

# Über die topologische Erweiterung von Räumen.

Von

A. Tychonoff in Moskau.

---

## Einleitung.

Die vorliegende Arbeit schließt an die abstrakt-topologischen Untersuchungen von Alexandroff und Urysohn an<sup>1)</sup> und behandelt das Problem der Einbettung von beliebigen topologischen Räumen in absolut abgeschlossene<sup>2)</sup> und insbesondere in bikompakte Räume. Ich beweise in erster Linie den folgenden

*Satz I. Zu jeder Kardinalzahl  $\tau$  gibt es einen nur von dieser Kardinalzahl abhängenden bikompakten Raum  $R_\tau$  von der Eigenschaft, daß jeder normale topologische Raum, der ein Umgebungssystem von einer Mächtigkeit  $\leq \tau$  besitzt, einer Teilmenge des Raumes  $R_\tau$  homöomorph ist; dabei besitzt der Raum  $R_\tau$  selbst ein Umgebungssystem von der Mächtigkeit  $\tau$ . Wenn  $\tau = \aleph_0$  ist, so ist  $R_\tau$  dem Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes homöomorph.*

(Man versteht bekanntlich unter dem Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes die Gesamtheit aller Punkte  $\xi = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ , deren Koordinaten  $x_n$  für jedes  $n$  den Ungleichungen  $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$  genügen.)

---

<sup>1)</sup> Siehe vor allem Alexandroff und Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Annalen 92 (1924), S. 258, und Alexandroff, Über stetige Abbildungen kompakter Räume, Math. Annalen 96 (1926), S. 555; die Kenntnis dieser Arbeit (insbesondere auch die dort gebrauchte Terminologie) wird im folgenden vorausgesetzt; die erste dieser Arbeiten wird kurz durch „Alexandroff-Urysohn“, die zweite durch „Alexandroff“ zitiert. Wegen ausführlicher Darstellung der erwähnten Untersuchungen möge insbesondere auf „Mémoire sur les espaces compacts“ (Verh. K. Akademie Amsterdam, Deel XIV, No. 1 (1929)) derselben Verfasser hingewiesen sein.

<sup>2)</sup> Alexandroff-Urysohn, S. 261.

In dem letzten Teile des soeben ausgesprochenen Satzes sind insbesondere die beiden bekannten Urysohnschen Metrisationssätze<sup>3)</sup> (der Metrisationssatz für separable normale Räume, sowie der Metrisationssatz für kompakte topologische Räume) und auch der Urysohnsche Satz von der Einbettbarkeit jedes separablen metrischen Raumes in den Fundamentalkörper des Hilbertschen Raumes<sup>4)</sup> enthalten.

Die Frage liegt nahe, ob die Normalität eines topologischen Raumes auch notwendig ist, um den Raum in einen bikompakten topologischen Raum einbetten zu können. In der vorliegenden Arbeit (§ 4) wird auf diese Frage eine negative Antwort gegeben, indem gezeigt wird, daß auch nichtnormale topologische Räume als Teilmengen von bikompakten Räumen auftreten können. Somit entsteht die Frage, notwendige und hinreichende Bedingungen aufzustellen, damit ein Raum in einen bikompakten topologischen eingebettet werden kann. Um diese Bedingung formulieren zu können, führen wir die folgende Definition<sup>5)</sup> ein.

Ein topologischer Raum heißt *vollständig regulär*, wenn zu jedem Punkte  $x_0$  und zu jeder ihn nicht enthaltenden abgeschlossenen Menge  $A$  eine im ganzen Raume stetige Funktion  $f(x)$  definiert werden kann, die im ganzen Raume der Bedingung

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

genügt und die überdies in  $x_0$  gleich 0 und in sämtlichen Punkten von  $A$  gleich 1 ist.

Jeder vollständig reguläre Raum ist, wie leicht ersichtlich, regulär, während jeder normale Raum vollständig regulär ist. Im § 4 der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß es vollständig reguläre Räume gibt, die nicht normal, und daß es reguläre Räume gibt, die nicht vollständig regulär sind, womit die Klasse der vollständig regulären Räume als eine logisch berechnete Klasse von Räumen erscheint. Ihre mathematische Berechnung wird durch den folgenden Satz gegeben:

*Satz II. Ein Raum ist dann und nur dann einer Teilmenge eines bikompakten topologischen Raumes homöomorph, wenn er vollständig regulär ist.*

Was endlich den allgemeinen Fall topologischer Räume betrifft, so gilt der

*Satz III. Jeder topologische Raum  $R$  ist einer Teilmenge eines absolut abgeschlossenen Raumes homöomorph, der ein Umgebungssystem besitzt,*

<sup>3)</sup> Siehe Urysohn, Zum Metrisationsproblem, *Math. Annalen* 94 (1925), S. 309, wo auch andere Arbeiten über denselben Gegenstand angegeben sind.

<sup>4)</sup> Siehe Urysohn, Der Hilbertsche Raum . . . , *Math. Annalen* 92 (1924), S. 302.

<sup>5)</sup> Diese Definition rührt von Urysohn her. Vgl. seine Arbeit: Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, *Math. Annalen* 94 (1925), S. 292.

welches dieselbe Mächtigkeit hat wie ein gegebenes Umgebungssystem des Raumes  $R$ .

In der Formulierung der obigen Sätze wird unter einem Umgebungssystem selbstverständlich ein volles (d. h. dem System aller im Raume vorhandener Gebiete gleichwertiges) System von Umgebungen verstanden. Ein solches Umgebungssystem soll im folgenden kurz eine *Basis* genannt werden.

Ich möchte zum Schluß noch erwähnen, daß ich bei der endgültigen Redaktion dieser Arbeit von Herrn Alexandroff unterstützt worden bin.

## § 1.

### Konstruktion der Räume $R_\tau$ .

Es sei  $\{J_\alpha\}$  eine Menge von der Mächtigkeit  $\tau$  von abstrakt gegebenen zueinander fremden Einheitsstrecken<sup>6)</sup>  $0 \leq t \leq 1$ . Ein Punkt  $x$  des Raumes  $R_\tau$  ist definitionsgemäß der Inbegriff  $\{t_1, t_2, \dots, t_\alpha, \dots\}$  von „Koordinaten“  $t_\alpha$ , wobei  $t_\alpha$  ein Punkt von  $J_\alpha$ , also eine reelle Zahl  $0 \leq t_\alpha \leq 1$  ist. Die Umgebungsdefinition geschieht folgendermaßen: Es sei  $x_0 = \{t_1^0, t_2^0, \dots, t_\alpha^0, \dots\}$  ein Punkt von  $R_\tau$ . Wir wählen beliebig endlichviele  $J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \dots, J_{\alpha_k}$  und auf jedem dieser Intervalle  $J_{\alpha_i}$  zwei rationale Zahlen  $\tau'_{\alpha_i} < t_{\alpha_i}^0 < \tau''_{\alpha_i}$ ; eine Umgebung von  $x_0 = \{t_1^0, t_2^0, \dots, t_\alpha^0, \dots\}$  besteht dann definitionsgemäß aus allen Punkten  $x = \{t_1, t_2, \dots, t_\alpha, \dots\}$ , die den Bedingungen  $\tau'_{\alpha_i} < t_{\alpha_i} < \tau''_{\alpha_i}$  genügen.

Dieses Umgebungssystem hat, wie leicht ersichtlich, die Mächtigkeit  $\aleph_0 \cdot \tau = \tau$ . Ein gleichwertiges Umgebungssystem erhält man, wenn man für  $\tau'_{\alpha_i}$  bzw.  $\tau''_{\alpha_i}$  die Punkte  $t_{\alpha_i}^0 - \varepsilon_i$  bzw.  $t_{\alpha_i}^0 + \varepsilon_i$  wählt ( $\varepsilon_i$  sind beliebige hinreichend kleine positive Zahlen). Wir werden kurz schreiben  $t_{\alpha_i} < S(t_{\alpha_i}^0; \varepsilon_i)$ . Wenn  $\varepsilon_i = \frac{1}{n_i}$  ist, werden wir die soeben definierte Umgebung durch

$$U_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}^{n_1, n_2, \dots, n_k}(x_0)$$

bezeichnen.

