SIMON, U.
Math. Annalen 173, 307—321 (1967)

Minkowskische Integralformeln und ihre Anwendungen in der Differentialgeometrie im Großen*

UDO SIMON

Die klassischen Minkowskischen Integralformeln für geschlossene konvexe Flächen im euklidischen Raum E^3 sind in vieler Hinsicht verallgemeinert worden: wohl zuerst von T. KUBOTA ([12], [13]) für Eihyperflächen im E^n, danach von W. SÜSS [18] relativgeometrisch. Für Hyperflächen in Riemannschen Räumen konstanter Krümmung wurden Minkowskiformeln von FEEMAN und HSIUNG [8] aufgestellt. Schließlich bewies W. SCHERRER [15] auch für berandete Flächen im E^3 Minkowskiformeln und verwandte Integralformeln für Krümmungsgrößen und Stützabstand. Entsprechende äquiaffine Integralformeln stammen von K. P. GROTEMEYER [9].

In dieser Arbeit werden allgemeine Minkowskiformeln der relativen Geometrie für berandete Flächen bewiesen, die die von KUBOTA, SÜSS, SCHERRER und GROTEMEYER enthalten (§ 4). Im Anschluß daran geben wir eine einfache Methode an zur Aufstellung weiterer Integralformeln (§ 5), mit deren Hilfe man insbesondere Sphären innerhalb der Relativgeometrie durch Krümmungsgrößen und Stützabstand kennzeichnen kann (§ 6). Die in § 5 aufgezeigte und in § 6 angewandte Methode erlaubt z. T. auch neue Beweise bekannter Aleksandrovscher Sätze ([2] und [3], insbesondere S. 397ff.). § 8 bringt weitere Kennzeichnungen der Kugel in der euklidischen Geometrie.

§ 1. Grundformeln der relativen Geometrie[1]

R^{n+1} sei der $(n+1)$-dimensionale affine Raum. Das „äußere Produkt" der n Vektoren $a_1, \ldots, a_n$ ist ein Kovektor

$$a = [a_1, \ldots, a_n]\,; \tag{1.1}$$

er wird durch die für alle Vektoren x gültige Gleichung

$$\langle x, a\rangle = |x, a_1, \ldots, a_n| \tag{1.2}$$

definiert; dabei sei $\langle x, a\rangle$ das „skalare Produkt" von Vektor und Kovektor und $|x, a_1, \ldots, a_n|$ die Determinante mit den angegebenen Vektoren als Spalten. Es seien $x(u^i)$ und $y(u^i)$ zwei auf gleiche lokale Parameter u^i $(i=1,\ldots,n)$ bezogene

* Die vorliegende Arbeit stellt im wesentlichen das erste Kapitel der von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Freien Universität Berlin genehmigten Dissertation [17] dar.

[1] Vgl. etwa [16], Kapitel 8.

orientierte Hyperflächenstücke der Differenzierbarkeitsklasse C^4; das durch $x(u^i)$ dargestellte Hyperflächenstück F sei nicht Torse, d. h. für die Determinante $l = \|l_{ik}\|$ mit den Komponenten[2]

$$l_{ik} = |x_{|i|k}, x_{|1}, \ldots, x_{|n}| \tag{1.3}$$

gelte $l \neq 0$. Außerdem enthalte die Tangentialebene von $x(u^i)$ nicht den Koordinatenursprung; es sei also $|x, x_{|1}, \ldots, x_{|n}| \neq 0$.

$x(u^i)$ werde durch $y(u^i)$ relativ normalisiert, d. h. die Tangentialräume an $x(u^i)$ und $y(u^i)$ seien in entsprechenden Punkten parallel. $y(u^i)$ wird dann auch als Eichfläche von $x(u^i)$ bezeichnet. In allen Punkten von $x(u^i)$ gelte schließlich noch

$$W = |y, x_{|1}, \ldots, x_{|n}| \neq 0 . \tag{1.4}$$

Der Kovektor ξ, der die Tangentialräume festlegt, wird durch

$$\langle \xi, x_{|i} \rangle = 0 \tag{1.5}$$

und

$$\langle \xi, y \rangle = 1 \tag{1.6}$$

eindeutig bestimmt. Wegen der relativen Normalisierung gilt

$$\langle \xi, y_{|i} \rangle = 0 \tag{1.7}$$

und damit wegen (1.6)

$$\langle \xi_{|i}, y \rangle = 0 . \tag{1.8}$$

Für ξ gilt die Darstellung

$$\xi = W^{-1} \cdot [x_{|1}, \ldots, x_{|n}] . \tag{1.9}$$

Durch

$$G_{ik} = \langle x_{|i|k}, \xi \rangle \tag{1.10}$$

wird auf F eine Riemannsche Metrik eingeführt. Mit $l = \|l_{ik}\| \neq 0$ ist auch $G = \|G_{ik}\| \neq 0$. Aus (1.5) folgt

$$G_{ik} = -\langle x_{|i}, \xi_{|k} \rangle . \tag{1.11}$$

Auf den Maßtensor G_{ik} beziehen wir wie üblich die Prozesse der kovarianten Differentiation und die des Hebens und Senkens von Indices. Durch

