Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben.

Von

Erich Rothe in Breslau.

Gegeben sei die in den Ableitungen der gesuchten Funktion z lineare Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = R(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + S(x, y, z). \tag{1}$$

Für $0 < y < 1$, $0 < x$ werde eine stetig nach x differenzierbare Lösung $z(x, y)$ von (1) gesucht, welche die Randbedingungen

$$z(0, y) = z_0(y); \quad z(x, 0) = 0; \quad z(x, 1) = 0 \tag{2}$$

erfüllt, wobei z_0 eine gegebene Funktion von y ist[1]).

---

[1]) Wegen der genaueren Voraussetzungen über die gegebenen Funktionen siehe S. 653, 656 und 666.

Die allgemeinere Aufgabe

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = R(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + S(x, y, z) + T(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} \qquad \begin{bmatrix} \chi_0(x) \neq \chi_1(x) \\ \chi_0(0) = 0 \\ \chi_1(0) = 1 \end{bmatrix}$$
$$z(0, y) = z_0(y); \quad z(x, \chi_0(x)) = f_0(x); \quad z(x, \chi_1(x)) = f_1(x)$$

läßt sich, wie leicht zu sehen, unter gewissen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen über die gegebenen Funktionen $R, S, T, \chi_0, \chi_1, f_0, f_1$ auf das Problem (1), (2) zurückführen:

Zunächst erhält man durch die Transformation $\eta = \frac{y - \chi_0(x)}{\chi_1(x) - \chi_0(x)}$, $\xi = x$, $z(x, y) = u(\xi, \eta)$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = R_1(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + S_1(\xi, \eta, u) + T_1(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

mit den Randbedingungen

$$u(0, \eta) = u_0(\eta); \quad u(\xi, 0) = f_0(\xi); \quad u(\xi, 1) = f_1(\xi).$$

Durch die Transformation

$$u = v e^{\frac{1}{2} \int_0^\eta T_1 d\eta}$$

(Fortsetzung der Fußnote [1]) auf nächster Seite.)

Wir wollen nun z in der folgenden Weise zu approximieren versuchen: wir teilen das Intervall von 0 bis X ($X > 0$) in n Teile der Länge $h = X:n$ und ersetzen (1), (2) durch

$$(1') \qquad \frac{d^2 w_{\nu+1}}{dy^2} = R(x_{\nu+1}, y)\frac{w_{\nu+1} - w_\nu}{h} + S(x_{\nu+1}, y, w_\nu),$$

$$(2') \qquad w_0(y) = z_0(y); \quad w_{\nu+1}(0) = 0; \quad w_{\nu+1}(1) = 0.$$

Da $w_0 = z_0$ gegeben ist, stellt (1'), (2') für $\nu = 0$ ein *ein*dimensionales lineares Randwertproblem für die Funktion $w_1(y)$ dar; allgemein stellt (1'), (2') eine eindimensionale lineare Randwertaufgabe für $w_{\nu+1}$ dar, wenn w_ν schon bekannt ist (und w_ν noch im Definitionsbereich des Koeffizienten S liegt).

Die Arbeit zerfällt in vier Teile: Im *ersten* werden zwei Hilfssätze über das Verhalten von Lösungen gewisser eindimensionaler Randwertprobleme zweiter Ordnung bei unendlich wachsendem, in der Differentialgleichung enthaltenem Parameter $\lambda = 1:h$ bewiesen. Im *zweiten* wird unter Voraussetzung der Existenz einer Lösung $z(x, y)$ des Problems (1), (2) gezeigt, daß die Differenz $z(x_\nu, y) - w_\nu(y)$ mit feiner werdender Teilung gegen Null strebt. Im *dritten* Teile wird gezeigt, wie man den Existenzbeweis für die Lösung von (1), (2) durch Grenzübergang aus den Lösungen $w_\nu(y)$ von (1'), (2') führen kann (wobei sich zugleich eine Abschätzung des Fehlers $z(x_\nu, y) - w_\nu(y)$ ergibt, S. 665)[2]. Bei diesem Beweis wird aber vorausgesetzt, daß (1) in den Punkten $x = 0$, $y = 0$ und $x = 0$, $y = 1$ erfüllt ist. Diese Voraussetzung zieht starke Einschränkungen für die gegebene Funktion $z_0(y)$ nach sich (S. 656, insbesondere Gleichung (24)).

---

erhält man eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = R_2(\xi, \eta)\frac{\partial v}{\partial \xi} + S_2(\xi, \eta, v)$$

mit den Randbedingungen

$$v(0, \eta) = v_0(\eta); \quad v(\xi, 0) = g_0(\xi); \quad v(\xi, 1) = g_1(\xi).$$

Durch die weitere Transformation

$$\zeta(\xi, \eta) = v(\xi, \eta) - g_0(\xi)(1 - \eta) - g_1(\xi)\eta$$

erhält man schließlich ein Problem der Form (1), (2).

[2]) Wegen anderer Beweise für die Existenz von Lösungen des Problems vergleiche Gevrey, Journ. de Math. (6) 9 (1913) Equations aux dérivées partielles du type parabolique. — Die in der vorliegenden Arbeit befolgte Methode läßt sich auch auf gewisse Anfangswertprobleme partieller Differentialgleichungen anwenden. Die Anregung dazu, die von mir zunächst für Anfangswertprobleme durchgeführte Methode auf Randwertaufgaben zu übertragen, stammt von Herrn Prof. v. Mises. Vgl. auch dessen Vortrag: „Bemerkungen zur Hydrodynamik“, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. 7 (1927), insbesondere S. 439.

Im *vierten* Teil wird diese Einschränkung wieder aufgehoben, indem eine *beliebige* stetige (für $y=0$ und $y=1$ verschwindende) Funktion $z_0(y)$ durch Funktionen approximiert wird, die die Voraussetzungen des dritten Teils erfüllen, und die Konvergenz der zugehörigen Lösungen von (1) bewiesen wird. Hierbei wird benutzt, daß das Ergebnis des zweiten Teils ausreicht, um die Existenz einer Greenschen Funktion zu beweisen.

I.

Hilfssatz 1. Sei

$$w'' - \lambda \varrho(y) w = -\varrho(y) \varphi(y, \lambda), \tag{3}$$

$$w(0) = w(1) = 0 \tag{4}$$

ϱ und φ seien in $0 \leqq y \leqq 1$ stetige Funktionen von y und es sei $0 < m \leqq \varrho(y)$. φ sei überdies stetig in λ für $\lambda \geqq 0$. Bei festem $\lambda > 0$ ist dann

$$|w(y)| \leqq \frac{1}{\lambda} \operatorname{Max} |\varphi \qquad (0 \leqq y \leqq 1). \tag{5}$$

Beweis. Nehmen wir zunächst $\varphi \geqq 0$ an. Dann ist auch $w \geqq 0$. Andernfalls hätte nämlich w in $(0, 1)$ ein negatives Minimum. Da dieses wegen (4) nicht in $y=0$ oder $y=1$ angenommen werden kann, wäre an der betreffenden Stelle $w'' \geqq 0$, $\lambda \varrho w < 0$, $\varrho \varphi \geqq 0$, was nach (3) unmöglich ist. w nimmt daher ein positives Maximum an, und an der Stelle, wo dieses angenommen wird, ist nach (3)

$$\frac{\varphi}{\lambda} - w = -\frac{w''}{\lambda \varrho} \geqq 0.$$

Wegen $w \geqq 0$ folgt hieraus die Behauptung im Falle $\varphi \geqq 0$.

Zum Beweise des allgemeinen Falles bemerken wir, daß die Lösung von (3), (4) durch

$$w(y) = \int_0^1 \varrho(\eta) \varphi(\eta, \lambda) g(y, \eta, \lambda) d\eta \tag{6}$$

gegeben wird, wenn g die zu der Randbedingung (4) gehörige Greensche Funktion von $w'' - \lambda \varrho w$ ist. Nun ist $g(y, \eta, \lambda) \geqq 0$, wenn y und η in $(0, 1)$ liegen. Daher folgt aus (6)

$$|w(y)| \leqq \int_0^1 \varrho(\eta) |\varphi(\eta, \lambda)| g(y, \eta, \lambda) d\eta. \tag{7}$$

Das rechts stehende Integral ist aber die Lösung von (3), (4), wenn in (3) φ durch $|\varphi|$ ersetzt wird und daher nach dem schon Bewiesenen gewiß $\leqq \frac{\operatorname{Max}|\varphi|}{\lambda}$, so daß aus (7) die zu beweisende Ungleichung (5) folgt.