Der mittels dieses Umgebungssystems definierte Raum genügt, wie man leicht zeigt, allen Hausdorffschen Axiomen;  $R_\tau$  ist also ein topologischer Raum.

Es ist nun leicht zu zeigen, daß  $R_{\aleph_0}$  dem kompakten, durch die Bedingungen  $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$  bestimmten Fundamentalquadranten des Hilbertschen Raumes homöomorph ist. Um diese Homöomorphie festzustellen, lassen wir jedem Punkte  $x = \{t_1, \dots, t_n, \dots\}$  des Raumes  $R_{\aleph_0}$  den Punkt

<sup>6)</sup>  $\alpha$  nimmt alle Werte von Null bis zur ersten Ordnungszahl  $\omega^{(\alpha)}$  von der Mächtigkeit  $\tau$  an.

$x^* = \left\{ t_1, \dots, \frac{t_n}{n}, \dots \right\}$  des Hilbertschen Raumes entsprechen. Die Abbildung ist eineindeutig. Um zu zeigen, daß sie beiderseits stetig ist, muß man folgende Behauptungen beweisen:

a) Zu jeder Umgebung  $U$  von  $x_0$  im  $R_{\aleph_0}$  gibt es eine Zahl  $\varepsilon$  von der Eigenschaft, daß aus

$$\varrho(x_0^*; x^*) < \varepsilon$$

im Hilbertschen Raume die Inklusion

$$x < U(x_0) \quad (\text{in } R_{\aleph_0})$$

folgt.

b) Zu jeder Zahl  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Umgebung  $U(x_0)$  von der Eigenschaft, daß aus

$$x < U(x_0) \quad (\text{in } R_{\aleph_0})$$

die Ungleichung

$$\varrho(x_0^*; x^*) < \varepsilon$$

im Hilbertschen Raum folgt.

Beweis von a). Es sei eine Umgebung  $U(x_0)$  durch die Bedingungen

$$t_n < S(t_n^{(0)}; \varepsilon_i) \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

gegeben. Man wähle  $N$  größer als alle  $n_i$ , und  $\varepsilon$  kleiner als alle  $\frac{\varepsilon_i}{N}$ .

Wenn nun

$$\varrho(x_0^*; x^*) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t_n^0 - t_n)^2}{n^2}} < \varepsilon$$

ist, so ist auch

$$\frac{|t_n^{(0)} - t_n|}{n} < \varepsilon.$$

Es ist also für jedes  $n_i$

$$|t_n^0 - t_{n_i}| < \varepsilon n_i < \varepsilon N < \varepsilon_i$$

und somit  $x < U(x_0)$ .

Beweis von b). Es sei  $\varepsilon > 0$  gegeben; man wähle  $N$  so groß, daß

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

ist. Dann ist für jeden Punkt  $x$  der durch die Bedingungen

$$t_i < S\left(\bar{t}_i^0; \frac{\varepsilon \sqrt{3}}{\pi}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

bestimmten Umgebung  $U$  von  $x_0$

$$\varrho(x_0^*; x^*) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t_n^0 - t_n)^2}{n^2}} < \sqrt{\sum_{n=1}^N \frac{(t_n^0 - t_n)^2}{n^2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} < \varepsilon,$$

w. z. b. w.

## § 2.

**Beweis der Bikompaktheit von  $R_r$ .**

Vorbemerkung 1. Es sei irgendein Raum  $R$  und eine (abstrakt gedachte) Menge  $M$  (beliebiger Mächtigkeit) gegeben. Es sei ferner  $\alpha$  eine eindeutige (im allgemeinen nicht eineindeutige) Abbildung von  $M$  auf eine echte oder unechte Teilmenge  $\alpha(M)$  von  $R$ . Dann ist für jeden Punkt  $x$  von  $\alpha(M)$  eine Kardinalzahl, nämlich die Mächtigkeit der Menge aller Originalpunkte von  $x$  bei der Abbildung  $\alpha$ , bestimmt. Diese Kardinalzahl nenne ich das *Gewicht* des Punktes  $x$ . Die Summe von Gewichten aller Punkte einer Teilmenge von  $\alpha(M)$  soll das Gewicht dieser Teilmenge heißen.

Wenn  $\xi$  ein Punkt von  $R$  ist, so nennen wir ihn *Konzentrationspunkt von  $M$  (in bezug auf  $\alpha$ )*, wenn, wie auch die Umgebung  $U(\xi)$  von  $\xi$  gewählt sei, das Gewicht der Durchschnittsmenge  $U(\xi) \cdot \alpha(M)$  gleich der Mächtigkeit von  $M$  ist.

Die Menge aller Konzentrationspunkte von  $M$  in bezug auf  $\alpha$  ist eine in  $R$  abgeschlossene Menge, die wir durch  $[M]_\alpha$  bezeichnen werden.

Wenn  $R$  bikompakt ist, so besitzt jede unendliche Menge  $M$  in bezug auf jede Abbildung  $\alpha$  mindestens einen Konzentrationspunkt (Beweis mit Hilfe des Borel-Lebesgueschen Satzes ohne Schwierigkeit zu führen).

Im folgenden wird diese Bemerkung unter der Voraussetzung, daß  $R$  ein abgeschlossenes Intervall ist, benutzt.

Es sei  $E$  irgendeine unendliche Teilmenge von  $R_r$ , deren Mächtigkeit  $m \geq \aleph_0$  sein möge. Indem man die Gesamtheit der ersten Koordinaten aller Punkte von  $E$  betrachtet, erhält man eine eindeutige Abbildung  $\alpha_1$  von  $E$  auf die Einheitsstrecke; wir bezeichnen durch  $t_1^0$  einen (beliebig, aber eindeutig gewählten) Konzentrationspunkt von  $E$  in bezug auf  $\alpha_1$ .

Es seien jetzt die reellen Zahlen

$$t_1^0, t_2^0, \dots, t_\alpha^0, \dots \quad (0 \leq t_\alpha \leq 1)$$

für alle  $\alpha < \alpha_0$  definiert (dabei ist  $\alpha_0$  eine beliebige Ordnungszahl unter  $\omega^\tau$ , und  $\omega^\tau$  die erste Ordnungszahl von der Mächtigkeit  $\tau$ ), und zwar so, daß folgende Bedingung erfüllt ist.

(A) Wenn  $E_n^\alpha$  die Menge aller Punkte von  $E$  bedeutet, deren  $\alpha$ -te Koordinate  $t_\alpha$  der Ungleichung  $|t_\alpha - t_\alpha^0| < \frac{1}{n}$  genügt, so hat der Durchschnitt eines beliebigen endlichen Systems

$$E_{n_1}^{\alpha_1} \cdot E_{n_2}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot E_{n_k}^{\alpha_k} \quad (\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k < \alpha_0)$$

die Mächtigkeit  $m$ .

(Für  $\alpha_0 = 2$  ist die Bedingung (A) erfüllt, weil dann

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 1$$

ist und  $E_{n_1}^{\alpha_1} \cdot E_{n_2}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot E_{n_k}^{\alpha_k} = E_\nu^1$ , wo  $\nu$  die größte unter den Zahlen  $n_1, n_2, \dots, n_k$  ist; die Menge  $E_\nu^1$  hat offenbar die Mächtigkeit  $m$ , weil  $i_1^0$  ein Konzentrationspunkt von  $E$  ist.)

Es sei jetzt  $\alpha$  die Abbildung von  $R_\nu$  auf die Einheitsstrecke, die dadurch entsteht, daß man jedem Punkte von  $R_\nu$  seine  $\alpha_0$ -te Koordinate entsprechen läßt.

