunächst kaum eine merkliche Förderung statt. Die Trägheitsglieder in den Grundgleichungen spielen eine untergeordnete Rolle. Lediglich die Verluste an den Einläufen liefern wegen ihrer Nichtlinearität einen

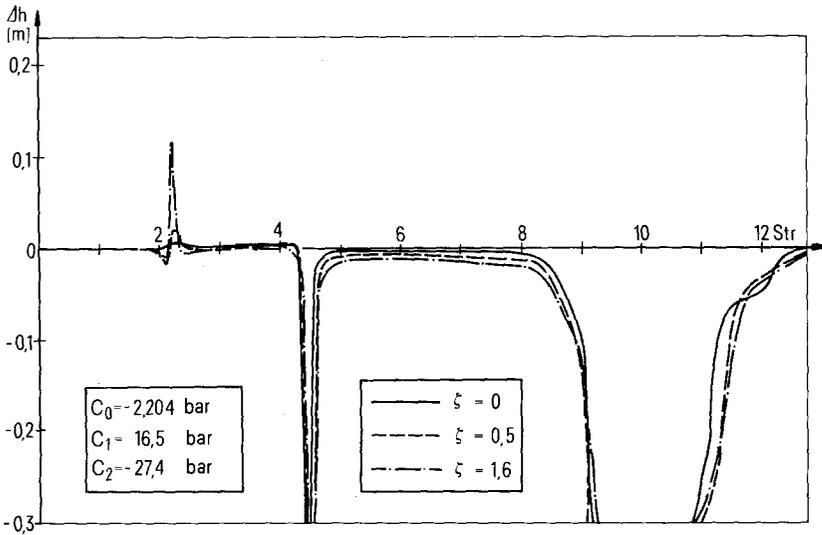


Figure 7  
 Abhängigkeit der Förderhöhe von der Frequenz (schwacher Außendruck).

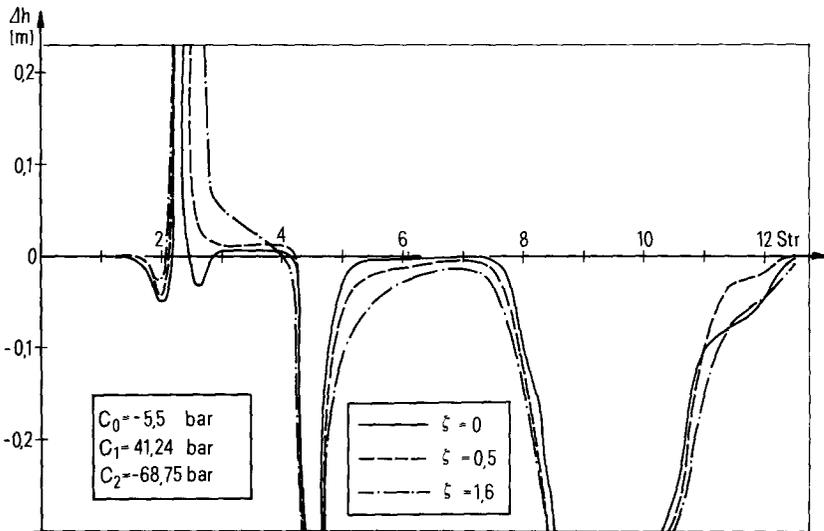


Figure 8  
 Abhängigkeit der Förderhöhe von der Frequenz (mittlerer Außendruck).

Beitrag zu  $\Delta h$ . Mit Steigerung der Frequenz, etwa bei  $\omega = 29(1/s)$ —es entspricht einem Wert von  $Str = 4,38$ —tritt eine Entleerung des Gefäßes (II) ein. Der Einfluß von  $\zeta$  ist von untergeordneter Bedeutung. Dieses Minimum ist sehr steil, so daß kleine Abweichungen von  $Str$  die ganze Förderwirkung zunichte machen. Bei  $Str \sim 10$  ergibt sich ein weiteres Minimum, dessen Frequenzbreite erheblich von den

ersten beiden Extremwerten der Förderhöhe abweicht. Wie man sieht, erhält man bei der gewählten Außendruckverteilung für die Werte des Frequenzparameters  $\text{Str} > 4$  nur noch negative Förderhöhen.