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_n} = |G|^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sign}(i_1 \ldots i_n) \tag{1.12}$$

wird der Diskriminantentensor von RICCI definiert, analog

$$\varepsilon^{i_1 \ldots i_n} = |G|^{-\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{sign}(i_1 \ldots i_n) ; \tag{1.13}$$

[2] Dabei bezeichnen $x_{|i}$ bzw. $x_{|i|k}$ die ersten bzw. zweiten partiellen Ableitungen nach den lokalen Parametern u^i:

$$x_{|i} = \frac{\partial x}{\partial u^i} \quad \text{und} \quad x_{|i|k} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^k} ;$$

im Unterschied hierzu kennzeichnen wir später die auftretende kovariante Differentiation durch $x_{|i||k}, x_{|i||k||l}, \ldots$

dabei sei $\operatorname{sign}(i_1 \dots i_n)$ erklärt durch

$$\operatorname{sign}(i_1 \dots i_n) = \begin{cases} 1 & \text{für eine gerade Permutation } (i_1 \dots i_n) \text{ der Zahlen } (1 \dots n) \\ -1 & \text{für eine ungerade Permutation} \\ 0, \text{ falls } i_k = i_m & \text{für } k \neq m \,. \end{cases}$$

Man verifiziert leicht

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} \varepsilon^{i_1 \dots i_k}{}_{j_{k+1} \dots j_n} = k! \cdot \sum_\sigma G_{j_{k+1}\sigma(i_{k+1})} \dots G_{j_n \sigma(i_n)} \cdot \operatorname{sign}(\sigma) \,. \tag{1.14}$$

Summiert wird über alle Permutationen σ, die $(i_1 \dots i_k)$ fest lassen. Entsprechend gilt:

$$\varepsilon_{i_1 \dots i_n} \varepsilon^{i_1 \dots i_k j_{k+1} \dots j_n} = k! \cdot \sum_\sigma \delta^{j_{k+1}}_{\sigma(i_{k+1})} \dots \delta^{j_n}_{\sigma(i_n)} \cdot \operatorname{sign}(\sigma) \,. \tag{1.15}$$

δ^i_k ist das Kroneckersymbol. Weiterhin ist

$$Q \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_n} \cdot \xi = [x_{|i_1}, \dots, x_{|i_n}] \tag{1.16}$$

mit

$$Q = W \cdot |G|^{-\frac{1}{2}} \neq 0 \,. \tag{1.17}$$

(1.16) und (1.6) ergeben

$$Q \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_n} = |y, x_{|i_1}, \dots, x_{|i_n}| \,. \tag{1.18}$$

Durch einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten erhält man die Beziehung

$$Q \cdot \varepsilon_{i_1 \dots i_{r-1} \overset{k}{\cdot} i_{r+1} \dots i_n} \cdot \xi_{|k} (-1)^{r-1} = [y, x_{|i_1}, \dots, x_{|i_{r-1}}, x_{|i_{r+1}}, \dots, x_{|i_n}] \,. \tag{1.19}$$

Die Tensoren

$$\begin{aligned} B_{ik} &= \langle y_{|i||k}, \xi \rangle \\ &= -\langle y_{|i}, \xi_{|k} \rangle = \langle y, \xi_{|i||k} \rangle \end{aligned} \tag{1.20}$$ [3]

und

$$\begin{aligned} A_{ikl} &= \langle x_{|i||k||l}, \xi \rangle \\ &= -\langle x_{|i||k}, \xi_{|l} \rangle = \langle x_{|i}, \xi_{|k||l} \rangle \end{aligned} \tag{1.21}$$ [4]

sind symmetrisch. A_{ikl} ist der Tensor der kubischen Grundform. Von den Ableitungsgleichungen benötigen wir lediglich

$$y_{|i} = B^{k}_{i.} \cdot x_{|k} \,. \tag{1.22}$$

Für den Relativabstand p des Ursprungs von der Hyperfläche $x(u^i)$ bezüglich der Eichhyperfläche $y(u^i)$ ergibt sich

$$p = \frac{|x, x_{|1}, \dots, x_{|n}|}{|y, x_{|1}, \dots, x_{|n}|} = \langle x, \xi \rangle \,. \tag{1.23}$$

Wegen (1.5) ist

$$p_{|i} = \langle x, \xi_{|i} \rangle \,. \tag{1.24}$$

[3] Wegen (1.7) und (1.8).

[4] Wegen (1.11) und $G_{ik||l} = 0$.