Man betrachte alle abgeschlossenen Mengen von der Gestalt

$$[E_{n_1}^{\alpha_1} \cdot E_{n_2}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot E_{n_k}^{\alpha_k}]_\alpha = F_{n_1 n_2 \dots n_k}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k},$$

wobei wie immer  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k < \alpha_0$  ist.

Ich behaupte, daß je endlichviele unter den Mengen  $F_{n_1 n_2 \dots n_k}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}$  einen nicht leeren Durchschnitt haben. Es seien in der Tat

$$F_{n_1^1 n_2^1 \dots n_{k_1}^1}^{\alpha_1^1 \alpha_2^1 \dots \alpha_{k_1}^1}, \quad F_{n_1^2 n_2^2 \dots n_{k_2}^2}^{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_{k_2}^2}, \quad \dots, \quad F_{n_1^h n_2^h \dots n_{k_h}^h}^{\alpha_1^h \alpha_2^h \dots \alpha_{k_h}^h}$$

beliebig gegeben. Dann ist

$$(1) \quad \prod_{i=1}^h F_{n_1^i n_2^i \dots n_{k_i}^i}^{\alpha_1^i \alpha_2^i \dots \alpha_{k_i}^i} = \prod_{i=1}^h [E_{n_1^i n_2^i \dots n_{k_i}^i}^{\alpha_1^i \alpha_2^i \dots \alpha_{k_i}^i}]_\alpha.$$

Nun ist aber (wie die Mengen  $A$  und  $B$  gewählt sein mögen) stets

$$[A]_\alpha \cdot [B]_\alpha > [A \cdot B]_\alpha.$$

Aus dieser Bemerkung und der Identität (1) folgt somit

$$(2) \quad \prod_{i=1}^h F_{n_1^i n_2^i \dots n_{k_i}^i}^{\alpha_1^i \alpha_2^i \dots \alpha_{k_i}^i} > \left[ \prod_{i=1}^h \prod_{j=1}^{k_i} E_{n_j^i}^{\alpha_j^i} \right]_\alpha.$$

Es gilt ferner vermöge der Bedingung (A):

$$(3) \quad \text{Mächt. von } \left[ \prod_{i=1}^h \prod_{j=1}^{k_i} E_{n_j^i}^{\alpha_j^i} \right] = m,$$

woraus folgt, daß

$$\left[ \prod_{i=1}^h \prod_{j=1}^{k_i} E_{n_j^i}^{\alpha_j^i} \right]_\alpha$$

und insbesondere

$$\prod_{i=1}^h F_{n_1^i n_2^i \dots n_{k_i}^i}^{\alpha_1^i \alpha_2^i \dots \alpha_{k_i}^i} \dots$$

nicht leer ist.

Da je endlichviele unter den Mengen  $F_{n_1, n_2, \dots, n_k}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$  ( $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k < \alpha_0$ ) einen nicht leeren Durchschnitt haben, so haben alle diese Mengen (die ja abgeschlossene Teilmengen der Strecke  $0 \leq t \leq 1$  sind) mindestens einen Punkt gemein. Einen beliebig (aber eindeutig) gewählten unter den Punkten der Durchschnittsmenge aller  $F_{n_1, n_2, \dots, n_k}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}$  bezeichnen wir durch  $t_{\alpha_i}^0$ , und man zeigt leicht, daß die Bedingung (A) für alle  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_k < \alpha_0 + 1$  erfüllt ist <sup>7)</sup>.

Auf diese Weise bestimmt man für jede Ordnungszahl  $\alpha < \omega^\tau$  einen Punkt  $t_\alpha^0$  der Strecke  $0 \leq t \leq 1$ . Man betrachte jetzt den Punkt  $x_0$  von  $R_\tau$  mit den Koordinaten

$$t_1^0, t_2^0, \dots, t_\alpha^0, \dots \quad (\alpha < \omega^\tau):$$

$$x_0 = \{t_1^0, t_2^0, \dots, t_\alpha^0, \dots\}.$$

Ich behaupte, daß  $x_0$  ein vollständiger Häufungspunkt der Menge  $E$  ist. In der Tat enthält eine beliebige Umgebung von  $x_0$   $U_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}^{n_1, n_2, \dots, n_k}(x_0)$  die Menge  $E_{n_1}^{\alpha_1} \cdot E_{n_2}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot E_{n_k}^{\alpha_k}$ , die (vermöge der Bedingung (A)) die Mächtigkeit  $m$  hat, w. z. b. w.

### § 3.

#### Beweis der Sätze I und II.

Um die Sätze I und II zu beweisen, genügt es zu zeigen:

1. daß jede Teilmenge eines bikompakten Raumes vollständig regulär ist;
2. daß jeder vollständig reguläre Raum  $R$  mit einer Basis von der Mächtigkeit  $\tau$  einer Teilmenge von  $R_\tau$  homöomorph ist.

Die erste Behauptung folgt daraus, daß die vollständige Regularität eine im Urysohnschen Sinne transitive Eigenschaft ist, d. h. daß eine Teilmenge eines vollständig regulären Raumes, als Raum betrachtet, selbst vollständig regulär ist. Es sei in der Tat  $R$  eine Teilmenge eines vollständig regulären Raumes  $R^*$ . Ist nun  $x_0$  ein Punkt und  $A$  eine zu  $x_0$  fremde in  $R$  abgeschlossene Menge, so gibt es eine in  $R^*$  abgeschlossene Menge  $A^*$  derart, daß  $A = R \cdot A^*$ . Da  $R^*$  vollständig regulär ist, kann man dort eine stetige Funktion  $f(x)$  erklären, die folgenden Bedingungen <sup>1)</sup> genügt:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_0) = 0, \\ f(x) = 1 \quad \text{für alle } x \in A^*, \\ 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \text{für alle übrigen Punkte.} \end{array} \right.$$

<sup>7)</sup> Es seien in der Tat

$$E_{n_1}^{\alpha_1}, E_{n_2}^{\alpha_2}, \dots, E_{n_k}^{\alpha_k}$$

gegeben.  $E^* = E_{n_1}^{\alpha_1} \cdot E_{n_2}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot E_{n_k}^{\alpha_k}$  hat die Mächtigkeit  $m$ , und  $t_{\alpha_0}^{(0)}$  ist ein Konzentrationspunkt dieser Menge in bezug auf  $\alpha$ ; daraus und aus der Definition von  $E_{n_0}^{\alpha_0}$  folgt dann unmittelbar, daß bei jedem  $n_0$   $E^* \cdot E_{n_0}^{\alpha_0}$  von derselben Mächtigkeit  $m$  ist.

Die Menge  $A$  ist in der Menge  $A^*$  enthalten, also ist für alle ihre Punkte  $f(x) = 1$ . Betrachtet man die Funktion  $f(x)$  nur in Punkten von  $R$ , so genügt sie allen aufgestellten Bedingungen, womit die vollständige Regularität von  $R$  bewiesen ist.

Bemerkung 2. Ist  $R$  ein vollständig regulärer Raum, so gibt es für jeden Punkt  $x_0$  und jede seine Umgebung  $U(x_0)$  eine andere Umgebung desselben Punktes  $V(x_0)$  derart, daß eine stetige Funktion  $f(x)$  sich erklären läßt, so daß

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \text{wenn } x \in \overline{V(x_0)}, \\ f(x) = 1, & \text{wenn } x \in R - U(x_0), \\ 0 \leq f(x) \leq 1 & \text{für alle übrigen Punkte von } R. \end{cases}$$

Um letztere Tatsache zu beweisen, erkläre man im Raume  $R$  eine stetige Funktion  $f^*(x)$  dadurch, daß man

$$\begin{cases} f^*(x_0) = 0, \\ f^*(x) = 1, & \text{wenn } x \in R - U(x), \\ 0 \leq f^*(x) \leq 1 & \text{in allen übrigen Punkten von } R \end{cases}$$

setzt.

