Sull'esistenza di autovalori per un problema al contorno non lineare (*).

GIOVANNA CERAMI (Palermo)

Summary. – *In this paper the existence of infinitely many eigenvalues for the non linear boundary value problem*

$$\begin{cases} -\Delta u - \bar{\lambda} u = \mu\alpha(u) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

is proved. We suppose $\Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ *bounded and* $\bar{\lambda} \in (\lambda_1, \lambda_2)$ *where* λ_1 *and* λ_2 *are the first and the second eigenvalue of* $-\Delta$ *respectively. The eigenvalues are characterized by the critical levels of a suitable functional on a smooth unbounded manifold. The usual method is not applicable because the functional is not positive definite and the Palais-Smale condition is not satisfied. We applies a technique introduced in a preceding paper* [3].

1. – La presente ricerca ha come scopo la determinazione dell'esistenza di autovalori per il problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \bar{\lambda} u = \mu\alpha(u) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

dove Ω è un aperto limitato e connesso di $\boldsymbol{R}^n$, $\bar{\lambda}$ è una costante strettamente compresa fra il primo ed il secondo autovalore dell'operatore $-\Delta$, relativo ad Ω, con condizione di annullamento alla frontiera, mentre μ è un parametro variabile; $\alpha(u)$ indica l'operatore non lineare tale che $\alpha(u)(x) = a(x, u(x))$ essendo $a(x, y)$ una funzione soddisfacente alle seguenti ipotesi:

i) $a(x, y)$ è continua in y per quasi ogni x in Ω, misurabile in x per quasi ogni y e tale che $a(x, 0) = 0$ per ogni $x \in \Omega$;

ii) $a(x, y)$ è derivabile rispetto ad y, con derivata $a'_y(x, y)$ continua in y per quasi ogni x in Ω, misurabile in x per ogni y, non negativa, ed inoltre verificante le condizioni

$$a'_y(x, y) \leqslant b|y|^r \tag{2}$$

con $b > 0$ costante, essendo $r > 0$ e, se $n \geqslant 3$, $r < 4/(n-2)$.

(*) Entrata in redazione il 3 gennaio 1979.

Introduciamo le seguenti notazioni:

$L^2(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni misurabili a quadrato sommabile in Ω, con il prodotto scalare usuale:

$$(u|v) = \int_\Omega uv\,dx \qquad u,\, v \in L^2$$

e la norma da esso indotta:

$$|u|^2 = \int_\Omega u^2\,dx \qquad u \in L^2$$

$\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ è il completamento dello spazio delle funzioni regolari, a supporto compatto in Ω, rispetto alla norma così definita:

$$\|u\|^2 = \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx$$

il prodotto scalare associato a questa norma sarà:

$$((u|v)) = \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) dx$$

Supporremo in ogni caso che $u \in \overset{\circ}{H}{}^1$ e soddisfi la (1) in senso generalizzato, cioè che per ogni $v \in \overset{\circ}{H}{}^1$ si abbia

$$(3) \qquad ((u|v)) - \bar{\lambda}(u|v) = \mu \int_\Omega a(x, u(x))\, v(x)\,dx\,.$$

La condizione $u \in \overset{\circ}{H}{}^1$ interpreta anche in senso generalizzato l'annullarsi di u alla frontiera di Ω.

Ponendo $A(x, y) = \int_0^y 2a(x, z)\,dz$, la (3) può essere interpretata nel seguente modo: $u \in \overset{\circ}{H}{}^1$ $(u \neq 0)$ è punto critico del funzionale:

$$f(u) = \int_\Omega A(x, u(x))\,dx$$

sulla varietà

$$(4) \qquad \|u\|^2 - \bar{\lambda}|u|^2 = K \qquad K \neq 0 \text{ costante}$$

u è, cioè, un punto della varietà individuata dalla (4) nel quale il gradiente di f (relativo alla varietà) vale zero.

Notiamo che non può essere $\mu = 0$ (cioè fra gli autovalori non ci può essere il valore nullo), perchè, allora, come si vede dalla (3), si avrebbe:

$$((u|v)) = \bar{\lambda}(u|v) \qquad \forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1$$

ciò significherebbe che u è autosoluzione dell'operatore $-\Delta$, ma ciò non è possibile perchè abbiamo supposto che sia $\lambda_1 < \bar{\lambda} < \lambda_2$, essendo λ_1 e λ_2 rispettivamente il primo ed il secondo autovalore di $-\Delta$.

Nell'esame, che svolgeremo, del problema (1) supporremo inoltre che siano soddisfatte le seguenti due condizioni, che hanno carattere specifico nei confronti dello studio che ci si propone di fare:

iii) $a(x, y)$ è funzione dispari rispetto ad y;

iv) esiste un sottoinsieme $B \subset \Omega$ di misura positiva tale che per $x \in B$

$$A(x, y) > 0 \qquad \text{se } y \neq 0$$

$$\lim_{|y| \to \infty} A(x, y) = +\infty$$

È utile osservare che segue dalle ipotesi fatte la relazione

$$|a(x, y)| \leqslant \bar{b}|y|^t \tag{5}$$

$\bar{b} > 0$ costante $t = r + 1$ e quindi $t > 1$ e, se $n \geqslant 3$, $t < (n + 2)/(n - 2)$.

Siamo ora, dunque, in grado di esporre in forma precisa il contenuto della presente nota, che si può riassumere nel seguente

TEOREMA I. – *Nelle ipotesi* i), ii), iii), iv) *esistono infiniti livelli critici del funzionale $f(u)$ sulla varietà*

$$\|u\|^2 - \bar{\lambda}|u|^2 = 1$$

e, quindi, il problema (1) *ammette infiniti autovalori* positivi *con autofunzioni soddisfacenti alla* (3).

Vi sono due circostanze che rendono il problema notevolmente più complesso di quelli noti nella letteratura:

I) il fatto che la forma $\Phi(u)$

$$u \xrightarrow{\Phi} \|u\|^2 - \bar{\lambda}|u|^2$$

non è definita positiva, pertanto la varietà individuata dall'equazione (4) (qualunque sia il valore della costante K) è illimitata.

II) Il fatto che la funzione $A(x, y)$, benchè non negativa, non risulta necessariamente definita positiva, ma soddisfa alla più generale ipotesi iv) e quest'ultima ipotesi può essere soddisfatta, ad esempio, anche assumendo come funzione $a(x, y)$ una funzione dl tipo $\bar{a}(x)y^t$ con $\bar{a}$ funzione a supporto « piccolo » (purchè di misura positiva).