Hilfssatz 2. Sei $w(y)$ die durch

$$w(0) = \alpha, \quad w(1) = \beta$$

bestimmte Lösung von (3). Dann ist bei festem $\lambda > 0$

$$(8) \qquad |w| \leqq \frac{1}{\lambda} \operatorname{Max} |\varphi| + \operatorname{Max}(|\alpha|, |\beta|) \qquad (0 \leqq y \leqq 1).$$

Beweis. Wir setzen $w = w_1 + w_2$, wo w_1 und w_2 durch

$$w_1'' - \lambda \varrho(y) w_1 = -\varrho(y) \varphi(y, \lambda) \qquad w_1(0) = w_1(1) = 0$$

$$w_2'' - \lambda \varrho(y) w_2 = 0 \qquad w_2(0) = \alpha;\ w_2(1) = \beta$$

bestimmt sind. Da w_2 in einem *inneren* Punkte von $(0, 1)$ weder ein positives Maximum noch ein negatives Minimum annehmen kann, ist $|w_2| \leqq \operatorname{Max}(|\alpha|, |\beta|)$; daher folgt die Behauptung (8) aus Hilfssatz 1.

II.

Satz 1. *Im Bereiche*

$$(9) \qquad 0 \leqq x \leqq X, \quad 0 \leqq y \leqq 1, \quad |z| \leqq Z$$

seien die Koeffizienten R, S von (1) *nebst ihren ersten Ableitungen nach z stetige Funktionen ihrer Argumente; ferner sei R einmal stetig nach x, zweimal stetig nach y differenzierbar und es sei im Bereiche* (9)

$$(10) \qquad R(x, y) \geqq m > 0.$$

Wir behaupten: Wenn eine Lösung $z(x, y)$ von (1), (2) *existiert, die in*

$$(11) \qquad 0 \leqq x \leqq a < X, \quad 0 \leqq y \leqq 1$$

nebst ihrer ersten Ableitung nach x stetig ist (auch am Rande des Bereiches (11)) *und dort der Bedingung*

$$(12) \qquad |z| \leqq c < Z$$

genügt, so gibt es zu jedem positiven $\varepsilon < Z - c$ eine positive Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$, so daß für $n > n_0$

$$(13) \qquad |z(x_\nu, y) - w_\nu(y)| < \varepsilon \qquad \left(x_\nu = \frac{\nu X}{n};\ \nu = 0, 1, \ldots \left[\frac{n a}{X}\right]\right),$$

wo $w_\nu(y)$ die durch (1′), (2′) *bestimmten Funktionen sind.*

Beweis. Setzen wir $z(x_\nu, y) = z_\nu(y)$ und

$$(14) \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x = x_{\nu+1}} - \frac{z_{\nu+1} - z_\nu}{h} = \eta_{\nu+1}(y) \quad \left(h = \frac{X}{n};\ \nu + 1 = 1, 2, \ldots \left[\frac{a}{h}\right]\right),$$

so liefert (1) für $x = x_{\nu+1}$

$$(15) \qquad \frac{d^2 z_{\nu+1}}{d y^2} = R(x_{\nu+1}, y) \frac{z_{\nu+1} - z_\nu}{h} + S(x_{\nu+1}, y, z_{\nu+1}) + R(x_{\nu+1}, y)\, \eta_{\nu+1}(y).$$

Rechnen wir zunächst *formal*[3]) und ziehen (1′) von (15) ab, so erhalten wir, wenn noch

$$(16) \qquad z_{\nu+1}(y) - w_{\nu+1}(y) = \gamma_{\nu+1}(y)$$

gesetzt wird,

$$\frac{d^2\gamma_{\nu+1}}{dy^2} = R(x_{\nu+1}, y)\frac{\gamma_{\nu+1}-\gamma_\nu}{h} + S(x_{\nu+1}, y, z_{\nu+1}) - S(x_{\nu+1}, y, w_\nu) + R(x_{\nu+1}, y)\,\eta_{\nu+1}$$
$$= R(x_{\nu+1}, y)\frac{\gamma_{\nu+1}-\gamma_\nu}{h} + \frac{\overline{\partial S}}{\partial z}(z_{\nu+1} - z_\nu + \gamma_\nu) + R(x_{\nu+1}, y)\,\eta_{\nu+1}$$

(dabei bedeutet das Überstreichen, daß für das Argument z gewisse Mittelwerte zwischen $z_{\nu+1}$ und w_ν zu nehmen sind). $\gamma_{\nu+1}$ genügt also der Differentialgleichung

$$(17) \qquad \gamma''_{\nu+1} - \lambda\varrho\,\gamma_{\nu+1} = \varrho(y)\,\psi(y, \lambda),$$

worin

$$\lambda = \frac{1}{h}, \qquad \varrho(y) = R(x_{\nu+1}, y)$$

und

$$(18) \qquad \psi(y, \lambda) = -\lambda\gamma_\nu + \frac{\overline{\partial S}}{\partial z}\frac{z_{\nu+1} - z_\nu + \gamma_\nu}{R(x_{\nu+1}, y)} + \eta_{\nu+1}$$
$$= -\lambda\gamma_\nu\left\{1 - \frac{1}{\lambda R(x_{\nu+1}, y)}\frac{\overline{\partial S}}{\partial z}\right\} + \frac{\overline{\partial S}}{\partial z}\frac{z_{\nu+1} - z_\nu}{R(x_{\nu+1}, y)} + \eta_{\nu+1}$$

gesetzt ist. Außerdem ist wegen (2), (2′) und (16)

$$(19) \qquad \gamma_{\nu+1}(0) = \gamma_{\nu+1}(1) = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_0(y) = 0.$$

Unter der Annahme, daß w_ν stetig und absolut $< Z$ (deren Richtigkeit noch zu beweisen ist), genügt daher das Problem (17), (19) erstens allen Voraussetzungen des Hilfssatzes 1, und zweitens ist auf Grund der gemachten Voraussetzungen nach (18)

$$|\psi(y, \lambda)| \leqq \lambda|\gamma_\nu|\left(1 + \frac{A}{\lambda}\right) + \frac{A}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \tau_1\right),$$

wo τ_1 gleichmäßig in (49) mit h gegen Null geht, und A eine passend gewählte, von y, ν und λ unabhängige positive Konstante ist. Aus Hilfssatz 1 folgt daher

$$(20) \quad |\gamma_{\nu+1}(y)| \leqq \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{Max}\,|\psi(y, \lambda)| \leqq \mathrm{Max}\,|\gamma_\nu|\,(1 + Ah) + \frac{1}{2}A(h + \tau_1)\,h.$$

Zu *beweisen* ist nun erstens, daß die Annahme $|w_\nu| < Z$ und w_ν stetig berechtigt ist, und zweitens, daß γ_ν für $\nu = 0, 1, \ldots, \left[\frac{a}{h}\right]$ mit h gleichmäßig

[3]) Gleichung (1′) hat nur einen Sinn, wenn schon gezeigt ist, daß w_ν noch im Definitionsbereich von S liegt, d. h. daß $|w_\nu| < Z$ ist.

in y und ν gegen Null geht. Hierzu wollen wir induktiv die folgenden beiden Behauptungen beweisen:

τ sei die nicht kleinere der Zahlen h und τ_1. Da dann τ gleichmäßig in x und y mit h gegen Null geht, gibt es eine Zahl h_0, so daß für $0 < h \leqq h_0$

$$\tau \cdot A X e^{AX} < Z - c \tag{21}$$

ist (vgl. (12)). Für $0 < h < h_0$ behaupten wir nun:

a) $w_{\nu+1}$ ist stetig und $|w_{\nu+1}| < Z$ $\left(\nu = -1, 0, 1, \ldots, \left[\frac{a}{h}\right] - 1\right)$,

b) $|\gamma_{\nu+1}| \leqq (\nu+1) h \tau (1 + A h)^{\nu} A$.