Die Funktion  $f(x)$  ist stetig, es gibt also eine Umgebung von  $x_0$ ,  $V(x_0)$ , für deren Punkte  $f^*(x) < \frac{1}{2}$ . Dann kann man eine Funktion  $f(x)$  z. B. folgendermaßen definieren:

$$\begin{cases} f(x) = f^*(x) & , \text{ falls } f^*(x) = 1, \\ f(x) = 0 & , \text{ falls } f^*(x) \leq \frac{1}{2}, \\ f(x) = 2\left(f^*(x) - \frac{1}{2}\right), & \text{ falls } \frac{1}{2} < f^*(x) < 1. \end{cases}$$

Der Beweis der Behauptung 2 geschieht nunmehr mit Hilfe einer von Urysohn zum Beweis eines seiner Metrisationssätze angewandten Methode. Es sei  $R$  ein vollständig regulärer Raum mit einer Basis  $\mathfrak{B}$  von der Mächtigkeit  $\tau$ . Ein Paar zur Basis  $\mathfrak{B}$  gehörender Umgebungen  $(U, V) = \pi$  soll kanonisch heißen, falls  $U \supset \overline{V}$  ist und eine stetige Funktion  $f(x)$  im Raume  $R$  bestimmt werden kann, die in  $\overline{V}$  verschwindet, in  $R - U$  gleich 1 ist und überall in  $R$  der Ungleichung  $0 \leq f(x) \leq 1$  genügt.

Es seien

$$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_\alpha, \dots \quad (\alpha < \omega^\tau)$$

alle kanonischen Paare<sup>8)</sup> und

<sup>8)</sup> Die Mächtigkeit der Menge aller kanonischen Paare ist höchstens gleich der Mächtigkeit der Basis; sie kann aber auch nicht kleiner sein, weil (vermöge der Bemerkung 2) jedes  $U$  aus  $\mathfrak{B}$  mindestens in einem  $\pi$  vorkommt; die Mächtigkeit aller kanonischen Paare ist also genau  $\tau$ .

$$f_1, f_2, \dots, f_\alpha, \dots \quad (\alpha < \omega^\tau)$$

die ihnen entsprechenden stetigen Funktionen.

Wir lassen nun einem Punkt  $x \in R$  den Punkt

$$f(x) = x^* = \{t_1, t_2, \dots, t_\alpha, \dots\}$$

entsprechen, wo  $t_\alpha = f_\alpha(x)$ . Die dadurch bestimmte Abbildung von  $R$  auf eine Teilmenge  $R^*$  von  $R_\tau$  ist eineindeutig. Sind in der Tat  $x$  und  $y$  verschiedene Punkte von  $R$ , so gibt es zunächst eine Umgebung  $U$ , die  $x$ , aber nicht  $y$  enthält; vermöge der Bemerkung 2 gibt es sodann eine in  $U$  enthaltene Umgebung  $V$  von  $x$ , so daß  $U$  und  $V$  ein kanonisches Paar  $\pi_\alpha = (U, V)$  bilden. Somit ist  $f_\alpha(x) = 0$ , während  $f_\alpha(y) = 1$  ist; die Punkte  $x^*$  und  $y^*$  sind also verschieden.

Die Abbildung  $x^* = f(x)$  ist *beiderseits* stetig.

1. Es sei  $x_0$  ein Punkt,

$$f(x_0) = x_0^* = \{t_1^0, t_2^0, \dots, t_\alpha^0, \dots\}$$

sein Bildpunkt in  $R^*$ ,  $U(x_0^*) = U_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}^{n_1, n_2, \dots, n_k}$  eine beliebige Umgebung letzteren Punktes. Um die Stetigkeit der Funktion  $x^* = f(x)$  nachzuweisen, genügt es eine den Punkt  $x_0$  enthaltende offene Menge  $G$  zu finden, dessen Bild  $f(G)$  in  $U(x_0^*)$  enthalten ist. Man beachte zu diesem Zwecke die Menge  $G_{\alpha_i}^{n_i}$  aller Punkte  $x$  von  $R$ , für die

$$(1_i) \quad t_{\alpha_i}^0 - \frac{1}{n_i} < f_{\alpha_i}(x) < t_{\alpha_i}^0 + \frac{1}{n_i} \quad (1 \leq i \leq k)$$

ist; da  $f_{\alpha_i}(x)$  stetig ist, so ist  $G_{\alpha_i}^{n_i}$  eine offene Menge; da außerdem  $f_{\alpha_i}(x_0) = t_{\alpha_i}^0$  ist, so ist  $x_0 \in G_{\alpha_i}^{n_i}$ . Es genügt jetzt

$$G = G_{\alpha_1}^{n_1} \cdot G_{\alpha_2}^{n_2} \cdot \dots \cdot G_{\alpha_k}^{n_k}$$

zu setzen.  $G$  ist eine offene Menge und für  $x \in G$  sind alle Bedingungen  $(1_i)$  erfüllt, d. h. es ist  $f(x) \in U(x_0^*)$ ; da überdies  $x_0 \in G$  ist, ist unsere Behauptung bewiesen.

2. Um die Stetigkeit der Umkehrfunktion  $x = f^{-1}(x^*)$  zu beweisen, zeigen wir, daß für jede  $U(x_0)$  sich eine  $U(x_0^*)$  finden läßt, für welche  $f^{-1}(U(x_0^*)) \subset U(x_0)$ . Letztere Bedingung heißt aber nichts anderes, als daß aus

$$\begin{aligned} y &< R - U(x_0) \\ y^* &< R^* - U(x_0^*) \end{aligned}$$

folgen soll. Es ist nun  $U(x_0)$  beliebig gegeben; man bestimme ein  $V$  so, daß  $x_0 \in V$  und  $(U, V)$  ein kanonisches Paar, und zwar  $\pi_\alpha = (U, V)$  ist; dann ist aber  $f_\alpha(x_0) = 0$ ;  $f_\alpha(y) = 1$  für jedes  $y \in R - U$ , d. h. die  $\alpha$ -te Koordinate von  $x_0^*$  ist gleich Null, die  $\alpha$ -te Koordinate eines jeden Punktes

$y^*$  für  $y \in R - U$  ist dagegen gleich 1. Wenn jetzt  $U(x_0^*) = U_\alpha^2$  gesetzt wird, so folgt aus  $y \in R - U(x_0)$ , daß die  $\alpha$ -te Koordinate von  $y^*$  gleich 1; also  $> \frac{1}{2}$  ist;  $y^*$  liegt somit außerhalb von  $U(x_0^*)$ .

Die Homöomorphie der beiden Räume  $R$  und  $R^*$  ist hiermit nachgewiesen. Dadurch sind aber auch die beiden Sätze I und II bewiesen.

§ 4.

**Konstruktion von Beispielen.**

In diesem Paragraphen will ich zeigen:

1. daß es vollständig reguläre Räume gibt, die nicht normal sind, und
2. daß es reguläre Räume gibt, die nicht vollständig regulär sind.

Ich konstruiere zunächst einen Raum  $S$  folgendermaßen. Die Punkte  $x$  von  $S$  sind Paare  $(\alpha, \beta)$ , wobei  $\alpha$  und  $\beta$  Ordnungszahlen sind, und zwar durchläuft  $\alpha$  alle Werte  $\leq \omega_1$  und  $\beta$  alle Werte  $\leq \omega$ . Wenn  $x_0 = (\alpha_0, \beta_0)$  ( $1 \leq \alpha_0 \leq \omega_1, 1 \leq \beta_0 \leq \omega$ ) ein Punkt von  $S$  ist, so erhält man eine beliebige Umgebung  $U_{\alpha', \beta'}(x_0)$   $0 \leq \alpha' < \alpha_0, 0 \leq \beta' < \beta_0$  dadurch, daß man alle  $x = (\alpha; \beta)$  betrachtet, für die  $\alpha' < \alpha \leq \alpha_0, \beta' < \beta \leq \beta_0$  ist.