In particolare nel nostro caso non sussiste l'ipotesi di Palais-Smale sulla quale è fondata la consueta tecnica per la determinazione dei punti critici (cf. [2], [7], [9]).

La dimostrazione sarà, quindi, basata su una estensione, esposta in un recente lavoro ([3]) del teorema di esistenza dei punti critici.

2. – Come si è già detto, lo studio degli autovalori del problema (1) si riconduce a quello dei punti stazionari del funzionale $f(u) = \int_\Omega A(x, u(x))dx$ su varietà del tipo (4). Se, in particolare, si vuole determinare l'esistenza di autovalori positivi, occorre fissare $K > 0$ nella (4); poichè tale sarà appunto il nostro obiettivo, in quanto segue porremo $K = 1$ e indicheremo con W la varietà

$$\|u\|^2 - \bar{\lambda}|u|^2 = 1 \,. \tag{6}$$

Tutti gli sviluppi che seguono valgono, con banali mutamenti, anche nel caso di una costante $K > 0$ arbitraria.

Cominciamo, pertanto, a studiare le proprietà geometriche della varietà W. Indichiamo con ψ la prima autosoluzione, normalizzata in $\mathring{H}^1$, dell'operatore $-\Delta$, relativo all'aperto Ω, con la condizione di annullamento alla frontiera (assorbita, naturalmente, dalla condizione $\psi \in \mathring{H}^1$). Come è noto, si ha $\|\psi\|^2 = \lambda_1|\psi|^2$ (ricordiamo che con λ_1 abbiamo indicato il primo autovalore di $-\Delta$). Inoltre, se si indica con Q il sottospazio lineare ortogonale a ψ in $\mathring{H}^1$ (ed anche in L^2), si ha per ogni $\varphi \in Q$,

$$\|\varphi\|^2 \geqslant \lambda_2|\varphi|^2 \tag{7}$$

essendo λ_2 il secondo autovalore dell'operatore $-\Delta$.

Dunque la varietà W taglia Q secondo un insieme W_Q connesso, chiuso, limitato e simmetrico rispetto all'origine. Infatti, per i punti di Q vale la (7), ed essendo $\lambda_2 > \bar{\lambda}$, la forma $\Phi(u)$

$$u \overset{\Phi}{\longmapsto} \|u\|^2 - \bar{\lambda}|u|^2$$

risulta definita positiva. Si vede facilmente che W è una varietà connessa e simmetrica rispetto all'origine.

Decomponendo un vettore u secondo i sottospazi complementari ed ortogonali fra loro Q e $Q' = \{\xi\psi\}$, $(\xi \in \boldsymbol{R})$, si ha

$$u = \varphi + \xi\psi \qquad \text{essendo } \varphi \in Q \;\; \xi \in \boldsymbol{R}$$

allora, tenendo presente che Q è orgonale a ψ non solo in $\mathring{H}^1$, ma anche in L^2, la condizione $u \in W$ si esprime nella forma

$$(\|\varphi\|^2 - \bar{\lambda}|\varphi|^2) + \xi^2(1 - \bar{\lambda}|\psi|^2) = 1$$

dove la forma $\varphi \mapsto \|\varphi\|^2 - \bar{\lambda}|\varphi|^2$ è definita positiva ed è $1 - \bar{\lambda}|\psi|^2 < 0$. Pertanto W può essere considerata come un iperboloide ad una falda. Notiamo che la varietà W è di classe C^∞, anzi analitica, infatti il differenziale della forma Φ è l'applicazione lineare

$$v \mapsto 2((u|v)) - 2\bar{\lambda}(u|v) = 2\big[((u|v)) - \bar{\lambda}((G(u)|v))\big]$$

essendo G la funzione di Green per l'operatore $-\Delta$, relativo ad Ω, con condizione di annullamento al bordo, dunque

$$(\nabla\Phi)(u) = 2(u - \bar{\lambda}G(u))$$

che chiaramente, risulta diverso da 0, per $u \neq 0$ $(u \in W)$, dal momento che $\bar{\lambda}$ non è un autovalore per l'operatore $-\Delta$. Osserviamo, ancora, che per i punti della varietà W si ha $\|u\|^2 = 1 + \lambda|u|^2$ e questa relazione esprime una certa equivalenza asintotica su W fra le norme in L^2 e in $\mathring{H}^1$.

Vogliamo, infine, mettere in evidenza che la distanza Riemanniana su W da un arbitrario punto q fissato e la norma in $\mathring{H}^1$ sono asintoticamente equivalenti (e perciò danno luogo alla stessa famiglia di insiemi limitati) ciò è conseguenza del fatto che per ogni $u \in W$ sussistono le seguenti due relazioni

$$\|u - q\| \leqslant d(u, q) \tag{8}$$

$$d(u, q) \leqslant D + \|u\| \qquad D = \text{costante} \tag{9}$$

e che, evidentemente:

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{D + \|u\|}{\|u - q\|} = 1$$

Infatti la disuguaglianza (8) è ovvia in quanto $\|u - q\|$ è la lunghezza del segmento per u e q (cioè la minima distanza in $\mathring{H}^1$ fra u e q senza «vincoli») mentre $d(u, q)$ è l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve di W congiungenti u e q.

La disuguaglianza (9) si ricava osservando che il piano π individuato da u e da ψ taglia la varietà W secondo un'iperbole e che, detto u' il punto in cui il ramo contenente u taglia W_Q, risulta:

$$d(u, q) \leqslant d(u, u') + d(u', q) \leqslant \varrho(u, u') + d(u', q)$$

dove si è indicato con $\varrho(u, u')$ la lunghezza dell'arco di iperbole che congiunge u con u'. Ora si ha

$$\varrho(u, u') \leqslant \|u\| + \|u'\|$$

come si deduce facilmente da un argomento di convessità. Gli insiemi numerici $\{\|u'\|\}$ e $\{d(u', q)\}$, dove u' varia in W_Q sono certamente limitati. Perciò ponendo

$$D = \sup_{u' \in W_Q} (\|u'\| + d(u', q))$$

si ottiene subito la (9).

3. – Richiamiamo a questo punto, al fine di rendere più chiara la tecnica che useremo, il criterio di esistenza per i punti critici su varietà illimitate esposto in [3].