Für $\nu = -1$ sind diese Behauptungen richtig: die Behauptung a) wegen $w_0 = z_0 = z(0, y)$ nach (12), die Behauptung b) wegen $\gamma_0 = 0$. Nehmen wir nun an, daß a) und b) richtig seien, wenn man ν durch $\nu - 1$ ersetzt. Dann folgt wegen a), daß die Argumente der in (1′) auftretenden Funktionen innerhalb des Bereiches (9) liegen. Die frühere formale Schlußweise besteht dann zu Recht und es gilt die Ungleichung (20). Aus dieser folgt auf Grund der Induktionsannahme b) (in der $\nu - 1$ an Stelle von ν zu setzen ist):

$$\begin{aligned} |\gamma_{\nu+1}| &\leqq \nu h \tau (1 + A h)^{\nu-1} A (1 + A h) + \frac{1}{2} A (h + \tau_1) h \\ &\leqq \nu h \tau (1 + A h)^{\nu} A + A h \tau < \nu \cdot h \tau (1 + A h)^{\nu} A + h \tau (1 + A h)^{\nu} A, \end{aligned}$$

womit die Behauptung b) erwiesen ist. a) ist aber ebenfalls richtig; denn es ist erstens $w_{\nu+1}$ als Lösung des Problems (1′), (2′) gewiß stetig und zweitens nach (12), b) und (21)

$$\begin{aligned} |w_{\nu+1}| \leqq |z_{\nu+1}| + |\gamma_{\nu+1}| &\leqq c + (\nu+1) h \tau (1 + A h)^{\nu} A \\ &< c + X \tau \left(1 + \frac{A X}{n}\right)^{n} A < c + \tau A X e^{AX} < Z. \end{aligned}$$

Hiermit sind a) und b) allgemein bewiesen. Nunmehr folgt leicht, daß γ_ν gleichmäßig in y und ν gegen Null geht, denn es ist nach b):

$$\begin{aligned} |\gamma_{\nu+1}| \leqq a \tau (1 + A h)^{\nu} A &\leqq a \tau A \left(1 + \frac{A X}{n}\right)^{\left[\frac{n a}{X}\right]} \\ &\leqq a \tau A \left(1 + \frac{X A}{n}\right)^{\frac{n a}{X}} < a \tau A e^{a A}. \end{aligned} \tag{22}$$

Hiermit ist Satz 1 bewiesen, da τ gleichmäßig in x und y mit h gegen Null geht.

Folgerung. Aus dem eben bewiesenen Satze ergibt sich unmittelbar, daß es höchstens eine Lösung des Problems (1), (2) gibt, welche die in dem Satze angeführten Voraussetzungen erfüllt.

III.

Satz 2. *Vorgelegt sei das Problem* (1), (2). *Die Koeffizienten von* (1) *mögen den in Satz* 1 *gemachten Voraussetzungen genügen. Die gegebene Funktion* $z_0(y)$ *sei viermal stetig differenzierbar und es sei*

$$(23)\qquad z_0(0) = 0\,; \quad z_0(1) = 0\,; \quad |z_0(y)| < Z \qquad \text{für } 0 \leqq y \leqq 1.$$

Außerdem werde vorausgesetzt, daß die Differentialgleichung (1) *in den Punkten* (0, 0) *und* (0, 1) *des Randes erfüllt sei, d. h. es sei wegen* (1), (2):

$$(24)\qquad \left(\frac{d^2 z_0}{dy^2}\right)_{y=0} = S(0, 0, z_0(0))\,; \quad \left(\frac{d^2 z_0}{dy^2}\right)_{y=1} = S(0, 1, z_0(1)).\ ^{4})$$

Ferner sollen $\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}, \frac{\partial S}{\partial z}, \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}$ *und* $\frac{\partial^2 S}{\partial x\, \partial z}$ *existieren und im Bereiche* (9) *stetig sein. Dann gibt es bei passender Wahl der Konstanten a eine* (*und, wie aus der am Schluß von* II (S. 655) *gemachten Bemerkung folgt, nur eine*) *Lösung von* (1), (2), *die im Bereiche* (11) *einmal stetig nach x differenzierbar ist.*

Beweis. Wir gehen aus von dem Problem (1′), (2′) und werden zunächst einige Eigenschaften der Lösungen $w_\nu(y)$ dieses Problems feststellen.

1. Es gibt eine von ν, y und h unabhängige Konstante L, so daß

$$(25)\qquad |w_{\nu+1}(y) - w_\nu(y)| < Lh \qquad (0 \leqq y \leqq 1)$$

für alle $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ ist, die der Ungleichung

$$(26)\qquad x_\nu = \nu h \leqq a - h$$

genügen, wobei für die positive Konstante a die Ungleichungen

$$(27)\qquad a < X,$$

$$(28)\qquad a < (Z - |z_0|)\frac{e^{-KX}}{(1+X)K}$$

---

[4]) Verlangt man, daß die Lösung z sowie $\frac{\partial z}{\partial x}$ stetig auch am *Rande* des Bereiches (11) sind, so ist die Bedingung (24) [und natürlich auch (23)], wie man sich leicht überlegt, *notwendig*. [Implizite ist (23), (24) also schon bei Satz 1 vorausgesetzt.] Bei der hier befolgten Methode, $\frac{\partial z}{\partial x}$ durch Differenzenquotienten zu approximieren, wobei von $x = 0$ ausgegangen wird, erscheint die Voraussetzung der Stetigkeit von $\frac{\partial z}{\partial x}$ auch für $x = 0$ jedenfalls als naheliegend. Die Befreiung von der Bedingung (24) erfolgt in IV.

gelten. Die von ν, y und h unabhängige Zahl K soll dabei den Ungleichungen

$$\frac{1}{m}\left|S - z_0''\right| < K, \tag{29}$$

$$\frac{1}{m}\left|\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial z}\right| < K, \tag{30}$$

$$\frac{1}{m}\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right| < K \tag{31}$$

genügen. Um nun (25) zu beweisen, werden wir zeigen: Für die der Ungleichung (26) genügenden ν ist

$$|w_{\nu+1} - w_\nu| < Kh(1 + Kh)^\nu (1 + h\nu). \tag{32}$$

Aus (32) folgt in der Tat unsere Behauptung (25), denn es ist wegen $h = X:n$

$$(1 + Kh)^\nu = \left(1 + \frac{KX}{n}\right)^\nu \leqq \left(1 + \frac{KX}{n}\right)^n < e^{KX}, \qquad h\nu = x_\nu \leqq X, \tag{33}$$

so daß (25) mit

$$L = Ke^{KX}(1 + X) \tag{34}$$

erfüllt ist.

(32) beweisen wir induktiv. Aus (1') für $\nu = 0$ folgt durch Subtraktion von $w_0'' = z_0''$

$$(\Delta w_0)'' - R(x_1, y)\frac{\Delta w_0}{h} = S(x_1, y, z_0) - z_0'' = R(x_1, y)\frac{S(x_1, y, z_0) - z_0''}{R(x_1, y)}\ \text{[5]}$$

und aus (2'), (23) folgt

$$(\Delta w_0)_{y=0} = (\Delta w_0)_{y=1} = 0.$$

Aus Hilfssatz 1 in Verbindung mit (29) folgt daher $|\Delta w_0| < hK$. Hiermit ist (32) für $\nu = 0$ bewiesen.

Um die Ungleichung, die aus (32) entsteht, wenn ν durch $\nu + 1$ ersetzt wird (unter Annahme der Gültigkeit von (32) für $\nu = 0, 1, \ldots, \nu$), zu beweisen, falls noch $(\nu + 1)h \leqq a - h$, bemerken wir zunächst, daß unter Beachtung von (33) aus der Induktionsannahme

$$\begin{aligned} |w_{p+1} - w_0| \leqq |\Delta w_0| + |\Delta w_1| + \ldots + |\Delta w_p| &< (p+1)hKe^{KX}(1+X) \\ &< aKe^{KX}(1+X) \qquad (p = 0, 1, \ldots, \nu), \end{aligned}$$

also wegen $w_0 = z_0$

$$|w_{p+1} - z_0| < aKe^{KX}(1+X) \qquad (p = 0, 1, \ldots, \nu)$$

oder nach (28)

$$|w_{p+1}| < Z \qquad (p = 0, 1, \ldots, \nu)$$

[5]) Das Zeichen Δ ist hier wie im folgenden in bezug auf ν bzw. x, nicht in bezug auf y gemeint. Also:

$$\Delta w_\nu = w_{\nu+1}(y) - w_\nu(y); \qquad \Delta^2 w_\nu = w_{\nu+2}(y) - 2w_{\nu+1}(y) + w_\nu(y).$$

folgt. Daher liegen $x_{\nu+1}, y, w_\nu$ und $x_{\nu+2}, y, w_{\nu+1}$ noch im Bereiche $0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ |z| < Z$. Ziehen wir nun (1'), (2') von denjenigen Gleichungen ab, die entstehen, wenn ν durch $\nu+1$ ersetzt wird:

$$\begin{aligned}&(\Delta w_{\nu+1})'' - R(x_{\nu+2}, y)\frac{\Delta w_{\nu+1}}{h}\\ &= -R(x_{\nu+1}, y)\frac{\Delta w_\nu}{h} + S(x_{\nu+2}, y, w_{\nu+1}) - S(x_{\nu+1}, y, w_\nu)\\ &= -\frac{R(x_{\nu+2}, y)}{h}\Big\{\Delta w_\nu\Big[1 + \frac{R(x_{\nu+1}, y) - R(x_{\nu+2}, y)}{R(x_{\nu+2}, y)}\Big]\\ &\quad - h\frac{S(x_{\nu+2}, y, w_{\nu+1}) - S(x_{\nu+1}, y, w_\nu)}{R(x_{\nu+2}, y)}\Big\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\Delta w_{\nu+1})'' - R(x_{\nu+2}, y)\frac{\Delta w_{\nu+1}}{h}\\ &= -\frac{R(x_{\nu+2}, y)}{h}\Big\{\Delta w_\nu\Big[1 - \frac{h}{R(x_{\nu+2}, y)}\Big(\frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial z}\Big)\Big] - \frac{h^2}{R(x_{\nu+2}, y)}\frac{\partial S}{\partial x}\Big\}^{6)},\end{aligned}$$