Wie leicht ersichtlich, ist  $S$  ein bikompakter Raum.

Man bezeichne nun durch  $\dot{S}$  den Raum, der aus  $S$  durch Tilgen des Punktes  $(\omega_1, \omega)$  entsteht. Als Teilmenge eines bikompakten Raumes  $S$  ist  $\dot{S}$  vollständig regulär; andererseits ist aber  $\dot{S}$  nicht normal, weil die beiden abgeschlossenen und zueinander fremden Teilmengen von  $\dot{S}$

$$X = \left\{ (\alpha, \omega) \mid 1 \leq \alpha < \omega_1 \right\} \quad \text{und} \quad Y = \left\{ (\omega_1, \beta) \mid 1 \leq \beta < \omega \right\}$$

durch keine zwei zueinander fremde Gebiete getrennt werden können. Es gilt sogar die schärfere

Behauptung I. Wenn  $G$  ein die Menge  $Y_n = \left\{ (\omega_1, \beta) \mid n \leq \beta < \omega \right\}$  enthaltendes Gebiet ist, so gibt es ein  $\alpha_0 < \omega_1$  derart, daß  $\bar{G}$  alle Punkte  $X_{\alpha_0} = \{\alpha, \omega\}, \alpha_0 \leq \alpha < \omega_1$ , enthält.

In der Tat gibt es für jeden Punkt  $x = (\omega_1, \beta)$  eine  $U_{\alpha_\beta, \beta'}(x) \subset G$ ; also sind insbesondere alle  $x = (\alpha, \beta)$   $\alpha > \alpha_\beta$  in  $G$  enthalten. Da die Menge aller  $\alpha_\beta$  abzählbar ist, gibt es eine Zahl  $\alpha_0$ , die kleiner als  $\omega_1$  und größer als  $\alpha_\beta$  ist. Somit sind alle Punkte  $(\alpha, \beta), \alpha > \alpha_0, n \leq \beta < \omega$  in  $G$  und alle Punkte  $(\alpha, \omega), \alpha > \alpha_0$  in  $\bar{G}$  enthalten, w. z. b. w.

Ein regulärer Raum ist (vermöge des Satzes II) dann und nur dann vollständig regulär, wenn er in einen bikompakten Raum eingebettet werden kann. Da jeder bikompakte Raum regulär ist, so folgt aus dem soeben

Gesagten, daß ein nicht bikompakter regulärer Raum, der in bezug auf reguläre Punkte abgeschlossen ist, sicher nicht vollständig regulär ist. Bevor wir einen solchen Raum konstruieren, machen wir die folgende

Behauptung II. Wenn  $\dot{G}$  ein die Mengen

$$X_{\alpha_0} = \left\{ \begin{array}{l} (\alpha, \omega) \\ \alpha_0 < \alpha < \omega_1 \end{array} \right\}, \quad Y_{n_0} = \left\{ \begin{array}{l} (\omega_1, \beta) \\ n_0 < \beta < \omega \end{array} \right\}$$

enthaltendes Gebiet in  $\dot{S}$  ist, so ist  $\dot{S} - \dot{G}$  (als Relativraum in  $\dot{S}$  betrachtet) bikompakt.

In der Tat ist

$$\dot{S} - \dot{G} = S - G$$

(wobei  $G = \dot{G} + (\omega_1, \omega)$  ist), woraus unsere Behauptung folgt.

Es sei jetzt  $R^*$  ein topologischer Raum, der dadurch entsteht, daß man die Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Exemplaren

$$\dot{S}^1, \dot{S}^2, \dots, \dot{S}^k, \dots$$

von  $\dot{S}$  betrachtet. Wir bezeichnen die Punkte von  $\dot{S}^k$  durch  $(\alpha, \beta)^k$ , die Mengen  $X_\alpha$  und  $Y_n$  von  $\dot{S}^k$  durch  $X_\alpha^k$  bzw.  $Y_n^k$  usw. Man betrachte ferner die stetige Zerlegung<sup>9)</sup> von  $R^*$  in (höchstens aus zwei Punkten bestehende) Mengen  $X$ , wobei

$$\begin{aligned} X \text{ entweder ein Punkt } (\alpha, \beta)^k, \quad \alpha \neq \omega_1, \beta \neq \omega \text{ von } R \\ \text{oder ein Punktepaar } [(\omega_1, \beta)^{2n-1}, (\omega_1, \beta)^{2n}], \quad n = 1, 2, \dots \\ \text{oder ein Punktepaar } [(\alpha, \omega)^{2n}, (\alpha, \omega)^{2n+1}], \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

ist. Der durch diese Zerlegung induzierte Raum ist, wie leicht ersichtlich, ein regulärer Raum  $R^{*10}$ ). Jedem Punkte  $(\alpha, \beta)^k$  von  $R^*$  entspricht ein Punkt  $(\alpha, \beta)^{*k}$  von  $\dot{R}^*$ , ebenso entsprechen die Teilmengen  $\dot{S}^k$  bzw.  $X_\alpha^k$  bzw.  $Y_n^k$  von  $R^*$  Teilmengen  $\dot{S}^{*k}$  bzw.  $X_\alpha^{*k}$  bzw.  $Y_n^{*k}$  von  $\dot{R}^*$ .

Wir konstruieren endlich einen Raum'

$$R = \dot{R}^* + \xi$$

dadurch, daß wir einen neuen Punkt  $\xi$  mittels der Umgebungserklärung

$$U_m(\xi) = \xi + \left( \dot{R}^* - \sum_{k=1}^m \dot{S}^{*k} \right) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

einführen. Man zeigt ohne Schwierigkeit, daß  $R$  ein regulärer Raum ist.

Ich behaupte, daß  $R$  in bezug auf alle regulären Punkte abgeschlossen ist.

<sup>9)</sup> Alexandroff, Math. Annalen 96 (1926), S. 557 (§ 4).

<sup>10)</sup> Man könnte sagen, daß  $\dot{R}^*$  aus  $R^*$  dadurch entsteht, daß man in  $R^*$  die Punkte  $(\omega_1, \beta)^{2n-1}$  bzw.  $(\alpha, \omega)^{2n}$  mit  $(\omega_1, \beta)^{2n}$  bzw.  $(\alpha, \omega)^{2n+1}$  identifiziert.

Um dies zu beweisen machen wir die folgende

Behauptung III. Es sei  $G$  ein Teilgebiet von  $\dot{S}$ , welches die Menge  $X_{\alpha_0}$  enthält; es gibt dann eine natürliche Zahl  $n_0$  von der Eigenschaft, daß  $\bar{G}$  alle Punkte  $(\omega_1, \beta)$ ,  $n_0 \leq \beta < \omega$  (d. h. die Menge  $Y_{n_0}$ , enthält.

Es existiert in der Tat für jedes  $x = (\alpha, \omega)$ ,  $\alpha > \alpha_0$ , eine  $U_{\alpha, n_\alpha}(x) \subset G$ ; infolgedessen sind alle  $(\alpha, \beta)$ ,  $n_\alpha < \beta < \omega$ , in  $G$  enthalten; da es nur abzählbar viele verschiedene  $n_\alpha$  gibt, gibt es ein  $n_0 < \omega$ , so daß für abzählbar viele  $\alpha$  alle  $(\alpha, \beta)$ ,  $n_0 < \beta < \omega$ , in  $G$  enthalten sind; dann sind aber alle  $(\omega_1, \beta)$ ,  $n_0 < \beta < \omega$ , in  $\bar{G}$  enthalten.