TEOREMA (*). – *Sia V una varietà Riemanniana di classe C^2, connessa, completa, modellata su uno spazio di Hilbert separabile. Sia g una funzione reale, di classe C^2 definita su V. Sia ∇g il gradiente di g. Sia $\mathcal{C}$ una classe di sottoinsiemi chiusi di V invariante per tutte le isotopie che, con le loro inverse, portano gli insiemi limitati in insiemi limitati, sia $c = \sup_{T \in \mathcal{C}} \inf_{x \in T} g(x)$ tale che $-\infty < c < +\infty$, ed esista un numero reale $\varepsilon > 0$ tale che nell'insieme $S_\varepsilon = g^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ siano verificate le seguenti ipotesi:*

$\mathcal{H}_1$) *se $\{x_n\}$ è una successione limitata di S_ε tale che $(\nabla g)(x_n) \to 0$ allora x_n contiene una sottosuccessione convergente (ipotesi di Palais-Smale per gli insiemi chiusi e limitati);*

$\mathcal{H}_2$) *fissato ad arbitrio un punto q e, posto $r(x) = d(x, q)$ si possono determinare due costanti $R > 0$ e $k > 0$ tali che $\|(\nabla g)(x)\| \geq k/r(x)$ se $r(x) > R$.*

Allora esiste almeno un punto $x \in V$ tale che $(\nabla g)(x) = 0$ e $g(x) = c$.

Consideriamo ora il funzionale $f(u) = \int_\Omega A(x, u(x))dx$: esso è definito in $\mathring{H}^1$ e, per le ipotesi (i), (ii), (iii), (iv), risulta pari, di classe C^2 (cf. [1]), non negativo.

Il differenziale di f in u è l'applicazione lineare

$$v \mapsto 2\int_\Omega a(x, u(x))\, v(x)\, dx = 2\int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial G\alpha(u)}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) dx = ((2G\alpha(u)|v))$$

il gradiente « libero » di f sarà quindi

$$(\nabla f)(u) = 2G\alpha(u)$$

mentre l'espressione che dà il gradiente di f relativo alla varietà W sarà:

$$(\nabla_W f)(u) = 2G\alpha(u) - 2\sigma(u - \bar{\lambda}G(u))$$

dove σ è un numero reale tale che la componente normale a W del vettore $(\nabla_W f)(u)$

sia nulla, cioè

$$\sigma = \frac{((G\alpha(u)|u - \bar{\lambda}G(u)))}{\|u - \bar{\lambda}G(u)\|^2}.$$

Dimostreremo, per mezzo dei lemmi seguenti, che, scelto comunque c: $0 < c < < +\infty$, il funzionale $f(u)$ soddisfa le ipotesi $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ del teorema (∗); ne verrà allora che, se c è ottenuto come $\sup\limits_{T\in\mathcal{T}} \inf\limits_{u\in T} f(u)$, quando $\mathcal{T}$ sia una classe di sottoinsiemi di W invariante per isotopie che conservano gli insiemi limitati, c sarà certamente un livello critico per f.

LEMMA 3.1. – *Siano c, ε, ϱ numeri reali tali che $0 < c < +\infty$, $0 < \varepsilon < c/2$, $\varrho > 0$ e sia S_ε l'insieme*

$$S_\varepsilon = \{u \in W: c - \varepsilon \leqslant f(u) \leqslant c + \varepsilon\} = W \cap f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon]).$$

Se $\{u_n\}$ è una successione di punti di $S_\varepsilon \cap \{u \in W: \|u\| \leqslant \varrho\}$ tale che $(\nabla_W f)(u_n) \to 0$, allora $\{u_n\}$ contiene una sottosuccessione convergente.

DIM. – Poniamo

$$g_n = (\nabla_W f)(u_n) = 2G\alpha(u_n) - 2\sigma_n(u_n - \bar{\lambda}G(u_n))$$

da cui ricaviamo

$$u_n = \frac{1}{2\sigma_n}[2G\alpha(u_n) - g_n] + \bar{\lambda}G(u_n).$$

Per ipotesi

$$\lim_{n\to\infty} g_n = 0.$$

Consideriamo ora l'applicazione $u \mapsto G\alpha(u)$: essa è compatta, infatti essa risulta composta delle applicazioni

$$\mathring{H}^1 \overset{j}{\longmapsto} L^s \overset{\alpha}{\longmapsto} L^p \overset{G}{\longmapsto} \mathring{H}^1$$

essendo j l'applicazione di immersione. Esaminiamo il caso $n \geqslant 3$. L'applicazione α per le ipotesi (i) e (ii) trasforma con continuità funzioni $u \in L^s$ in funzioni $\alpha(u) \in L^p$ con $s/p = r + 1 = t$ dove r e t sono gli esponenti che figurano nella (2) e nella (5) rispettivamente (cf. [1]). Preso dunque $s = 1 + t$ si ottiene $p = 1/t + 1$; poichè $t < (n + 2)/(n - 2)$ sarà $s < 2n/(n - 2)$ e pertanto, essendo $2n/(n - 2)$ l'esponente di immersione di Sobolev, j risulta compatta per il teorema di Rellich-Kondraschov; inoltre sarà $p > 2n/(n + 2)$, e allora anche G risulterà continua. Nel caso in cui $n = 2$, l'operatore $u \mapsto G\alpha(u)$ è compatto qualunque sia t perchè, per il teorema di Sobolev, l'immersione di $\mathring{H}^1$ in L^p è continua e compatta qualunque sia $p > 1$.

È possibile, allora, estrarre da u_n una sottosuccessione u_{n_k} tale che $G\alpha(u_{n_k})$ e $G(u_{n_k})$ convergano a limiti finiti in $\mathring{H}^1$.

Allora per provare che u_n contiene una sottosuccessione convergente, basta dimostrare che σ_{n_k} si mantiene discosta da zero. Osserviamo che

$$\left(\left((\nabla_W f)(u_{n_k}) \,\middle|\, \frac{u_{n_k}}{\|u_{n_k}\|}\right)\right) \leqslant \|(\nabla_W f)(u_{n_k})\|$$

d'altra parte, per la convessità di $y \mapsto A(x, y)$, si ha

$$A(x, u(x)) \leqslant 2a(x, u(x))\, u(x) \tag{10}$$

dunque

$$\begin{aligned}\left(\left((\nabla_W f)\,(u_{n_k}) \,\middle|\, \frac{u_{n_k}}{\|u_{n_k}\|}\right)\right) &= \frac{2}{\|u_{n_k}\|}\left(\left(G\alpha(u_{n_k}) - \sigma_{n_k}(u_{n_k} - \bar{\lambda} G(u_{n_k}))\,|\,u_{n_k}\right)\right) = \\ &= \frac{2}{\|u_{n_k}\|}\cdot\left[\left(\left(G\alpha(u_{n_k})\,|\,u_{n_k}\right)\right) - \sigma_{n_k}\left(\|u_{n_k}\|^2 - \bar{\lambda}\left(\left(G(u_{n_k})\,|\,u_{n_k}\right)\right)\right)\right] = \\ &= \frac{2}{\|u_{n_k}\|}\left[\int_\Omega a(x, u_{n_k}(x))\, u_{n_k}(x)\, dx - \sigma_{n_k}(\|u_{n_k}\|^2 - \bar{\lambda}|u_{n_k}|^2)\right] = \\ &\geqslant \frac{1}{\|u_{n_k}\|}\left[\int_\Omega A(x, u(x))\, dx - 2\sigma_{n_k}\right] = \frac{1}{\|u_{n_k}\|}\,[f(u_{n_k}) - 2\sigma_{n_k}]\,.\end{aligned}$$