$$(\Delta w_{\nu+1})_{y=0} = (\Delta w_{\nu+1})_{y=1} = 0.$$

Auf Grund von Hilfssatz 1 ist nun $|\Delta w_{\nu+1}|$ kleiner als das Maximum des Betrages des in der geschweiften Klammer stehenden Ausdrucks. Daher wird nach (30), (31)

$$|\Delta w_{\nu+1}| \leqq \operatorname{Max}\{|\Delta w_\nu|\}(1 + Kh) + Kh^2,$$

also nach Induktionsannahme (32)

$$\begin{aligned}|\Delta w_{\nu+1}| &< Kh(1+Kh)^{\nu+1}(1+h\nu) + Kh^2\\ &< Kh(1+Kh)^{\nu+1}(1+h\nu) + Kh^2(1+Kh)^{\nu+1}\\ &= Kh(1+Kh)^{\nu+1}[1 + h(\nu+1)],\end{aligned}$$

womit (32) allgemein und damit (25) bewiesen ist.

2. Es gibt eine von y und h unabhängige Konstante L_1, so daß

$$(35)\qquad (\Delta w_0)'' < L_1 h$$

ist. Zum Beweise subtrahieren wir w_0'' von Gleichung (1') für $\nu = 0$:

$$(36)\qquad (\Delta w_0)'' - R(x_1, y)\frac{\Delta w_0}{h} = S(x_1, y, w_0) - w_0''.$$

Addieren wir $h\left[\frac{S(x_1, y, w_0) - w_0''}{R(x_1, y)}\right]''$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(37)\quad &\Big[\Delta w_0 + h\frac{S(x_1, y, w_0) - w_0''}{R(x_1, y)}\Big]'' - \frac{R(x_1, y)}{h}\Big[\Delta w_0 + h\frac{S(x_1, y, w_0) - w_0''}{R(x_1, y)}\Big]\\ &= h\Big(\frac{S(x_1, y, w_0) - w_0''}{R(x_1, y)}\Big)''.\end{aligned}$$

---

[6]) Die nicht näher bezeichneten Argumente von $\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial z}$ sind für x bzw. z gewisse Mittelwerte zwischen $x_{\nu+1}$ und $x_{\nu+2}$ bzw. w_ν und $w_{\nu+1}$.

Für $y = 0$ wird nun nach (2'), (23), (24) und (10)

$$\left|\varDelta w_0 + h\frac{S(x_1,0,w_0)-w_0''}{R(x_1,0)}\right| = h\left|\frac{S(x_1,0,0)-S(0,0,0)}{R(x_1,0)}\right| < \frac{h^2}{m}\operatorname{Max}\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right|$$

und die gleiche Abschätzung gilt für $y = 1$. Aus (37) folgt daher nach Hilfssatz 2

$$\left|\varDelta w_0 + h\frac{S(x_1,y,w_0)-w_0''}{R(x_1,y)}\right| \leqq \frac{h^2}{m}\left\{\operatorname{Max}\left|\left(\frac{S(x,y,w_0)-w_0''}{R}\right)''\right| + \operatorname{Max}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right\}.$$

Hieraus folgt nach (36) die Behauptung (35) mit

$$L_1 = \frac{\operatorname{Max} R}{m}\left[\operatorname{Max}\left|\left(\frac{S(x,y,w_0)-w_0''}{R}\right)''\right| + \operatorname{Max}\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right|\right].$$

3. Es gibt eine von ν, h und y unabhängige Konstante L_2, so daß

(38) $$|\varDelta^2 w_\nu| < L_2 h^2 \qquad (\text{für } (\nu+2)h < a).$$

Zum Beweise wählen wir eine Konstante K_1, so daß

(39) $$\frac{1}{m}\left[L\operatorname{Max}\left|\frac{\partial R}{\partial x}\right| + \operatorname{Max}\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right| + L\operatorname{Max}\left|\frac{\partial S}{\partial z}\right| + L_1\right] < K_1,$$

(40) $$\frac{1}{m}\left[2\operatorname{Max}\left|\frac{\partial R}{\partial x}\right| + \operatorname{Max}\left|\frac{\partial S}{\partial z}\right|\right] < K_1,$$

(41) $$\frac{1}{m}\left[L\operatorname{Max}\left|\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\right| + \operatorname{Max}\left|\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right| + 2L\operatorname{Max}\left|\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial z}\right| + L^2\operatorname{Max}\left|\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right|\right] < K_1.$$

Dann behaupten wir

(42) $$|\varDelta^2 w_\nu| < K_1 h^2 (1 + K_1 h)^\nu (1 + h\nu) \qquad ((\nu+2)h \leqq a).$$

Hieraus folgt die Behauptung (38) mit $L_2 = K_1\, e^{K_1 X}(1 + X)$ (vgl. den entsprechenden Schluß von (32) auf (25)).

Um nun (42) für $\nu = 0$ zu beweisen, ziehen wir von Gleichung (1') für $\nu = 0$ auf beiden Seiten w_0'' und ebenso w_1'' von Gleichung (1') für $\nu = 1$ ab. Die so entstandenen Gleichungen subtrahieren wir voneinander und erhalten

$$(w_2 - w_1)'' - (w_1 - w_0)'' = R(x_2, y)\frac{w_2 - w_1}{h} - R(x_1, y)\frac{w_1 - w_0}{h}$$
$$+ S(x_2, y, w_1) - S(x_1, y, w_0) - (w_1'' - w_0'')$$

oder

(43) $$(\varDelta^2 w_0)'' - R(x_2, y)\frac{\varDelta^2 w_0}{h}$$
$$= R(x_2,y)\left[\frac{w_1 - w_0}{h}\,\frac{R(x_2,y) - R(x_1,y)}{R(x_2,y)} + \frac{1}{R(x_2,y)}\left(h\frac{\partial S}{\partial x} + \varDelta w_0\frac{\partial S}{\partial z} - (\varDelta w_0)''\right)\right]$$

(Argument von $\frac{\partial S}{\partial x}$ und $\frac{\partial S}{\partial z}$ in bezug auf x bzw. z Zwischenwerte zwischen x_1, x_2 bzw. w_0, w_1). Da außerdem nach (2') und (23)

$$(\varDelta^2 w_0)_{y=0} = (\varDelta^2 w_0)_{y=1} = 0,$$

so folgt nach Hilfssatz 1, daß $|\Delta^2 w_0|:h$ kleiner als das Maximum des absolut genommenen in der eckigen Klammer der Gleichung (43) stehenden Ausdrucks ist. Dieser ist aber nach (25), (10) und (35) dem Betrage nach kleiner als

$$\frac{h}{m}\left[L\,\mathrm{Max}\left|\frac{\partial R}{\partial x}\right| + \mathrm{Max}\left|\frac{\partial S}{\partial x}\right| + L\,\mathrm{Max}\left|\frac{\partial S}{\partial z}\right| + L_1\right].$$

Hieraus im Verein mit (39) folgt (42) für $\nu = 0$. Wir wollen jetzt (42) für $\nu + 1$ unter Annahme der Gültigkeit für ν beweisen, falls noch $(\nu + 3)\,h \leqq a$. Geeignete Kombination dreier aufeinanderfolgender der Gleichungen (1′) liefert für $(\nu + 3)\,h \leqq a$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Delta^2 w_{\nu+1}}{dy^2} &= \Delta^2\left\{R(x_{\nu+1}, y)\frac{w_{\nu+1} - w_\nu}{h}\right\} + \Delta^2 S(x_{\nu+1}, y, w_\nu)\\ &= R(x_{\nu+3}, y)\frac{\Delta^2 w_{\nu+1} - \Delta^2 w_\nu}{h} + [R(x_{\nu+3}, y) - R(x_{\nu+1}, y)]\frac{\Delta^2 w_\nu}{h}\\ &\qquad + \frac{\Delta w_{\nu+1}}{h}\Delta^2 R(x_{\nu+1}, y) + \Delta^2 S(x_{\nu+1}, y, w_\nu),\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(44)\qquad &\frac{d^2\Delta^2 w_{\nu+1}}{dy^2} - R(x_{\nu+3}, y)\frac{\Delta^2 w_{\nu+1}}{h} = -\frac{R(x_{\nu+3}, y)}{h}\\ &\left\{\Delta^2 w_\nu\left[1 - \frac{R(x_{\nu+3}, y) - R(x_{\nu+1}, y)}{R(x_{\nu+3}, y)}\right] - \frac{\Delta w_{\nu+1}\cdot\Delta^2 R(x_{\nu+1}, y) + h\,\Delta^2 S(x_{\nu+1}, y, w_\nu)}{R(x_{\nu+3}, y)}\right\}.\end{aligned}$$