Es sei jetzt

$$R + \eta$$

ein regulärer Raum. Dann gibt es zwei Umgebungen  $U(\xi) = U_N(\xi)$  und  $V(\eta)$ , so daß

$$\overline{U(\xi)} \cdot \overline{V(\eta)} = 0$$

ist; wir dürfen dabei stets voraussetzen, daß  $N$  gerade ist. Man konstruiere ferner

$$\bar{V}_1(\eta) \subset V(\eta), \dots, \overline{V_{m+1}(\eta)} \subset V_m(\eta), \dots \quad (m = 1, 2, \dots)$$

und setze

$$G_n = R - \overline{V_n(\eta)}.$$

Dann ist

$$(0) \quad \bar{G}_n \subset R - V_n(\eta) \subset R - \overline{V_{n+1}(\eta)} \subset G_{n+1}.$$

Außerdem ist

$$(1) \quad G_1 \supset U_N(\xi) \supset \sum_{k=N+1}^{\infty} \dot{S}^{*k},$$

so daß

$$V(\eta) \subset \sum_{k=1}^N \dot{S}^{*k} + \eta$$

ist.

Aus (1) folgt weiter, daß

$$G_1 \supset X^{*N+1},$$

also auf Grund der Behauptung III existiert ein  $n_1$ , so daß

$$\bar{G}_1 \supset Y_{n_1}^{*N+1} = Y_{n_1}^{*N}$$

und also (vermöge (0))

$$G_2 \supset Y_{n_1}^{*N}.$$

Aus der Behauptung I folgt sodann, daß es ein  $\alpha_2$  gibt, so daß

$$G_3 \supset \bar{G}_2 \supset X_{\alpha_2}^{*N} = X_{\alpha_2}^{*N-1}.$$

Daraus folgt weiter (nach Behauptung III), daß

$$G_4 \supset \bar{G}_3 \supset Y_{n_2}^{*N-1} = Y_{n_2}^{*N-2},$$

was (nach Behauptung I)

$$G_5 > \bar{G}_4 > X_{\alpha_4}^{*N-2}$$

ergibt.

Eine wiederholte Anwendung der beiden Behauptungen I und III schließt mit

$$G_{N+2} > Y_{\alpha_N}^{*1} + X_{\alpha_{N+1}}^{*1}.$$

Nun ist

$$V_{N+2} \subset R - G_{N+2}.$$

Da aber  $G_{N+2}$  sämtliche  $X_{\alpha_{N-k}}^{*k}$  und  $Y_{\alpha_{N-k}}^{*k}$   $k \leq N$  und sämtliche  $\dot{S}^{*m}$   $m > N+1$  enthält, so ist  $V_{N+2}(\eta)$  in einer nach Bemerkung II bikompakten Teilmenge von  $R^*$  enthalten, was aber nur dann möglich<sup>11)</sup> ist, wenn  $\eta$  in  $V_{N+2}$  und somit in  $R + \eta$  isoliert ist; damit ist die Abgeschlossenheit von  $R^*$  in bezug auf reguläre Punkte bewiesen.

Es sei hierzu noch bemerkt, daß durch das soeben konstruierte Beispiel eine von Alexandroff und Urysohn (a. a. O. S. 266) gestellte Frage, ob jeder reguläre nicht absolut abgeschlossene Raum sich zu einem ebenfalls regulären Raum durch Hinzufügung eines nicht isolierten Punktes erweitern läßt, eine volle (und zwar negative) Antwort erhalten hat.

## § 5.

### Beweis des Satzes III.

Der Beweis des Satzes III beruht auf der Betrachtung von Zerlegungen<sup>12)</sup> der Räume  $R_i$  in zueinander fremde abgeschlossene Mengen: es wird sich nämlich zeigen, daß die absolut abgeschlossenen Räume, deren Existenz im Satze III behauptet wird, durch Zerlegungen der Räume  $R_i$  bestimmt werden. Bei der Untersuchung dieser Zerlegungen werden wir folgende von Alexandroff a. a. O. bewiesene Tatsache benutzen: ein durch eine Zerlegung eines bikompakten Raumes  $R$  bestimmter Raum  $R^*$  ist ein topologischer Raum; wenn  $R$  eine Basis von einer Mächtigkeit  $\leq m$  besitzt, so gilt dasselbe auch für  $R^*$ .<sup>13)</sup>

Es sei  $R$  ein topologischer Raum mit einer Basis  $\mathfrak{B}$  von der Mächtigkeit  $\leq \tau$ . Der Satz III wird bewiesen sein, wenn wir gezeigt haben werden, daß es eine Zerlegung von  $R_i$  gibt, die einen absolut abgeschlossenen

<sup>11)</sup> Alexandroff und Urysohn, S. 263, Satz V.

<sup>12)</sup> Im Sinne von Alexandroff, Math. Annalen 96 (1926), § 3 (S. 556—557). Es sei hier ausdrücklich erwähnt, daß wir (der Alexandroffschen Definition entsprechend) beliebige allgemeine und nicht notwendig etwa stetige Zerlegungen betrachten.

<sup>13)</sup> Bei Alexandroff ist diese Behauptung explizite nur für stetige Zerlegungen und  $m = \aleph_0$  (S. 262, Satz V und § 13) bewiesen. Der Beweis gilt aber wörtlich auch in unserem allgemeinen Falle.

Raum bestimmt, welcher eine dem Raume  $R$  homöomorphe Teilmenge enthält. Wir gehen jetzt zum Beweise letzterer Behauptung über.

Es sei  $X_\alpha$  eine auf der Einheitsstrecke liegende abgeschlossene Menge. Im folgenden werden wir die Mengen  $X = \{X_1, X_2, \dots, X_\alpha, \dots\}$  des Raumes  $R_x$  betrachten, die aus allen Punkten  $x = \{t_1, t_2, \dots, t_\alpha, \dots\}$  bestehen, für die  $t_\alpha < X_\alpha$  ist. Die Mengen  $X$  sind abgeschlossen. In der Tat, wenn  $x_0 = \{t_1^0, t_2^0, \dots, t_\alpha^0, \dots\}$  nicht zu  $X$  gehört, so ist wenigstens für ein  $\alpha$

$$\varrho(t_\alpha^0, X_\alpha) = \delta > 0$$

(die Entfernung auf  $J_\alpha$  gemessen). Dann enthält aber seine, durch die Bedingung  $t_\alpha < S\left(t_\alpha^0, \frac{\delta}{2}\right)$  bestimmte Umgebung keinen Punkt der Menge  $X$ ;  $x_0$  ist somit kein Häufungspunkt von  $X$ .

Jetzt wollen wir diejenigen Mengen  $X$ , die als Zerlegungseinheiten von  $R_x$  auftreten sollen, definieren. Zu diesem Zwecke bestimmen wir für ein beliebiges Gebiet  $G$  des Raumes  $R$  zwei Funktionen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  durch die Vorschrift

$$\varphi_G(X) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < \bar{G} \\ 1 & \text{falls } x < G; \end{cases} \quad \psi_G(X) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < G \\ 1 & \text{falls } x < R - G. \end{cases}$$

Für jeden Punkt des Raumes ist  $\varphi_G(x) \leq \psi_G(x)$ . Man sieht auch leicht, daß, wenn  $\varphi_G(x_0) = \psi_G(x)$  ist, eine Umgebung  $U(x_0)$  des Punktes  $x_0$  existiert, für deren jeden Punkt  $y < U(x_0)$

$$\varphi_G(y) = \psi_G(y) = \varphi_G(x_0) = \psi_G(x_0)$$

ist.