Ne viene allora

$$\frac{1}{\|u_{n_k}\|}\,[f(u_{n_k}) - 2\sigma_{n_k}] \leqslant \|(\nabla_W f)(u_{n_k})\|$$

da cui

$$(c/2 - 2\sigma_{n_k}) \leqslant \|\nabla_W f)(u_{n_k})\| \cdot \|u_{n_k}\|$$

cioè

$$\sigma_{n_k} \geqslant c/4 - 1/2\, \|(\nabla_W f)(u_{n_k})\| \cdot \|u_{n_k}\|$$

e quindi (essendo u_{n_k} limitata) sarà

$$\min_{k\to\infty} \lim \sigma_{n_k} \geqslant c/4$$

come volevasi dimostrare. ■

Il lemma (3.1) prova che fissato $0 < c < +\infty$ il funzionale $f(u)$ verifica l'ipotesi $\mathcal{K}_1$ del criterio di esistenza non appena si scelga il numero reale ε minore di $c/2$.

LEMMA 3.2. – *È possibile determinare una costante positiva H tale che per ogni $u \in W$ risulti:*

$$\|(\nabla\Phi)(u)\| \geqslant H\|u\| .$$

DIM. – Consideriamo la quantità

$$\frac{\|(\nabla\Phi)(u)\|}{\|u\|} = \frac{\|u - \bar{\lambda}G(u)\|}{\|u\|}$$

e poniamo

$$z = \frac{u}{\|u\|}$$

se, per assurdo, fosse

$$\inf_{\|z\|=1} \|z - \bar{\lambda}G(z)\| = 0$$

esisterebbe una successione z_n tale che

$$\lim_{n\to\infty} \|z_n - \bar{\lambda}G(z_n)\| = 0 \tag{11}$$

G è un operatore compatto, dunque, dalla successione limitata z_n si potrebbe estrarre una sottosuccessione z_{n_k} tale che $\bar{\lambda}G(z_{n_k})$ converga in $\mathring{H}^1$ ad un certo z^*, allora per la (11) si avrebbe $\lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k} = z^*$. D'altra parte dovrebbe essere $z^* \neq 0$, in quanto, per ogni k, $\|z_{n_k}\| = 1$ e quindi $\|z^*\| = 1$.

Per continuità si avrebbe inoltre

$$z^* - \bar{\lambda}G(z^*) = 0$$

e ciò è impossibile, in quanto equivarebbe a dire che z^* è una soluzione non nulla del problema

$$\begin{cases} -\Delta u - \bar{\lambda}u = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

contro l'ipotesi che $\bar{\lambda}$ non sia un autovalore per l'operatore $-\Delta$. ∎

Siamo ora in grado di provare il

LEMMA 3.3. – *Siano c, ε, numeri reali tali che $0 < c < +\infty$, $0 < \varepsilon < c/2$ e sia S_ε l'insieme*

$$S_\varepsilon = \{u \in W : c - \varepsilon \leqslant f(u) \leqslant c + \varepsilon\} = W \cap f^{-1}([c - \varepsilon, c + \varepsilon])$$

è possibile determinare due costanti positive R e k dipendenti da ε e da c, tali che per ogni $u \in S_\varepsilon \cap \{u \in W: \|u\| > R\}$ si abbia $\|(\nabla_W f)(u)\| \geqslant k/\|u\|$.

DIM. – Indichiamo con τ un versore diretto tangenzialmente alla varietà W in u; essendo

$$(((\nabla f)(u)|\tau)) = (((\nabla_W f)(u)|\tau)) \leqslant \|(\nabla_W f)(u)\|$$

basterà dimostrare che, per $\|u\|$ abbastanza grande, si può scegliere τ in modo tale che sia

$$(((\nabla f)(u)|\tau)) \geqslant k/\|u\|$$

essendo k una costante positiva.

A questo scopo, notiamo in primo luogo che i vettori u e $(\nabla\Phi)(u)$ sono indipendenti per $u \in W$ e $\|u\|$ grande. Infatti, normalizzandoli e prendendone il prodotto scalare si ha:

$$\left(\left(\frac{u}{\|u\|}\,\middle|\,\frac{u-\bar{\lambda}G(u)}{\|u-\bar{\lambda}G(u)\|}\right)\right) = \frac{\|u\|^2 - \bar{\lambda}((u|G(u)))}{\|u\|\cdot\|u-\bar{\lambda}G(u)\|} = \frac{1}{\|u\|\cdot\|u-\bar{\lambda}G(u)\|}$$

e si vede immediatamente, utilizzando il lemma (3.2), che questa quantità è infinitesima come $1/\|u\|^2$ al tendere di $\|u\|$ all'infinito.

Assumiamo allora τ uguale al versore combinazione lineare di u e $(\nabla\Phi)(u)$, che sia tangente a W in u, ed abbia prodotto scalare positivo con il vettore u. Si trova, con semplici calcoli, che si ha:

$$\tau = \frac{u}{\|u\|} + O\left(\frac{1}{\|u\|^2}\right).$$

Consideriamo ora la componente su τ di $(\nabla f)(u)$: sarà

$$(12) \qquad \begin{aligned} (((\nabla f)(u)|\tau)) &= \left(\left((\nabla f)(u)\,\middle|\,\frac{u}{\|u\|}\right)\right) + \left(\left((\nabla f)(u)\,\middle|\,\tau - \frac{u}{\|u\|}\right)\right) = \\ &= \left(\left(2G\alpha(u)\,\middle|\,\frac{u}{\|u\|}\right)\right) + \left(\left(2G\alpha(u)\,\middle|\,\tau - \frac{u}{\|u\|}\right)\right) = \\ &= 2\left[\frac{1}{\|u\|}\int_\Omega a(x, u(x))\,u(x)\,dx + \int_\Omega a(x, u(x))\left(\tau(x) - \frac{u(x)}{\|u\|}\right)dx\right]. \end{aligned}$$