Außerdem ist nach (2′)

$$(45)\qquad (\Delta^2 w_{\nu+1})_{y=0} = (\Delta^2 w_{\nu+1})_{y=1} = 0\,.$$

Wir können daher wieder Hilfssatz 1 anwenden. Beachten wir, daß

$$\begin{aligned}\Delta^2 S(x_{\nu+1}, y, w_\nu) &= S(x_{\nu+3}, y, w_{\nu+2} - 2\,S(x_{\nu+2}, y, w_{\nu+1}) + S(x_{\nu+1}, y, w_\nu)\\ &= S(x_{\nu+1} + 2\,h, y, w_\nu + \Delta w_\nu + \Delta w_{\nu+1}) - S(x_{\nu+1} + h, y, w_\nu + \Delta w_\nu)\\ &\quad - S(x_{\nu+1} + h, y, w_\nu + \Delta w_{\nu+1}) + S(x_{\nu+1}, y, w_\nu)\\ &\quad + S(x_{\nu+1} + h, y, w_\nu + \Delta w_{\nu+1}) - S(x_{\nu+1} + h, y, w_\nu + \Delta w_\nu),\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}&\Delta^2 S(x_{\nu+1}, y, w_\nu)\\ &= h^2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + h(\Delta w_\nu + \Delta w_{\nu+1})\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial z} + \Delta w_\nu\,\Delta w_{\nu+1}\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + \frac{\partial S}{\partial z}\Delta^2 w_\nu \quad {}^{7)}\end{aligned}$$

---

[7]) Die Argumente der zweiten Ableitungen von S sind:

$$x_{\nu+1} + (\vartheta_1 + \vartheta_2)\,h,\; y,\; w_\nu + \vartheta_1\Delta w_\nu + \vartheta_2\Delta w_{\nu+1} \qquad (0 < \vartheta_i < 1);$$

die von $\frac{\partial S}{\partial z}$:

$$x_{\nu+2},\; y,\; w_{\nu+1} + \vartheta_3(\Delta w_{\nu+1} - \Delta w_\nu) = w_{\nu+1} + \vartheta_3\Delta^2 w_\nu\,.$$

ist, so folgt auf Grund von (25), daß der Betrag des in der geschweiften Klammer der Gleichung (44) stehenden Ausdrucks kleiner ist als

$$\operatorname{Max}|\Delta^2 w_\nu|\left[1+\frac{h}{m}\left(2\operatorname{Max}\left|\frac{\partial R}{\partial x}\right|+\operatorname{Max}\left|\frac{\partial S}{\partial z}\right|\right)\right]$$
$$+\frac{h^3}{m}\left(L\operatorname{Max}\left|\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\right|+\operatorname{Max}\left|\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right|+2L\operatorname{Max}\left|\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial z}\right|+L^2\operatorname{Max}\left|\frac{\partial^2 S}{\partial z^2}\right|\right).$$

Daher folgt aus (44), (45) unter Beachtung von (40), (41) nach Hilfssatz 1

$$|\Delta^2 w_{\nu+1}|\leqq \operatorname{Max}|\Delta^2 w_\nu|(1+K_1 h)+K_1 h^3.$$

Also ist nach Induktionsannahme (42)

$$\begin{aligned}|\Delta^2 w_{\nu+1}| &< K_1 h^2(1+K_1 h)^{\nu+1}(1+h\nu)+h^3 K_1\\ &< K_1 h^2(1+K_1 h)^{\nu+1}(1+h\nu)+h^2 K_1(1+K_1 h)^{\nu+1}\cdot h\\ &= K_1 h^2(1+K_1 h)^{\nu+1}(1+h(\nu+1)),\end{aligned}$$

womit die Behauptung (42), also auch (38) bewiesen ist.

Um nun die Existenz einer Lösung von (1), (2) zu beweisen, lassen wir h die Folge

$$h^{(n)} = X:2^n \qquad (n=1,2,\ldots)$$

durchlaufen. Die Lösung von (1′), (2′) für $h=h^{(n)}$ sei $w_\nu^{(n)}$. Ferner sei $\nu h^{(n)} = x_\nu^{(n)}$. Betrachten wir irgendeinen festen Punkt x des Intervalles $0, a$, dessen Abszisse von der Form $x=\frac{Xq}{2^n}$ $(q=0,1,\ldots;\ n=1,2,\ldots)$ ist. Ist dann

$$x = h^{(n)}\nu_n,$$

so wollen wir zunächst zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} w_{\nu_n}^{(n)}(y)$$

existiert und daß die Konvergenz gleichmäßig in x und y ist. Zum Beweise wollen wir $w_{\nu_{n+1}}^{(n+1)} - w_{\nu_n}^{(n)}$ abschätzen. Setzen wir für den Augenblick der Einfachheit halber $\nu_n = p+1$, also $\nu_{n+1} = 2p+2$, so ist nach (1′), (2′)

$$(46)\quad \frac{d^2 w_{p+1}^{(n)}}{dy^2} = R(x,y)\frac{w_{p+1}^{(n)}-w_p^{(n)}}{h^{(n)}} + S(x,y,w_p^{(n)});\quad w_{p+1}^{(n)}(0)=w_{p+1}^{(n)}(1)=0,$$

$$(47)\quad \begin{aligned}&\frac{d^2 w_{2p+2}^{(n+1)}}{dy^2} = R(x,y)\frac{w_{2p+2}^{(n+1)}-w_{2p+1}^{(n+1)}}{h^{(n+1)}} + S(x,y,w_{2p+1}^{(n+1)});\\ &w_{2p+2}^{(n+1)}(0)=w_{2p+2}^{(n+1)}(1)=0.\end{aligned}$$

Wegen $h^{(n+1)}=\frac{1}{2}h^{(n)}$ ist

$$\frac{w_{2p+2}^{(n+1)}-w_{2p+1}^{(n+1)}}{h^{(n+1)}} = \frac{1}{2}\,\frac{w_{2p+2}^{(n+1)}-2w_{2p+1}^{(n+1)}+w_{2p}^{(n+1)}}{h^{(n+1)}} + \frac{w_{2p+2}^{(n+1)}-w_{2p}^{(n+1)}}{h^{(n)}}.$$

Daher folgt aus (46), (47) durch Subtraktion, wenn noch $w_{p+1}^{(n)} - w_{2p+2}^{(n+1)} = v_{p+1}$ gesetzt wird,

$$(48) \qquad \frac{d^2 v_{p+1}}{dy^2} - \frac{1}{h^{(n)}} R(x, y)\, v_{p+1}$$
$$= -\frac{R(x, y)}{h^{(n)}} v_p + S(x, y, w_p^{(n)}) - S(x, y, w_{2p+1}^{(n+1)}) - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 w_{2p}^{(n+1)}}{h^{(n+1)}},$$

$$(49) \qquad v_{p+1}(0) = v_{p+1}(1) = 0.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist

$$-\frac{R(x, y)}{h^{(n)}} \left[v_p + \frac{h^{(n)}}{R(x, y)} \frac{\partial S}{\partial z} (w_{2p+1}^{(n+1)} - w_p^{(n)}) + \frac{1}{R(x, y)} \Delta^2 w_{2p}^{(n+1)} \right] \text{ [8]}$$
$$= -\frac{R(x, y)}{h^{(n)}} \left\{ v_p \left[1 - \frac{h^{(n)}}{R(x, y)} \frac{\partial S}{\partial z} \right] + \frac{h^{(n)} \frac{\partial S}{\partial z} (w_{2p+1}^{(n+1)} - w_{2p}^{(n+1)}) + \Delta^2 w_{2p}^{(n+1)}}{R(x, y)} \right\}.$$

Da nach (25) und (38)

$$| w_{2p+1}^{(n+1)} - w_{2p}^{(n+1)} | < L h^{(n+1)} = \frac{1}{2} L h^{(n)};$$

$$| \Delta^2 w_{2p}^{(n+1)} | < L_2 (h^{(n+1)})^2 = \frac{1}{4} L_2 (h^{(n)})^2$$

ist, wird der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck dem Betrage nach kleiner als

$$| v_p | \left(1 + \frac{h^{(n)}}{m} \operatorname{Max} \left| \frac{\partial S}{\partial z} \right| \right) + \frac{1}{2m} (h^{(n)})^2 \left[L \operatorname{Max} \left| \frac{\partial S}{\partial z} \right| + \frac{L_2}{2} \right].$$