Es seien

$$U_1, U_2, \dots, U_\alpha, \dots \quad (\alpha < \omega^{(\alpha)})$$

die Elemente der Basis  $\mathfrak{B}$  des Raumes  $R$ . Einfachheitshalber setzen wir

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi_{U_\alpha}(x) \quad \text{und} \quad \psi_\alpha(x) = \psi_{U_\alpha}(x).$$

Es sei ferner  $X_\alpha(x)$  die Gesamtheit aller der Bedingung  $\varphi_\alpha(x) \leq t \leq \psi_\alpha(x)$  genügender reeller Zahlen und

$$X(x) = \{X_1(x), X_2(x), \dots, X_\alpha(x), \dots\}.$$

Wenn  $x$  und  $y$  verschiedene Punkte von  $R$  sind, so gibt es eine  $U_\alpha$  so, daß  $x < U_\alpha$ ,  $y < R - \bar{U}_\alpha$ , woraus folgt, daß  $X(x)$  und  $X(y)$  zueinander fremd sind.

Wenn die Vereinigungsmenge  $\mathcal{E}$  der (für alle Punkte  $x$  von  $R$ ) bestimmten  $X(x)$  nicht mit dem ganzen Raum  $R_x$  identisch ist, betrachten wir alle Punkte von  $R - \mathcal{E}$  als neue Zerlegungseinheiten, so daß schließlich der ganze Raum  $R_x$  in zueinander fremde abgeschlossene Mengen zerlegt wird:  $R_x = \sum X$ . Diese Zerlegung ist durch den Raum  $R$  allein ein-

deutig bestimmt und soll deshalb als die Zerlegung  $\zeta(R_\tau, R)$  bezeichnet werden. Der durch  $\zeta(R_\tau, R)$  bestimmte Raum soll  $R_\tau^R$  heißen. Die Zerlegung  $\zeta(R_\tau, R)$  induziert aber auch eine, im allgemeinen unstetige Abbildung von  $R_\tau$  auf  $R_\tau^R$ , die wir durch  $\varphi$  bezeichnen werden:  $R_\tau^R = \varphi(R_\tau)$ . Die Punkte von  $R_\tau^R$  werden wir durch  $x^*$  bezeichnen. Da jedem Punkte  $x \in R$  eine Menge  $X$ , d. h. ein Punkt  $x^* = f(x)$  zugeordnet ist, sind wir im Besitze einer eindeutigen Abbildung  $x^* = f(x)$  des Raumes  $R$  auf eine (echte oder unechte) Teilmenge  $R^*$  von  $R_\tau^R$ . Wir werden zeigen, daß diese Abbildung eine Homöomorphie ist. Dazu brauchen wir aber eine bequeme Basis des Raumes  $R_\tau^R$ .

Es sei  $G_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{n_1 n_2 \dots n_k}(x_0)$  die Gesamtheit aller Punkte  $x = \{t_1, t_2, \dots, t_\alpha, \dots\}$  von  $R_\tau$ , für die  $t_{\alpha_i} \in S\left(X_{\alpha_i}(x_0), \frac{1}{n_i}\right)$  ist.  $G_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{n_1 n_2 \dots n_k}$  ist ein Gebiet. Es sei ferner  $V_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{n_1 n_2 \dots n_k}(x_0^*)$  die Gesamtheit aller  $x^*$ , die, als Mengen  $X$  betrachtet, in  $G_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{n_1 n_2 \dots n_k}$  liegen. Ich behaupte, daß die  $V_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{n_1 n_2 \dots n_k}$  eine Basis bilden. Um es einzusehen, genügt es zu zeigen, daß man für jedes Gebiet  $G \supset X_0$  ein Gebiet  $G_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{n_1 n_2 \dots n_k}(x_0)$  finden kann von der Eigenschaft, daß

$$(1) \quad X_0 \subset G_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{n_1 n_2 \dots n_k} \subset G$$

ist.

Um dieses  $G_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{n_1 n_2 \dots n_k}$  zu konstruieren, wähle man für jeden Punkt  $x \in X_0$  eine  $U_{\alpha_1^x, \alpha_2^x, \dots, \alpha_k^x}^{2m_1^x, 2m_2^x, \dots, 2m_k^x}(x)$ , wobei die  $\alpha_1^x, \alpha_2^x, \dots, \alpha_k^x, m_1^x, m_2^x, \dots, m_k^x$  durch die Bedingung

$$U_{\alpha_1^x, \alpha_2^x, \dots, \alpha_k^x}^{2m_1^x, 2m_2^x, \dots, 2m_k^x}(x) \subset G$$

bestimmt sind. Auf diese Weise entsteht eine Überdeckung der abgeschlossenen Teilmenge  $X_0$  von  $R_\tau$ ; nach dem Borel-Lebesgueschen Satze kann man diese Überdeckung durch eine endliche Teilüberdeckung ersetzen. Es seien  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  alle bei den Elementen dieser Überdeckung auftretenden untere Indizes und  $2m_i$  der größte unter den zu  $\alpha_i$  gehörenden oberen Indizes. Dann ist

$$G_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}^{2m_1, 2m_2, \dots, 2m_k} \subset G.$$

Es sei in der Tat  $\xi = \{t_1, t_2, \dots, t_\alpha, \dots\}$  irgendein Punkt von  $G_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}^{2m_1, 2m_2, \dots, 2m_k}$ . Es ist  $|t_\alpha - t_{\alpha_i}^0| < \frac{1}{2m_i}$ , wobei

$$x_0 = \{t_1^0, t_2^0, \dots, t_\alpha^0, \dots\}$$

ein Punkt von  $X_0$  ist; nun ist aber  $x_0$  in einer bestimmten  $U_{\alpha_1^x, \alpha_2^x, \dots, \alpha_k^x}^{2m_1^x, 2m_2^x, \dots, 2m_k^x}(x)$  mit  $x = \{t_1^x, t_2^x, \dots, t_\alpha^x, \dots\}$  enthalten. Alle  $\alpha_1^x, \alpha_2^x, \dots, \alpha_k^x$  kommen unter den  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  vor und es ist

$$|t_{\alpha_i^x}^x - t_{\alpha_i^x}^0| \leq |t_{\alpha_i^x}^x - t_{\alpha_i^x}^0| + |t_{\alpha_i^x}^0 - t_{\alpha_i^x}^0| < 2 \cdot \frac{1}{2m_i^x} = \frac{1}{m_i^x}.$$

Daraus folgt, daß die Koordinaten von  $\xi$  allen die Umgebung  $U_{\alpha_1^z, \alpha_2^z, \dots, \alpha_k^z}^{m_1^z, m_2^z, \dots, m_k^z}(x)$  bestimmenden Bedingungen genügen und also

$$\xi \in U_{\alpha_1^z, \alpha_2^z, \dots, \alpha_k^z}^{m_1^z, m_2^z, \dots, m_k^z} \subset G$$

ist.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die eineindeutige Abbildung

$$R^* = f(R)$$

in beiden Richtungen stetig ist.

Der Beweis vollzieht sich in zwei Schritten.

I. Es sei  $U(x_0^*) = V_{\alpha_1^{n_1}, \alpha_2^{n_2}, \dots, \alpha_k^{n_k}}(x_0^*)$  beliebig gegeben. Man betrachte ein  $X_{\alpha_i}(x_0)$ . Wenn  $\varphi_{\alpha_i}(x_0) = \psi_{\alpha_i}(x_0)$  ist, so gibt es (wie bei der Definition der Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  erwähnt wurde) eine  $U(x_0)$  in  $R$  — nennen wir sie  $W_{\alpha_i}$  — derart, daß für sämtliche  $x \in W_{\alpha_i}(x_0)$

$$\varphi_{\alpha_i}(x) = \psi_{\alpha_i}(x) = \varphi_{\alpha_i}(x_0) = \psi_{\alpha_i}(x_0)$$

ist, es ist m. a. W.

$$X_{\alpha_i}(x) = X_{\alpha_i}(x_0)$$

und also um so mehr

$$X_{\alpha_i}(x) \in S\left(X_{\alpha_i}(x_0); \frac{1}{n_i}\right)$$

für alle  $x \in W_{\alpha_i}(x_0)$ .