D'altra parte si ha

$$(13) \qquad \begin{aligned} \left|\int_\Omega a(x, u(x))\left(\tau(x) - \frac{u(x)}{\|u\|}\right)dx\right| &\leqslant \int_\Omega |a(x, u(x))|\cdot\left|\tau(x) - \frac{u(x)}{\|u\|}\right|dx \leqslant \\ &\leqslant \left(\int_\Omega \left|a(x, u(x))\right|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_\Omega \left|\tau(x) - \frac{u(x)}{\|u\|}\right|^q dx\right)^{1/q} \end{aligned}$$

essendo (sempre nel caso $n > 2$, perchè per $n = 2$ il risultato si ottiene banalmente)

$$p = \frac{1}{t} + 1 > \frac{n-2}{n+2} + 1 = \frac{2n}{n+2}$$

e dunque

$$q = t + 1 < \frac{2n}{n-2}$$

che è l'esponente di Sobolev di immersione di $\mathring{H}^1$ in L^q. Allora esiste una costante M dipendente solo da Ω tale che

$$\left(\int_\Omega \left| \tau(x) - \frac{u(x)}{\|u\|} \right|^q dx\right)^{1/q} \leqslant M \left\| \tau - \frac{u}{\|u\|} \right\| \leqslant \frac{\bar{M}}{\|u\|^2} \tag{14}$$

essendo $\bar{M}$ una costante.

Inoltre si ha

$$\int_\Omega |a(x, u(x))|^p dx \leqslant N \int_\Omega a(x, u(x))\, u(x)\, dx \qquad N = \text{cost.} \tag{15}$$

infatti dalla disuguaglianza (5)

$$|a(x, u(x))| \leqslant \bar{b} |u(x)|^t$$

si ricava

$$|a(x, u(x))|^{1/t} \leqslant \bar{b}^{1/t} |u(x)|$$

e ancora

$$|a(x, u(x))|^{1/t+1} \leqslant \bar{b}^{1/t} |u(x)| \cdot |a(x, u(x))| = \bar{b}^{1/t} u(x)\, a(x, u(x))$$

$\big($essendo per le ipotesi su $a(x, y)$, $u(x)\, a(x, u(x)) \geqslant 0\big)$.

E, poichè $p = 1/t + 1$, possiamo infine scrivere

$$|a(x, u(x))|^p \leqslant \bar{b}^{1/t} u(x)\, a(x, u(x))$$

da cui integrando membro a membro, si ottiene la diseguaglianza (15).

Dalle (12), (13), (14), (15) si ricava allora

$$
\begin{aligned}
((\nabla f)(u)|\tau)) &\geqslant 2\left[\frac{1}{\|u\|}\int_\Omega a(x,u(x))\,u(x)\,dx - \frac{\bar M}{\|u\|^2}N^{1/p}\left(\int_\Omega a(x,u(x))\,u(x)\,dx\right)^{1/p}\right] > \\
&> 2\left[\frac{1}{\|u\|}\int_\Omega a(x,u(x))\,u(x)\,dx - \frac{\bar M N^{1/p}}{\|u\|^2} - \frac{\bar M N^{1/p}}{\|u\|^2}\int_\Omega a(x,u(x))\,u(x)\,dx\right] = \\
&= \frac{2}{\|u\|}\int_\Omega a(x,u(x))\,u(x)\,dx\left(1 - \frac{\bar M N^{1/p}}{\|u\|}\right) - \frac{2\bar M N^{1/p}}{\|u\|^2} \geqslant \\
&\geqslant \frac{1}{\|u\|}\int_\Omega a(x,u(x))\,u(x)\,dx - \frac{2\bar M N^{1/p}}{\|u\|^2}
\end{aligned}
$$

non appena sia $\|u\|\geqslant 2\bar M N^{1/p}$. Perciò

$$
((\nabla f)(u)|\tau)) \geqslant \frac{1}{2\|u\|}\int_\Omega A(x,u(x))\,dx - O\left(\frac{1}{\|u\|^2}\right) \geqslant \frac{c-\varepsilon}{2\|u\|} - O\left(\frac{1}{\|u\|^2}\right)
$$

come si voleva. ∎

Il lemma (3.3) prova dunque che fissato $0 < c < +\infty$, il funzionale $f(u)$ soddisfa l'ipotesi $\mathcal{K}_2$ del criterio di esistenza, assumendo il numero reale ε minore di $c/2$.

4. – In quanto segue useremo la notazione $[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ per indicare la varietà generata dal sistema di vettori $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$; diremo, inoltre, che il sistema di funzioni misurabili definite su Ω $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ è *linearmente indipendente su un insieme I di misura positiva* se, comunque scelti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ reali, non contemporaneamente nulli, il sottoinsieme:

$$
L = \{x\colon \alpha_1 v_1(x) + \alpha_2 v_2(x) + \ldots + \alpha_n v_n(x) \neq 0\} \cap I
$$

ha misura positiva.

Poniamo $V_k = [\psi, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n]$, dove, ricordiamo, ψ è la prima autofunzione, normalizzata in $\mathring{H}^1$, dell'operatore $-\Delta$; $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ sono funzioni di norma unitaria, ortogonali fra loro ed ortogonali a ψ in $\mathring{H}^1$, e tali che il sistema $\{\psi, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k\}$ risulti linearmente indipendente nel sottoinsieme B di Ω di cui si parla nell'ipotesi (iv).

LEMMA 4.1. – *Sia $T_k = V_k \cap W$; il funzionale $f(u)$ ha su T_k minimo e tale minimo è positivo.*

DIM. – Osserviamo, innanzi tutto, che $f(u) > 0$ per ogni $u \in T_k$, infatti se $u \in T_k$ sarà del tipo

$$
u = \xi\psi + \eta_1\chi_1 + \eta_2\chi_2 + \ldots + \eta_k\chi_k
$$

con $\xi, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$ non contemporaneamente nulli (dal momento che $0 \notin W$), inoltre per la lineare indipendenza di $\{\psi, \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k\}$ su B, esiste un sottoinsieme C_u di B, di misura positiva, tale che

$$u(x) \neq 0 \qquad \forall x \in C_u .$$

Segue allora dall'ipotesi (iv) che $A(x, u(x)) > 0 \ \forall x \in C_u$, ne viene pertanto

$$f(u) = \int_\Omega A(x, u(x))\, dx \geqslant \int_{C_u} A(x, u(x))\, dx > 0 .$$

Essendo compatto ogni insieme chiuso e limitato di T_k, per conseguire la tesi basterà allora dimostrare che $\lim\limits_{\substack{\|u\|\to\infty \\ u\in T_k}} f(u) = +\infty$.