Daher folgt aus (48), (49) nach Hilfssatz 1

$$(50) \qquad | v_{p+1} | \leqq \operatorname{Max} | v_p | (1 + K_2 h^{(n)}) + K_2 (h^{(n)})^2,$$

sobald die von x, y, n unabhängige Konstante K_2 die Ungleichungen

$$(51) \qquad \frac{1}{m} \operatorname{Max} \left| \frac{\partial S}{\partial z} \right| < K_2, \qquad \frac{1}{2m} \left[L \operatorname{Max} \left| \frac{\partial S}{\partial z} \right| + \frac{1}{2} L_2 \right] < K_2$$

erfüllt. Da $v_0 = 0$ ist, ergibt sich aus (50) rekursiv

$$| v_{p+1} | \leqq K_2 (h^{(n)})^2 (p+1)(1 + K_2 h^{(n)})^p \leqq K_2 h^{(n)} x e^{K_2 x}.$$

Somit ist bewiesen

$$| w_{\nu_{n+1}}^{(n+1)} - w_{\nu_n}^{(n)} | \leqq h^{(n)} K_2 x e^{K_2 x} \qquad (0 \leqq x < a;\ 0 \leqq y \leqq 1).$$

Ebenso ist

$$| w_{\nu_{n+2}}^{(n+2)} - w_{\nu_{n+1}}^{(n+1)} | \leqq h^{(n+1)} K_2 x e^{K_2 x},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$| w_{\nu_{n+i}}^{(n+i)} - w_{\nu_{n+i-1}}^{(n+i-1)} | \leqq h^{(n+i-1)} K_2 x e^{K_2 x} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

---

[8] Das Argument z von $\frac{\partial S}{\partial z}$ ist ein Mittelwert zwischen $w_{2p+1}^{(n+1)}$ und $w_p^{(n)}$.

Also, da $h^{(n+\mu)} = h^{(n)} : 2^\mu$,

$$(52) \qquad |w^{(n+i)}_{\nu_{n+i}} - w^{(n)}_{\nu_n}| < h^{(n)} K_2 x e^{K_2 x} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\mu} = h^{(n)} 2 K_2 x e^{K_2 x},$$

oder erst recht

$$(53) \qquad |w^{(n+i)}_{\nu_{n+i}} - w^{(n)}_{\nu_n}| < h^{(n)} 2 K_2 X e^{K_2 X}.$$

Hieraus folgt die behauptete gleichmäßige Konvergenz der $w^{(n)}_{\nu_n}$. Die Grenzfunktion sei $w(x, y)$; sie ist definiert für alle y im Intervall $0 \leqq y \leqq 1$ und alle x der Form $Xq : 2^n$ im Intervall 0 bis a. Nach (25) genügen die Funktionen $w^{(n)}_{\nu_n}(y)$ in bezug auf x einer von y und n unabhängigen Lipschitzbedingung, so daß für die Grenzfunktion $w(x, y)$ offenbar das gleiche gilt. Hieraus wiederum folgt, daß $w(x, y)$ zu einer eindeutig bestimmten, für alle x des Intervalles $0 \leqq x \leqq a$ definierten Funktion $z(x, y)$ ergänzt werden kann, welche ihrerseits einer von y unabhängigen Lipschitzbedingung in bezug auf x genügt. Ferner folgt unter Benutzung der für jede Funktion $f(x)$ gültigen Identität

$$\begin{aligned} & f(x + 2h^{(n)}) - 2f(x + h^{(n)}) + f(x) \\ = & \sum_{\nu=0}^{2^i-1} \sum_{\mu=0}^{2^i-1} [f(x + (\nu + \mu + 2) h^{(n+i)}) - 2f(x + (\nu + \mu + 1) h^{(n+i)}) \\ & \qquad + f(x + (\nu + \mu) h^{(n+i)})] \end{aligned}$$

aus (38) leicht die Ungleichung

$$|\Delta^2 z| = |z(x + 2h, y) - 2z(x + h, y) + z(x, y)| \leqq L_2 h^2.$$

Hieraus wiederum folgt die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial z}{\partial x}$. [9])

---

[9]) Sei in der Tat $f(x)$ eine im Intervall $0, a$ stetige Funktion, für welche

$$* \qquad |f(x+2h^{(n)}) - 2f(x+h^{(n)}) + f(x)| < L_2 h^{(n)^2} \qquad (h^{(n)} = X : 2^n)$$

gilt; dann ist, wie wir behaupten, $f(x)$ stetig differenzierbar. Ist nämlich

$$\Delta(f, h) = f(x+h) - f(x),$$
$$\Delta^2(f, h) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x),$$

so gilt identisch

$$\Delta(f, h) = \Delta^2\left(f, \frac{h}{2}\right) + 2\Delta\left(f, \frac{h}{2}\right).$$

Hieraus folgt durch wiederholte Anwendung

$$\Delta(f, h) = \sum_{\lambda=1}^{k} 2^{\lambda-1} \Delta^2\left(f, \frac{h}{2^\lambda}\right) + 2^k \Delta\left(f, \frac{h}{2^k}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Setzen wir hierin $h = h^{(n)} = X : 2^n$, so folgt nach Division durch $h^{(n)}$ wegen $h^{(n)} = 2^k h^{(n+k)}$

$$\frac{\Delta(f, h^{(n)})}{h^{(n)}} - \frac{\Delta(f, h^{(n+k)})}{h^{(n+k)}} = \frac{1}{h^{(n)}} \sum_{\lambda=1}^{k} 2^{\lambda-1} \Delta^2\left(f, \frac{h^{(n)}}{2^\lambda}\right).$$

(Fortsetzung der Fußnote [9]) auf nächster Seite.)

Um nunmehr zu zeigen, daß z der Differentialgleichung (1) genügt, behaupten wir zunächst: Für jedes x $(0 \leqq x \leqq a)$ der Form $Xq:2^p$ $(q = 0, 1, 2, \ldots; p = 1, 2, \ldots)$ ist

$$(54) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{n \to \infty} \frac{w^{(n)}_{\nu_n+1} - w^{(n)}_{\nu_n}}{h^{(n)}} \qquad (\nu_n h^{(n)} = x),$$

und zwar ist die Konvergenz im Bereiche (49) gleichmäßig in x und y.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ eine vorgegebene Zahl. Wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial z}{\partial x}$ können wir eine von x und y unabhängige Zahl $\bar{n}$ so wählen, daß

$$(55) \qquad \left| \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} - \frac{z(x + h^{(\bar{n})}, y) - z(x, y)}{h^{(\bar{n})}} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ist. Wir behaupten aber weiter: Wir können $\bar{n}$ auch so groß wählen, daß für $n \geqq \bar{n}$

$$(56) \qquad \left| \frac{w^{(n)}_{\bar{\nu}_n} - w^{(n)}_{\nu_n}}{h^{(\bar{n})}} - \frac{w^{(n)}_{\nu_n+1} - w^{(n)}_{\nu_n}}{h^{(n)}} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \begin{pmatrix} \bar{\nu}_n h^{(n)} = x + h^{(\bar{n})} \\ \nu_n h^{(n)} = x \\ (\nu_n + 1) h^{(n)} = x + h^{(n)} \end{pmatrix},$$

denn die gleiche Betrachtung wie die in Anm. [9]) zeigt auf Grund von (38), daß die links stehende Differenz kleiner als $h^{(\bar{n})} L_2 : 2$ (vgl. die Ungleichung ** der Anm.) ist. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz können wir ferner zu $h^{(\bar{n})}$ ein $n_1 \geqq \bar{n}$ so wählen, daß für $n \geqq n_1$

$$(57) \qquad \left| \frac{z(x + h^{(\bar{n})}, y) - z(x, y)}{h^{(\bar{n})}} - \frac{w^{(n)}_{\bar{\nu}_n} - w^{(n)}_{\nu}}{h^{(\bar{n})}} \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (\bar{\nu}_n h^{(n)} = x + h^{(\bar{n})}).$$

Addition der Ungleichungen (55) bis (57) liefert aber die Behauptung (54).

Also ist nach *

$$** \qquad \left| \frac{\Delta(f, h^{(n)})}{h^{(n)}} - \frac{\Delta(f, h^{(n+k)})}{h^{(n+k)}} \right| < \frac{L_2}{h^{(n)}} \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{2^{\lambda-1}(h^{(n)})^2}{2^{2\lambda}} = \frac{L_2 h^{(n)}}{2} \sum_{\lambda=1}^{k} \frac{1}{2^\lambda} < h^{(n)} \frac{L_2}{2}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt aber nach dem Cauchyschen Konvergenzprinzip, daß die Folge der stetigen Funktionen von x

$$f_n(x) = \frac{\Delta(f, h^{(n)})}{h^{(n)}} = \frac{f(x + h^{(n)}) - f(x)}{h^{(n)}}$$

gleichmäßig konvergiert. Die Grenzfunktion, die nach Definition eine spezielle rechte Derivierte von $f(x)$ ist, ist also stetig. Aus der Existenz *einer* stetigen Derivierten folgt aber nach einem Satz aus der Theorie der reellen Funktionen, daß $f(x)$ stetig differenzierbar ist (s. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, 1. Aufl., S. 534, Satz 7). In unserem Falle ist $f(x) = z(x, y)$; da die Abschätzung *, also auch ** unabhängig von y gilt, ist die Konvergenz der f_n gleichmäßig in x *und* y, also $\frac{\partial z}{\partial x}$ stetig in (x, y).