Steigert man die Werte von  $C_1$  und  $C_2$  wie in Fig. 8 getan, so erhält man ausgeprägte Extrema. Zunächst ereignet sich wenig, bis man etwa  $\text{Str} \sim 2,2$  erreicht. Sowohl für  $\zeta = 0$  als auch für  $\zeta \neq 0$  findet eine Entleerung des Gefäßes (I) statt. Dieser Wert wird auch durch Versuche bestätigt. Für  $\zeta = 0,5$  und  $\zeta = 1,6$  wird dieses Maximum verbreitert. Der weitere Verlauf der Kurven unterscheidet sich nicht sehr viel von denjenigen in Fig. 7. Allerdings ist die Breite des Minimums bei  $\text{Str} \sim 9$  für  $\zeta = 0,5$  und  $\zeta = 1,6$  größer als in Fig. 7. Die Haupteinflußgröße ist dann wohl die Strouhalzahl  $\text{Str}$ . Als weitere Parameter wurde die Länge des Schlauches variiert. Mit abnehmender Schlauchlänge verschieben sich die Wechsel der Förderrichtung zu höheren Frequenzen hin. Die Förderhöhenmaxima selbst blieben konstant. Hinsichtlich des Einflusses des Ortes  $x_E$  der Erregungsstelle ergab sich, daß bei periodischer Kontraktion in der geometrischen Mitte des Schlauches keine Förderung stattfand, sondern die beiden Wasserspiegel nur kleine Schwankungsbewegungen um ihre Ausgangshöhe ausführten.

Desweiteren wurde noch der Einfluß der Reibung untersucht. Bei Reibungsfreiheit traten bei geringem Außendruck große Schwankungen der Förderhöhe mit der Zeit auf. Jedoch blieben die Mittelwerte der Förderhöhe nahezu konstant, während die Frequenz dieser langsamen Schwingung fast identisch war mit der Eigenfrequenz einer schwingenden Flüssigkeit in einem entsprechenden U-Rohr.

Beim Vergleich der Resultate mit experimentellen Untersuchungen muß darauf hingewiesen werden, daß dort als Erregermechanismus exzentrisch gelagerte Nocken zur Schlauchkontraktion benutzt wurden, wobei die Nockenform großen Einfluß auf den Verlauf der Förderhöhe hatte. Man hat es in Wirklichkeit auch nicht mit einem rein elastischen Schlauch zu tun, sondern es sind aufgrund der Viskoelastizität auch gewisse Hystereseigenschaften vorhanden. Insofern ist ein Vergleich mit [3] nur bedingt möglich, zumal die gewählte Außendruckverteilung nur annähernd mit der im Experiment benutzten übereinstimmt. Jedoch kann bei einem Vergleich festgestellt werden, daß die Förderrichtung richtig wiedergegeben wird. Das erste größere Förderhöhenmaximum wurde bei  $\text{Str} \sim 2,2$  berechnet, während es in [3] bei etwa  $\text{Str} \sim 2,3$  ermittelt wurde. Ein weiterer Extremwert ist nach den Rechnungen bei  $\text{Str} \sim 4,4$  anzutreffen. Die Experimente liefern  $\text{Str} \sim 4,7$ . Aus den oben aufgeführten Gründen kann selbstverständlich nicht erwartet werden, daß die Förderkennlinien in allen Einzelheiten übereinstimmen.

#### Literatur

- [1] G. LIEBAU, *Aus welchem Grunde bleibt die Blutförderung durch das Herz bei valvulärem Versagen erhalten?* Z. f. Kreislaufforschg. 45, 481–488 (1956).
- [2] G. LIEBAU, *Über periphere Blutförderung*, in: *Phänomen der plusierenden Strömung im Blutkreislauf* . . . (Herausgeber E. Pestel und G. Liebau), BI-Taschenbuch Nr. 738/738a, Mannheim (1970).
- [3] H. J. v. BREDDOW, *Untersuchung eines ventillosen Pumpprinzips*, Fortschr.-Ber. VDI-Zeitschr. Reihe 7, Nr. 9 (1968).

- [4] I. TEIPEL, *Nichtlineare Wellenausbreitungsvorgänge in elastischen Leitungen*, Acta Mech. 16, 93–106 (1973).
- [5] R. W. MACCORMACK, *The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering*, AIAA-Paper No. 69-354 (1969).
- [6] G. MORETTI, 'The Choice of a Time-dependent Technique in Gasdynamics', in *AGARD-Lectures* (ed. J. J. Smolderen) Ser. No. 48 (1972).
- [7] J. J. STOKER, *Water Waves*, Interscience, New York (1957).
- [8] H. J. RATH, *Berechnungen zu einem ventillosen Pumpprinzip*, Diss. TU Hannover (1976).

### Zusammenfassung

Man hat schon mehrfach durch Versuche zeigen können, daß sich ein Fördereffekt in elastischen Leitungen ohne Ventile einstellt, wenn man den Querschnitt der Leitung periodisch verändert. In dieser Arbeit wird ein mathematisches Modell zur theoretischen Behandlung entwickelt. Mit Hilfe eines Differenzenverfahrens hat man die Gleichungen für ein eindimensionales, reibungsfreies Kontinuum gelöst. Als Ergebnis werden Fördercharakteristiken diskutiert.

### Summary

Several experiments have shown, that there is a pumping effect in elastic tubes without valves if the cross section is changed periodically. In this paper a mathematical model for this flow problem has been developed. The equations for such a one-dimensional model have been solved by a numerical method. Finally one has discussed characteristic phenomena of this pipeflow.

(Eingegangen: 16 November 1976; rev: 5 August 1977)