Supponiamo, per assurdo, che ciò non sia. Esisterà allora una successione $\{u_n\}$ di punti di T_k, tale che

$$\|u_n\| \to +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} f(u_n) < +\infty .$$

Poniamo $u_n = \xi_n \psi + v_n$ con v_n combinazione lineare di $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_k$ e, pertanto, $v_n \in Q$. La condizione $u_n \in W$ ci dà, tenendo presente l'ortogonalità di Q e Q' (sia in $\mathring{H}^1$ che in L^2)

$$\|v_n\|^2 - \bar{\lambda}|v_n|^2 = 1 + (\bar{\lambda}/\lambda_1 - 1)\,\xi_n^2 .$$

Poichè su Q la forma $v \mapsto \|v\|^2 - \bar{\lambda}|v|^2$ è definita positiva, la divergenza di $\|u_n\|$ a $+\infty$ implica la divergenza di $\|v_n\|$ e di $|\xi_n|$. Dividendo membro a membro per ξ_n^2 si ha dalla precedente uguaglianza:

$$\left\| \frac{1}{\xi_n} v_n \right\|^2 - \bar{\lambda} \left| \frac{1}{\xi_n} v_n \right|^2 = \frac{1}{\xi_n^2} + (\bar{\lambda}/\lambda - 1) .$$

Poichè la successione $(1/\xi_n)\, v_n$ è limitata ed è contenuta in un sottospazio di dimensione finita, da essa si può estrarre una successione convergente. Posto $z_n = \psi + (1/\xi_n)\, v_n$, non è restrittivo supporre che z_n converga verso una funzione $z^* \in V_k$. Notiamo che è certamente $z^* \neq 0$ e che la convergenza di z_n a z^* implica la convergenza puntuale. Esiste certamente un sottoinsieme C^* di B di misura positiva tale che in esso è $z^*(x) \neq 0$; per $x \in C^*$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} A(x, u_n(x)) = \lim_{n\to\infty} A(x, \xi_n z_n(x)) = +\infty .$$

Da questa relazione si deduce immediatamente che

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega A(x, u_n(x))\, dx = +\infty$$

contrariamente a quanto supposto. ■

Ci proponiamo, adesso, di applicare al nostro problema il criterio di esistenza dei punti critici (Teorema $*$). A tal fine riteniamo opportuno modificare la nostra impostazione: in luogo della varietà W (che è simmetrica rispetto all'origine) consideriamo la varietà $\tilde{W}$ ottenuta da W mediante l'identificazione dei punti simmetrici. È evidente che $\tilde{W}$ è pure una varietà regolare, dal momento che il centro di simmetria non appartiene a W. La funzione f, che è pari, dà luogo canonicamente ad una funzione $\tilde{f}$ definita su $\tilde{W}$, i cui punti critici corrispondono a coppie di punti critici simmetrici di f su W. I lemmi (3.1), (3.2), (3.3), (4.1) hanno un'immediata traduzione alla coppia $(\tilde{W}, \tilde{f})$.

Siano $\tilde{T}_k$ le sottovarietà di $\tilde{W}$ ottenute dalle varietà $T_k = V_k \cap W$ mediante identificazione dei punti opposti e sia $\tilde{\mathcal{C}}_k$ la famiglia degli insiemi che si ottengono da $\tilde{T}_k$ mediante un'isotopia che trasforma in modo uniforme i limitati in limitati. (Su W questa sarà vista come un'isotopia simmetrica rispetto all'origine, che trasforma in modo uniforme i limitati in limitati).

Poniamo allora:

$$c_k = \sup_{T \in \tilde{\mathcal{C}}_k} \inf_{u \in T} \tilde{f}(u) . \tag{16}$$

LEMMA 4.2. – *Si ha:* $0 < c_k < +\infty$.

DIM. – Che sia $c_k > 0$ è una immediata conseguenza del lemma (4.1): su opportune varietà $\tilde{T}_k$ il minimo di $\tilde{f}$ è positivo. Che sia $c_k < +\infty$ dipende dal fatto che, come si dimostrerà in un contesto più generale (lemma 5.2), ogni insieme della famiglia $\tilde{\mathcal{C}}_k$ ha intersezione non vuota con l'insieme $\tilde{W}_Q$, ottenuto da W_Q identificando i punti simmetrici. Ora l'insieme W_Q è limitato e su di esso la funzione f è limitata. ∎

Riflettendo allora al teorema ($*$) ed ai lemmi (3.1) e (3.3) (adattati alla coppia $(\tilde{W}, \tilde{f})$) possiamo concludere con il seguente lemma, che compendia i risultati ottenuti:

LEMMA 4.3. – *Ciascuno dei valori c_k definiti dalla* (16) *è un livello critico.*

Pertanto, per ciascuno dei valori c_k esiste almeno una coppia di punti simmetrici $(u_k, -u_k)$ che sono critici per il funzionale f.

5. – Per la maniera in cui sono stati definiti i numeri c_k (vd. la (16)) risulta:

$$0 < \ldots \leqslant c_{k+1} \leqslant c_k \leqslant \ldots \leqslant c_2 \leqslant c_1 < +\infty .$$

Allora, per concludere la dimostrazione del teorema I, rimane da dimostrare che ci sono infiniti livelli critici distinti. Per ottenere questo risultato dimostreremo che

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} \sup_{T \in \tilde{\mathcal{C}}_k} \inf_{u \in T} f(u) = 0 \tag{17}$$

cioè che preso ad arbitrio $\varepsilon > 0$ si può trovare un intero $\bar{k}$ tale che per $k \geqslant \bar{k}$ risulti:

$$\sup_{T \in \tilde{\mathfrak{C}}_k} \inf_{u \in T} \tilde{f}(u) < \varepsilon .$$

Ovvero in forma ancora più semplice: in ogni insieme T della famiglia $\tilde{\mathfrak{C}}_k$ esiste un u tale che $\tilde{f}(u) \leqslant \varepsilon$.

OSSERVAZIONE. – Per stabilire semplicemente l'esistenza di *almeno un* livello critico (e quindi di un autovalore positivo per il problema (1)) basta l'esistenza di almeno un livello c_k: non è necessaria l'ipotesi della parità del funzionale $u \mapsto \int_\Omega A(x, u(x))\, dx$, cioè l'ipotesi (iii). In questo caso, naturalmente, l'esistenza di un punto critico viene stabilita senza il passaggio alla varietà $\tilde{W}$.