Für jedes positive $x < a$ der Form $Xq:2^p$ besteht nun von einem gewissen n ab die Gleichung

$$\frac{d^2 w_{\nu_n+1}^{(n)}}{dy^2} = R(x + h^{(n)}, y) \frac{w_{\nu_n+1}^{(n)} - w_{\nu_n}^{(n)}}{h^{(n)}} + S(x + h^{(n)}, y, w_{\nu_n}^{(n)}).$$

Nach dem Bewiesenen existiert der Limes der rechten Seite für $n = \infty$, und zwar ist die Konvergenz gleichmäßig in (x, y). Daher konvergiert auch $\frac{d^2 w_{\nu_n+1}^{(n)}}{dy^2}$ gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion $W(x, y)$, die für alle x der Form $Xq:2^p$ erklärt ist, und es besteht nach (54) für alle x dieser Form die Gleichung

$$W(x, y) = R(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + S(x, y, z(x, y)).$$

Die rechte Seite ist für alle positiven $x < a$ definiert und stetig, und wir definieren $W(x, y)$ für alle diese x durch diese Gleichung. Es ist nun zu zeigen, daß $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ existiert und gleich $W(x, y)$ ist. Für alle x der Form $Xq:2^p$ ist das klar[10]. Ist x ein beliebiger Wert des Intervalles $0, a$, so sei x_k eine Folge gegen x konvergierender Zahlen der Form $Xq:2^q$. Dann ist auf Grund des schon Bewiesenen gleichmäßig in y

$$\lim_{k \to \infty} z(x_k, y) = z(x, y),$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\partial^2 z(x_k, y)}{\partial y^2} = W(x, y).$$

Hieraus folgt die Behauptung (vgl. Anm. [10]).

Hiermit ist gezeigt, daß die Funktion z die Gleichung (1) erfüllt. Daß die Randbedingungen (2) erfüllt sind, ist klar, da sie von allen $w_{\nu_n}^{(n)}$ erfüllt sind und z stetig ist. — Satz 2 ist somit bewiesen.

Bemerkung über den Fehler $z(x_\nu, y) - w_\nu(y)$. Eine Abschätzung dieses Fehlers liegt schon in Gleichung (22), S. 655, vor. Jedoch hängt

---

[10]) Ist gleichmäßig in $0 \leqq y \leqq 1$ $\lim_{n \to \infty} g_n(y) = g(y)$, ist ferner g_n zweimal stetig differenzierbar und ist gleichmäßig $\lim_{n \to \infty} g_n'' = G(y)$, so existiert $g''(y)$ und es ist $G(y) = g''(y)$. Denn es ist

$$g_n(y) = a_n + b_n y + \int_0^y \int_0^\eta g_n''(\zeta) \, d\zeta.$$

Hieraus folgt auf Grund der Voraussetzungen zunächst, daß $\lim_{n \to \infty} a_n + b_n y$ existiert also auch $\lim_{n \to \infty} a_n = a$, $\lim_{n \to \infty} b_n = b$ existieren. Also wird

$$g(y) = a + by + \int_0^y \int_0^\eta G(\zeta) \, d\zeta,$$

woraus die Behauptung folgt.

die dort auftretende Zahl τ von der durch (14) definierten Funktion $\eta_\nu(y)$ ab. Die Benutzung dieser Abschätzung würde daher schon die Kenntnis der gesuchten Lösung z voraussetzen. Dagegen erhalten wir aus (52) die Abschätzung

$$|z(x, y) - w_{\nu_n}^{(n)}(y)| < h^{(n)} 2 K_2 x e^{K_2 x} \qquad (h^{(n)} \nu_n = x),$$

wo K_2, wie aus dem Beweis für Satz 2 hervorgeht, aus den gegebenen Funktionen R, S, z_0 und deren Ableitungen berechenbar ist: Man bestimme zuerst m (Gleichung (10)), dann K (Gleichung (29) bis (31)), dann L (Gleichung (34)), dann L_1 (S. 659), dann K_1 (Gleichung (39) bis (41)), dann L_2 (S. 659) und schließlich K_2 nach (51).

IV.

Satz 3. *Vorgelegt sei das Problem* (1), (2). *Die Koeffizienten von* (1) *mögen den in Satz* 2 *gemachten Voraussetzungen genügen. Außerdem werde noch Existenz und Stetigkeit von* $\frac{\partial^2 S}{\partial y \, \partial z}$ *sowie der Ableitungen von* $R(x, y)$ *bis zu den vierten vorausgesetzt. Über* $z_0(y)$ *werde dagegen außer* (23) *nur Stetigkeit vorausgesetzt. Ist dann* a *eine den Ungleichungen* (27), (28) *genügende positive Konstante, so existiert eine der Randbedingung* (2) *genügende Funktion* $z(x, y)$, *die in jedem inneren Punkte von* (11) *eine Lösung von* (1) *ist.*

Beweis. Wir wollen zunächst eine Folge von Funktionen $z_0^{(n)}(y)$ herstellen, die gleichmäßig in $0 \leqq y \leqq 1$ gegen $z_0(y)$ konvergieren und von denen jede die in Satz 2 über z_0 gemachten Voraussetzungen erfüllt. Sei $s(y)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die den Bedingungen

$$s(0) = S(0, 0, 0); \quad s(1) = S(0, 1, 0) \tag{58}$$

genügt. Die Funktion

$$F(y) = z_0(y) + \int_0^1 s(\eta) \gamma(y, \eta) \, d\eta \tag{59}$$
$$\left(\gamma(y, \eta) = \begin{cases} (1-\eta) y & \text{für } y \leqq \eta \\ \eta(1-y) & \text{,, } \ y \geqq \eta \end{cases}\right)$$

ist dann jedenfalls in $0 \leqq y \leqq 1$ stetig und verschwindet für $y = 0$ und $y = 1$. Erweitern wir den Definitionsbereich durch die Festsetzung $F(-y) = -F(y)$, $F(y+2) = F(y)$, so erhalten wir eine überall stetige ungerade periodische Funktion. Die Fejérschen aus den Fourierkoeffizienten von $F(y)$ gebildeten Mittel $A_n(y)$ enthalten daher nur Sinusglieder und verschwinden nebst allen Ableitungen *gerader* Ordnung für $y = 0$, $y = 1$; außerdem ist gleichmäßig in $(0, 1)$

$$F(y) = \lim_{n \to \infty} A_n(y). \tag{60}$$

Wir setzen nun

(61) $$z_0^{(n)}(y) = A_n(y) - \int_0^1 s(\eta)\,\gamma(y,\eta)\,d\eta.$$

Dann ist

(62) $$z_0^{(n)}(0) = z_0^{(n)}(1) = 0$$

und

(63) $$z_0^{(n)''}(y) = A_n''(y) + s(y),$$

also

$$z_0^{(n)''} = s(0); \qquad z^{(n)''}(1) = s(1)$$

oder nach (58) und (62)

$$z_0^{(n)''}(0) = S(0, 0, z_0^{(n)}(0)), \qquad z_0^{(n)''}(1) = S(0, 1, z_0^{(n)}(1)).$$

Ferner ist $z_0^{(n)}(y)$ nach (63) viermal stetig differenzierbar, da A_n'' und s zweimal stetig differenzierbar sind. Da außerdem nach (59) bis (61) gleichmäßig

(64) $$\lim_{n\to\infty} z_0^{(n)}(y) = z_0(y)$$

ist, ist für genügend großes n nicht nur nach (23)

$$|z_0^{(n)}| < Z,$$

sondern es gilt auch die Ungleichung (28) noch, wenn in ihr z_0 durch $z_0^{(n)}$ ersetzt wird. Im folgenden soll n immer so groß gewählt sein. Nach dem Vorstehenden erfüllt dann $z_0^{(n)}(y)$ alle in Satz 2 von z_0 verlangten Voraussetzungen. Nach diesem Satz existiert daher im abgeschlossenen Bereiche (11) eine Lösung $z^{(n)}(x, y)$ von (1), die die Randbedingungen

(65) $$z^{(n)}(0, y) = z_0^{(n)}(y); \qquad z^{(n)}(x, 0) = z^{(n)}(x, 1) = 0$$

genügt. Können wir nun zeigen, daß die $z^{(n)}(x, y)$ in dem abgeschlossenen Bereiche (11) gleichmäßig konvergieren und daß $\frac{\partial z^{(n)}}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 z^{(n)}}{\partial y^2}$ in jedem abgeschlossenen Teilbereiche von (11) gleichmäßig konvergieren, so genügt $z(x, y) = \lim_{n\to\infty} z^{(n)}(x, y)$ offenbar allen Forderungen unseres Satzes.