Wenn aber  $X_{\alpha_i}(x_0)$  die ganze Einheitsstrecke ist, so ist für jeden Punkt  $x \in R$

$$X_{\alpha_i}(x) \in S\left(X_{\alpha_i}(x_0); \frac{1}{n_i}\right)$$

und wir setzen dementsprechend  $W_{\alpha_i}(x_0) = R$ .

Es sei jetzt  $U(x_0)$  eine im Gebiete

$$W_{\alpha_1}(x_0) \cdot W_{\alpha_2}(x_0) \cdot \dots \cdot W_{\alpha_k}(x_0)$$

enthaltene Umgebung; offenbar ist dann für jeden Punkt  $x \in U(x_0)$  und jedes  $i = 1, 2, \dots, k$

$$X_{\alpha_i}(x) \in S\left(X_{\alpha_i}(x_0); \frac{1}{n_i}\right);$$

diese Tatsache bedeutet aber gerade, daß

$$f(x) \in V_{\alpha_1^{n_1}, \alpha_2^{n_2}, \dots, \alpha_k^{n_k}}(x_0^*),$$

sobald  $x \in U(x_0)$ .

II. Es sei eine beliebige  $U(x_0) = U_\alpha$  gegeben; um die Stetigkeit der Umkehrfunktion  $f^{-1}(x^*)$  zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß für jeden Punkt  $x^*$  von  $R^*$ , der in  $V_\alpha^2(x_0^*)$  liegt,  $f^{-1}(x^*) \in U_\alpha$  ist. Nun ist aber  $\varphi_\alpha(x_0) = \psi_\alpha(x_0) = 0$ , also besteht  $X_\alpha(x_0)$  aus dem einzigen Punkte 0. Wenn  $f^{-1}(x^*) = x \in R - U_\alpha$  wäre, wäre  $\psi_\alpha(x) = 1$ , also könnte auch  $x^*$  definitionsgemäß nicht zu  $V_\alpha^2(x_0^*)$  gehören.

Die Homöomorphie zwischen  $R$  und  $R^*$  ist hiermit bewiesen. Da  $R^* \subset R_\tau^R$  ist, haben wir noch zu zeigen, daß  $R_\tau^R$  ein absolut abgeschlossener Raum ist. Dazu brauchen wir aber folgende zwei Bemerkungen zu machen:

1. Es gibt für jeden Punkt  $x_0 = \{t_1^0, t_2^0, \dots, t_\alpha^0, \dots\}$  von  $R_\tau$  abzählbare Punktmengen  $A$ , die zu diesem Punkte konvergieren, und zwar solche, daß unter den Koordinaten der Punkte von  $A$  weder 0 noch 1 vorkommt. Wir brauchen in der Tat z. B. die Punktmenge  $x_n = \{t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \dots, t_\alpha^{(n)}, \dots\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) zu nehmen mit  $t_\alpha^n = t_\alpha^0 - \frac{t_\alpha^0}{n+1}$ , falls  $t_\alpha^0 \neq 0$  und  $t_\alpha^{(n)} = \frac{1}{n+1}$ , falls  $t_\alpha^0 = 0$ . Von einer solchen Folge sagen wir, sie konvergiere regelmäßig gegen  $x_0$ .

Sind alle Koordinaten eines Punktes  $x_0$  von 0 und 1 verschieden, so ist  $x_0 \in R - \Xi$  und somit ist  $\varphi(x_0) = x_0$ ; wenn  $x_n$  regelmäßig gegen  $x_0$  konvergiert, so konvergiert auch  $\varphi(x_n)$  gegen  $\varphi(x_0)$  (weil ja auch  $\varphi_n(x_n) = x_n$  ist).

2. Die den Raum  $R_\tau^R$  bestimmende Zerlegung von  $R_\tau$  ist im allgemeinen nicht stetig<sup>14</sup>). Es kann also vorkommen, daß für eine Umgebung  $U(x_0^*)$  in  $R_\tau^R$  die Menge  $\varphi^{-1}(U)$  die Menge  $X_0 = \varphi^{-1}(x_0^*)$  nicht im Innern enthält; dagegen existiert ein Teilgebiet  $G$  von  $R_\tau$ , von der Eigenschaft, daß

$$\varphi^{-1}(\overline{U(x_0^*)}) \supset G \supset X_0$$

ausfällt. Es genügt in der Tat, für  $G$  das der Definition von  $U(x_0^*)$  zugrunde gelegte Gebiet<sup>15</sup>) zu wählen. Es sei  $x$  ein beliebiger Punkt von  $G$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  eine gegen  $x$  regelmäßig konvergierende Folge. Da  $\varphi(x_n) = x_n$  ist, so ist  $\varphi(x_n) \in U(x_0^*)$ , also  $\varphi(x) \in \overline{U(x_0^*)}$ .

Um jetzt die absolute Abgeschlossenheit des Raumes  $R_\tau^R$  zu beweisen, genügt es nach einem Satze von Alexandroff und Urysohn<sup>16</sup>) zu zeigen, daß man aus jedem den Raum  $R_\tau^R$  überdeckenden System von Umgebungen  $\{U\}$  ein endliches Teilsystem  $U_1, U_2, \dots, U_N$  so wählen kann, daß

$$\overline{U_1} + \overline{U_2} + \dots + \overline{U_N} = R_\tau^R$$

ist. Man betrachte zu diesem Zwecke die der Definition von  $\{U\}$  zugrunde gelegten<sup>17</sup>) Gebiete  $G$  in  $R_\tau$ . Da  $R_\tau$  bikompakt ist und die  $\{G\}$  eine

<sup>14</sup>) Aus dem Satze II und dem unter<sup>13</sup>) zitierten Satz von Alexandroff folgt vielmehr, daß unsere Zerlegung nur dann stetig sein kann, wenn der gegebene Raum regulär ist.

<sup>15</sup>) Alexandroff, a. a. O. § 3, S. 537.

<sup>16</sup>) Alexandroff und Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Annalen 92 (1924), S. 262, Satz II.

<sup>17</sup>) Alexandroff a. a. O. § 3, S. 537.

Überdeckung von  $R_r$  bilden, lassen sich endlichviele unter den  $\{G\}$  — etwa  $G_1, G_2, \dots, G_N$  — so wählen, daß

$$G_1 + G_2 + \dots + G_N = R_r$$

ist. Dann ist

$$\varphi(G_1) + \varphi(G_2) + \dots + \varphi(G_N) = R_r^R;$$

nach dem soeben Bewiesenen ist aber  $\varphi(G) < \bar{U}$ , so daß

$$\bar{U}_1 + \bar{U}_2 + \dots + \bar{U}_N$$

erst recht den ganzen Raum  $R_r^R$  ausfüllt.

Dadurch ist die absolute Abgeschlossenheit von  $R_r^R$  und mithin auch der Satz III vollständig bewiesen.

Ich möchte hervorheben, daß die von Alexandroff und Urysohn seit langem gestellte Frage, *ob jeder topologische Raum als überalldichte Teilmenge eines absolut abgeschlossenen Raumes betrachtet werden kann*, durch den soeben bewiesenen Satz keine Antwort erhalten hat<sup>18)</sup>, da man nicht weiß, ob die Menge  $\bar{R}^* < R_r^R$ , als Raum betrachtet, absolut abgeschlossen ist. Auch die Frage, ob man alle topologischen Räume, die Basen von der Mächtigkeit  $\tau$  besitzen, in *einen und denselben absolut abgeschlossenen Raum einbetten kann*, bleibt unentschieden.

---

<sup>18)</sup> Eine abgeschlossene Teilmenge eines absolut abgeschlossenen Raumes braucht nicht (wie elementare Beispiele zeigen) absolut abgeschlossen zu sein (siehe Alexandroff und Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verh. Kon. Ak. Amsterdam, Deel XIV, No. 1 (1929)).

(Eingegangen am 6. 1. 1929.)