Per dimostrare la relazione di limite (17) ci è necessario applicare la nozione di Categoria secondo Lusternik e Schnirelman. Ricordiamo che, dato un sottoinsieme chiuso non vuoto C di uno spazio topologico X si dice *Categoria di C relativa ad X*: cat (C, X) il più piccolo intero k per il quale esistono k insiemi chiusi: $C_1, C_2, \ldots, C_k$ tali che $\bigcup_{j=1}^{k} C_j \supset C$ e tali che l'applicazione identica $i\colon C_j \mapsto X$ sia omotopa ad una costante in X. Se tale intero non esiste si pone cat $(C, X) = +\infty$ inoltre si pone cat $(\phi) = 0$.

Si dimostrano facilmente le seguenti proprietà generali della categoria:

1) se $C_1 \subset C_2$, essendo C_1 e C_2 chiusi in X, allora

$$\operatorname{cat}(C_1, X) \leqslant \operatorname{cat}(C_2, X)$$

2) se $X \subset Y$ e X è chiuso in Y, allora

$$\operatorname{cat}(C, X) \geqslant \operatorname{cat}(C, Y)$$

3) se C_1 e C_2 sono chiusi in X, allora

$$\operatorname{cat}(C_1 \cup C_2, X) \leqslant \operatorname{cat}(C_1, X) + \operatorname{cat}(C_2, X) .$$

Enunciamo ora due lemmi, uno di carattere generale ed uno legato al nostro problema particolare.

LEMMA 5.1. – *Sia V una varietà riemanniana completa, di classe C^2, e sia g una funzione di classe C^2, limitata, definita in V, che soddisfi all'ipotesi di Palais-Smale. Allora* cat $(V, V) < +\infty$. *Se l'ipotesi di Palais-Smale vale solo nell'insieme $V_\lambda = \{u\colon u \in V,\, g(u) \geqslant \lambda\}$, allora* cat $(V_\lambda, V) < +\infty$.

La dimostrazione di questo lemma si può ottenere con la nota tecnica dello scorrimento della varietà su se stessa (Cf. [8], oppure [10]).

LEMMA 5.2. – *Se* $T \in \tilde{\mathcal{C}}_k$, *allora* $\operatorname{cat}(T \cap \tilde{W}_Q, \tilde{W}_Q) \geqslant k$.

La dimostrazione di questo lemma sarà l'oggetto del paragrafo successivo.

Vediamo ora come, assumendo questi lemmi, si può dimostrare la relazione di limite (17).

Fissiamo un numero $\varepsilon > 0$ e poniamo $F_\varepsilon = \{u: u \in \tilde{W}_Q, \tilde{f}(u) \geqslant \varepsilon\}$; osserviamo che nell'insieme F_ε vale l'ipotesi di Palais-Smale: la dimostrazione si fa come per il lemma (3.1), tenendo presente che l'insieme $\tilde{W}_Q$ è limitato. Sia:

$$m = \operatorname{cat}(F_\varepsilon, \tilde{W}_Q)$$

Per il lemma (5.1) m risulta finito. Sia ora $k > m$ e sia $T \in \tilde{\mathcal{C}}_k$. È certamente falso che

$$T \cap \tilde{W}_Q \subset F_\varepsilon .$$

Infatti, se questa relazione valesse si avrebbe:

$$m = \operatorname{cat}(F_\varepsilon, \tilde{W}_Q) \geqslant \operatorname{cat}(T \cap \tilde{W}_Q, \tilde{W}_Q) \geqslant k$$

mentre si è preso $k > m$.

Dunque esistono punti in $T \cap \tilde{W}_Q$ tali che $\tilde{f}(u) < \varepsilon$.

Così la dimostrazione è conclusa.

6. – Riportiamo in questo paragrafo la dimostrazione del lemma (5.2).

Anzitutto, al fine di utilizzare risultati noti, eseguiremo due costruzioni. La prima consiste nell'aggiungere alla varietà $\tilde{W}$ un punto all'infinito: ∞. Assumeremo come intorni del punto ∞ gli insiemi complementari degli insiemi limitati. Indichiamo con $\tilde{W}^*$ lo spazio topologico così ottenuto. Le applicazioni di $\tilde{W}$ in $\tilde{W}$ che si possono prolungare ad applicazioni di $\tilde{W}^*$ in $\tilde{W}^*$ che lasciano fisso il punto ∞ sono quelle le cui inverse mandano insiemi limitati in insiemi limitati; le isotopie di $\tilde{W}$ che si possono estendere in isotopie di $\tilde{W}^*$ che lasciano fisso il punto ∞ sono quelle che, con le loro inverse, transformano i limitati in limitati, in modo uniforme.

La seconda costruzione è contenuta nel seguente lemma:

LEMMA 6.1. – *La varietà* $\tilde{W}^*$ *è omeomorfa allo spazio proiettivo di dimensione numerabile* P^∞.

DIM. – Introdurremo un diffeomorfismo che trasformi $\tilde{W}^*$ in P^∞, intendendo con P^∞ la sfera unitaria, del nostro spazio di Hilbert, in cui siano stati identificati i punti simmetrici rispetto all'origine.

Consideriamo un'applicazione del tipo:

$$u \overset{\gamma}{\longmapsto} \lambda u + \mu\psi \tag{18}$$

dove λ e μ sono funzioni opportune di $\|u\|$ e di $((u|\psi))$ a valori reali: λ non negativa e μ dello stesso segno di $((u|\psi))$.

Osserviamo che, perchè l'applicazione (18) abbia le proprietà volute, occorre chiedere che λ e μ siano tali che

$$(19)\qquad \begin{cases} \|\lambda u + \mu\psi\| = 1 \\ ((u|\psi)) = 0 \Rightarrow \mu = 0 \\ \lambda = o\left(\dfrac{1}{\|u\|}\right) \quad \text{al tendere di } u \text{ all'infinito su } \tilde{W}^* \end{cases}$$

delle relazioni raccolte nella (19) la prima traduce il fatto che il punto immagine di u deve appartenere alla sfera unitaria del nostro spazio e la seconda che i punti dello spazio ortogonale a ψ rimangono nel medesimo spazio, l'ultima è rivolta ad ottenere che al tendere di u all'infinito su $\tilde{W}^*$ il punto $\gamma(u)$ corrispondente tenda al punto ψ sulla sfera unitaria.