Für den Nachweis der Konvergenz ist die Annahme

(66) $$R(x, y) \equiv 1$$

keine Beschränkung der Allgemeinheit, wie man leicht ersieht, wenn man die Transformation

$$X = \int_0^x \frac{d\xi}{\left(\int_0^1 \sqrt{R(\xi,\eta)}\,d\eta\right)^2}, \qquad Y = \frac{1}{\int_0^1 \sqrt{R(x,\eta)}\,d\eta} \int_0^y \sqrt{R(x,\eta)}\,d\eta \text{ [11]})$$

[11]) Block, Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique, Arkiv för Matematik 6 (1911), Nr. 31, S. 4.

und die weitere

$$\zeta = z\, e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^Y T_1(X,\eta)\,d\eta}$$

ausführt, wo T_1 der Koeffizient von $\frac{\partial z}{\partial Y}$ in der durch die erste Transformation entstandenen Gleichung ist. Im folgenden soll daher (66) angenommen werden.

Wir setzen nun

(67) $$z^{(n+p)}(x, y) - z^{(n)}(x, y) = v^{(n,p)}(x, y).$$

Dann genügt $v^{(n,p)}$ der Gleichung

(68) $$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \sigma^{(n,p)}(x, y),$$

wo

(69) $$|\sigma^{(n,p)}| = \left|\frac{\partial S}{\partial z}(x, y, \bar{z}(x, y))\right| \leqq \operatorname{Max}\left|\frac{\partial S}{\partial z}\right| = M$$

($\bar{z}$ Zwischenwert zwischen $z^{(n)}$ und $z^{(n+p)}$),

und den Randbedingungen

(70) $$v(0, y) = z_0^{(n+p)}(y) - z_0^{(n)}(y), \qquad v(0, x) = v(1, x) = 0.$$

Da wir wissen, daß (68), (70) die Lösung $v = v^{(n,p)}$ hat, können wir diese nach Satz 1 durch Grenzübergang aus

(71) $$\frac{d^2 v_{\nu+1}}{dy^2} - \frac{1}{h} v_{\nu+1} = -\frac{v_\nu}{h} + v_\nu\, \sigma^{(n,p)}(x_{\nu+1}, y)$$

(72) $$v_\nu(0) = v_{\nu+1}(1) = 0, \qquad v_0(y) = z_0^{(n+p)}(y) - z_0^{(n)}(y)$$

erhalten. Nach Hilfssatz 1 ist nun

$$|v_{\nu+1}| \leqq \operatorname{Max} |v_\nu(1 + h\sigma^{(n,p)})|,$$

also nach (69)

(73) $$\operatorname{Max} |v_{\nu+1}| \leqq \operatorname{Max} |v_\nu| (1 + M h).$$

Wegen (64) können wir ferner nach der letzten Gleichung (72)

$$|v_0(y)| < \varepsilon_n$$

mit

(74) $$\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$$

schreiben, so daß aus (73) durch vollständige Induktion $\operatorname{Max}|v_{\nu+1}| \leqq \varepsilon_n (1 + Mh)^\nu$ folgt. Hieraus wieder ergibt sich (ähnlich wie beim Beweis von 22)

$$|v_{\nu+1}| \leqq \varepsilon_n e^{aM}.$$

Daher ist nach (67)

(75) $$|v^{(n,p)}| = |z^{(n+p)}(x, y) - z^{(n)}(x, y)| \leqq \varepsilon_n e^{aM},$$

woraus nach (74) die behauptete in (11) gleichmäßige Konvergenz von $z^{(n)}$ folgt. Hieraus folgt auch, daß die stetige Grenzfunktion $z(x, y)$ die Randbedingungen erfüllt. Denn es ist

$$\lim_{n\to\infty} z^{(n)}(0, y) = z_0(y), \quad \lim_{n\to\infty} z^{(n)}(x, 0) = z^{(n)}(x, 0) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} z^{(n)}(x, 1) = z^n(x, 1) = 0.$$

Um nun weiter zu zeigen, daß $\frac{\partial z^{(n)}}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z^{(n)}}{\partial y^2}$ in jedem abgeschlossenen Teilbereich von (11) gleichmäßig konvergieren, bedienen wir uns der zum Bereich (11) gehörenden Greenschen Funktion $G(x, y, \xi, \eta)$ von $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x}$, die bekanntlich folgendermaßen definiert ist: Ist

$$U(x, y, \xi, \eta) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x-\xi}} e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4(x-\xi)}} & \text{für} \quad \xi < x, \\ 0 & \quad " \quad \xi \geqq x, \end{cases}$$

so ist

$$G(x, y, \xi, \eta) = U(x, y, \xi, \eta) - g(x, y, \xi, \eta),$$

wobei g (als Funktion von ξ, η) der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \eta^2} + \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0$$

und den Randbedingungen

$$g(x, y, x, \eta) = 0; \quad g(x y, \xi, 0) = U(x, y, \xi, 0); \quad g(x, y, \xi, 1) = U(x, y, \xi, 1)$$

genügt. Die *Existenz* von g, und damit auch von G, folgt (für jedes im Innern von (11) gelegene x, y) leicht aus Satz 2 [12]).

$z^{(n)}$ ist nun nach Satz 2 auch am Rande von (11) noch differenzierbar. Man erhält daher durch bekannte Anwendung einer Greenschen Formel (unter Berücksichtigung von (65))

$$(76) \qquad 2\sqrt{\pi}\, z^{(n)}(x, y) = \int_0^1 G(x, y, 0, \eta)\, z_0^{(n)}(\eta)\, d\eta$$
$$- \int_0^x\int_0^1 G(x, y, \xi, \eta)\, S(\xi, \eta, z^{(n)}(\xi, \eta))\, d\xi\, d\eta$$

und nach (67)

$$(77) \qquad 2\sqrt{\pi}\, v^{(n,p)}(x, y) = \int_0^1 G(x, y, 0, \eta)\, v^{(n,p)}(0, \eta)\, d\eta$$
$$- \int_0^x\int_0^1 G(x, y, \xi, \eta)\,[S(\xi, \eta, z^{(n+p)}) - S(\xi, \eta, z^{(n)})]\, d\xi\, d\eta.$$

---

[12]) Setzt man nämlich $\xi' = x - \xi$, $\eta' = \eta$ und

$$g(x, y, \xi, \eta) - (1-\eta)\, U(x, y, \xi, 0) - \eta\, U(x, y, \xi, 1) = \gamma(x, y, \xi', \eta'),$$

so erhält man, wie die Rechnung zeigt, für γ als Funktion von ξ', η' ein allen Voraussetzungen von Satz 2 genügendes Problem. — Der weitere Beweis des Textes bedient sich bekannter Methoden und ist daher nur in den Hauptzügen kurz wiedergegeben.

Auf Grund bekannter Abschätzungen[13]) der Integrale

$$\int_0^1 \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, 0, \eta)\, d\eta, \qquad \int_0^x\!\!\int_0^1 \frac{\partial U}{\partial y}(x, y, \xi, \eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

ergeben sich nun aus (76), (77) unter Benutzung von (75) in einem abgeschlossenen Teilbereich $\mathfrak{T}$ von (11) ohne Mühe Ungleichungen der Form

$$(78) \qquad \left|\frac{\partial z^{(n)}}{\partial y}\right| < \frac{M}{\sqrt{x}}, \qquad \left|\frac{\partial v^{(n,p)}}{\partial y}\right| < \frac{\eta_n}{\sqrt{x}},$$

wo M eine von n unabhängige Konstante und η_n eine Folge gegen 0 konvergierender (von p unabhängiger) Konstanten ist. Unter Benutzung der gleichen Abschätzungen und von (78), sowie der Tatsache, daß der Faktor von G in dem Doppelintegral von (77) nach η differenzierbar ist, findet man schließlich leicht, daß auch $\frac{\partial^2 v^{(n,p)}}{\partial y^2}$ in $\mathfrak{T}$ gleichmäßig für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Hiermit ist die gleichmäßige Konvergenz von $\frac{\partial z^{(n)}}{\partial y}$ und $\frac{\partial^2 z^{(n)}}{\partial y^2}$ in $\mathfrak{T}$, und somit nach Satz 3, S. 666f. bewiesen.

---

[13]) Siehe z. B. Gevrey, loc. cit. S. 330 und S. 343.

(Eingegangen am 5. 5. 1929.)