Posto

$$\lambda = \frac{1}{\|u\|(1 + ((u|\psi))^2)}$$

μ risulta univocamente determinato e si verifica facilmente che l'applicazione γ, che prende la forma

$$u \overset{\gamma}{\longmapsto} \frac{1}{\|u\|(1 + ((u|\psi))^2)}\, u + [\sqrt{1 + 2\,\|u\|^2 + \|u\|^2\,((u|\psi))^2} - 1]\, \frac{((u|\psi))}{\|u\|(1 + ((u|\psi))^2)}\, \psi$$

è il cercato omeomorfismo fra $\tilde{W}^*$ e P^∞. ■

Osserviamo che la costruzione eseguita lascia fissi i punti di $\tilde{W}_Q$, il quale perciò diventa un sottospazio proiettivo di codimensione 1 di P^∞. Inoltre, la stessa costruzione trasforma le sottovarietà $\tilde{T}_k$ in sottospazi proiettivi k-dimensionali di P^∞, che hanno, come è noto, categoria relativa a P^∞ uguale a $k + 1$. Gli insiemi della famiglia $\tilde{\mathfrak{C}}_k$ che sono trasformati per isotopia degli insiemi $\tilde{T}_k$, sono anch'essi compatti di categoria $k + 1$.

Riformuliamo allora il lemma (5.2) in termini più generali così:

LEMMA 6.2. – *Sia P uno spazio proiettivo (di dimensione finita o numerabile) e sia E un suo sottospazio proiettivo di codimensione* 1. *Sia F un sottospazio compatto di categoria $k + 1$. Allora l'insieme $E \cap F$ ha categoria maggiore o uguale a k rispetto a P.*

Premettiamo alla dimostrazione di questo lemma, un lemma la cui dimostrazione si può trovare per esempio in [7]:

LEMMA 6.3. – *Sia A un sottoinsieme chiuso di una varietà differenziabile M, allora esiste un intorno aperto U di A tale che* cat $(\overline{U}, M) =$ cat (A, M).

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 6.2. – Conviene rappresentare P come lo spazio che si ottiene da una palla unitaria: $\{x\colon \|x\| \leqslant 1\}$ di uno spazio di Hilbert reale, identificando i punti opposti (cioè simmetrici rispetto all'origine) della sfera unitaria $\{x\colon \|x\| = 1\}$, e rappresentare il sottospazio E come la sfera unitaria $\{x\colon \|x\| = 1\}$ in cui siano stati identificati i punti opposti.

In virtù del lemma (6.2) si possono determinare due sottoinsiemi chiusi di P, Z e L con queste proprietà:

$$Z \text{ contiene nel suo interno } F \text{ ed è } \operatorname{cat}(Z, P) = \operatorname{cat}(F, P) = k + 1$$

$$L \text{ contiene nel suo interno } E \cap F \text{ ed è } \operatorname{cat}(L, P) = \operatorname{cat}(E \cap F, P).$$

Indichiamo inoltre con

$$D_\theta \text{ l'insieme } \{u\colon 1 - \theta \leqslant \|u\| \leqslant 1\}$$

$$D'_\theta \text{ l'insieme } \{u\colon \|u\| \leqslant 1 - \theta\}\,.$$

Consideriamo ora l'insieme

$$J_\theta = (Z \cap L \cap D_\theta) \cup (Z \cap D'_\theta)\,.$$

Possiamo affermare che, per θ abbastanza piccolo, esso contiene F. Infatti, supponiamo, per assurdo, che per ogni intero $n > 0$ esista un punto $x_n \in F$ tale che $x_n \notin J_{1/n}$. Essendo $F \subset Z$ deve essere $x_n \in Z \cap D_{1/n}$ $(x_n \notin L)$. Ma, essendo F un compatto, è possibile estrarre da x_n una successione x_{n_k} convergente verso un punto x^*; risulta allora $x^* \in F \cap E$, dal momento che x^* deve appartenere all'intersezione di tutti gli insiemi $D_{1/n}$, intersezione che è appunto l'insieme E, ma ciò è assurdo perchè essendo x^* interno ad L, gli elementi della successione x_{n_k}, per k abbastanza grande, dovrebbero appartenere ad L; allora per θ sufficientemente piccolo, si ha

$$F \subset J_\theta \subset Z$$

perciò

$$\operatorname{cat}(J_\theta, P) = \operatorname{cat}(Z, P) = \operatorname{cat}(F, P) = k + 1$$

inoltre

$$E \cap F \subset Z \cap L \cap D_\theta \subset L$$

quindi

$$\operatorname{cat}(Z \cap L \cap D_\theta, P) = \operatorname{cat}(L, P) = \operatorname{cat}(E \cap F, P)$$

dunque

$$k + 1 = \operatorname{cat}(F, P) = \operatorname{cat}(J_\theta, P) \leqslant \operatorname{cat}(Z \cap L \cap D_\theta, P) + \operatorname{cat}(Z \cap D'_\theta, P) = \\ = \operatorname{cat}(E \cap F, P) + \operatorname{cat}(Z \cap D'_\theta, P)\,.$$

Ma l'insieme $Z \cap D'_\theta$ (se non è vuoto) è evidentemente contrattile in un punto, pertanto cat $(Z \cap D'_\theta, P) \leqslant 1$.

Si conclude

$$\text{cat}\,(E \cap F, P) \geqslant k\,.$$

Notiamo che, a maggior ragione $E \cap F$ ha categoria maggiore o uguale a k rispetto allo spazio E. ∎

Desidero ringraziare il prof. Giovanni PRODI per gli utili consigli datimi nel corso di questa ricerca.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. AMBROSETTI - G. PRODI, *Analisi non lineare*, Quaderno della Scuola Normale Superiore di Pisa (1973).

[2] D. C. CLARK, *A variant of the Lusternik-Schnirelman theory*, Indiana Univ. Math. Journal, **22** (1972), pp. 65-74.

[3] G. CERAMI, *Un criterio di esistenza per i punti critici su varietà illimitate*, Rend. Ist. Lombardo, Classe di Scienze, Sez. A, **113** (1979).

[4] R. COURANT - D. HILBERT, *Méthods of Mathematical Physics*, Interscience Publ., New York (1963).

[5] L. A. LUSTERNIK - L. SCHNIRELMAN, *Methodes topologiques dans les problèmes variationnels*, Gauthier-Villars, Paris (1934).

[6] R. S. PALAIS, *Homotopy theory of infinite dimensional manifolds*, Topology, **5** (1966), pp. 1-16.

[7] R. S. PALAIS, *Lusternik-Schnirelman theory on Banach manifolds*, Topology, **5** (1966), pp. 115-132.

[8] G. PRODI, *Corso di analisi non lineare*, Scuola Normale Superiore di Pisa (1973).

[9] J. T. SCHWARTZ, *Generalizing the Lusternik-Schnirelman theory of critical points*, Com. Pure Appl. Math., **17** (1964), pp. 307-315.

[10] A. AMBROSETTI, *Topics in critical point theory and applications to nonlinear problems*, Math. Inst. der Ruhr-Universität Bochum, West Germany and Ist. Mat. Università di Ferrara, Italy.