Ist $du^i \wedge du^k$ das alternierende Produkt der Differentiale du^i und du^k, so ist mit do als „relativem Flächenelement"

$$(1.25)\qquad Q \cdot du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_n} = \varepsilon^{i_1 \dots i_n} \cdot do\,.$$

Für ein orientierbares Hyperflächenstück F mit dem glatten Rand ∂F und eine in $F \cup \partial F$ stetige und in F stetig differenzierbare Differentialform ω vom Grad $(n-1)$ gilt schließlich noch der allgemeine Stokessche Satz

$$(1.26)\qquad \int_F d \wedge \omega = \int_{\partial F} \omega\,.$$

Dabei trägt der Rand ∂F die von F auf natürliche Weise induzierte Orientierung.

§ 2. Darstellungen der Krümmungsgrößen

Die Eigenwerte k_r $(r = 1, \dots, n)$ von

$$(2.1)\qquad \|B_{i.}^{\,j} + k \cdot G_{i.}^{\,j}\| = 0$$

werden als relative Hauptkrümmungen der Hyperfläche F bezeichnet; die normierte elementarsymmetrische Funktion H_r $(r = 1, \dots, n)$

$$(2.2)\qquad H_r = \binom{n}{r}^{-1} \cdot \sum_{1 \leqq i_1 < i_2 \cdots < i_r \leqq n} \prod_{j=1}^{r} k_{i_j}$$

heißt r-te Relativkrümmung; außerdem werde $H_0 = 1$ gesetzt.

$$(2.2\text{a})\qquad R_r = (-p)^r \cdot H_r$$

heiße reduzierte r-te Relativkrümmung $(r = 1, \dots, n)$; entsprechend sei $R_0 = 1$.

Lemma 2.1. *Für die r-te Relativkrümmung gilt die Darstellung*

$$(2.3)\qquad n! \cdot H_r = (-1)^r \cdot \varepsilon^{i_1 \dots i_n} \cdot \varepsilon_{j_1 \dots j_r i_{r+1} \dots i_n} \cdot B_{i_1.}^{\,j_1} \dots B_{i_r.}^{\,j_r}\,.$$

Beweis. S_r sei die r-te elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen k_j; C_r sei die Summe aller Hauptminoren r-ter Ordnung von $\|B_{i.}^{\,k}\|$. Dann gilt: $(-1)^r S_r = C_r$ [5]. Mit (1.15) und $H_r \cdot \binom{n}{r} = S_r$ folgt

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_n} \cdot \varepsilon_{j_1 \dots j_r i_{r+1} \dots i_n} \cdot B_{i_1.}^{\,j_1} \dots B_{i_r.}^{\,j_r} = n! \binom{n}{r}^{-1} \cdot C_r = n!(-1)^r H_r\,.$$

Damit gilt (2.3). —

Insbesondere ist also $H_1 = -\dfrac{1}{n} B_{j.}^{\,j}$ und $H_n = (-1)^n \dfrac{\|B_{ik}\|}{\|G_{ik}\|}$ [6]. Aus (2.3) ergibt sich mit (1.16) und (1.22)

$$(2.4)\qquad \varepsilon^{i_1 \dots i_n} \cdot [y_{|i_1}, \dots, y_{|i_r}, x_{|i_{r+1}}, \dots, x_{|i_n}] = n!(-1)^r H_r \cdot Q \cdot \xi\,.$$

---

[5] Vgl. MIRSKY [14], Theorem 7.1.3; dabei beachte man das Vorzeichen der durch (2.1) definierten Eigenwerte.

[6] Das Vorzeichen der Eigenwerte in (2.1) wurde wegen des konventionellen Vorzeichens von H_1 in der äquiaffinen Theorie festgesetzt; vgl. BLASCHKE [5], S. 170, (212).

Wegen der Schiefsymmetrie des Diskriminantentensors ist für $i_k \neq i_r$ $\varepsilon^{i_1\dots i_n} y_{|i_k||i_r} = 0$ und $\varepsilon^{i_1\dots i_n} x_{|i_k||i_r} = 0$, also gilt

$$(2.5)\qquad \varepsilon^{i_1\dots i_n}[y, y_{|i_2}, \dots, y_{|i_r}, x_{|i_{r+1}}, \dots, x_{|i_n}]_{||i_1} = n!Q(-1)^r H_r \cdot \xi\,.$$

Die für $r = 1, \dots, n$ durch

$$(2.6)\qquad n! \cdot D^{ij}_{(r)} = (-1)^{r-1} \cdot \varepsilon^{i i_2\dots i_n} \varepsilon^{j}_{\cdot j_2\dots j_r i_{r+1}\dots i_n} \cdot B_{i_2\cdot}^{\ j_2} \dots B_{i_r\cdot}^{\ j_r}$$

definierten Tensoren[7] eignen sich gut zur Aufstellung von Integralformeln. Es gelten nämlich wegen (2.3) die Beziehungen

$$(2.7)\quad D^{ij}_{(r)} G_{ij} = H_{r-1} \qquad \text{und} \qquad (2.8)\quad D^{ij}_{(r)} B_{ij} = -H_r\,.$$

Insbesondere ist

$$(2.9)\qquad n \cdot D^{ij}_{(1)} = G^{ij} \qquad \text{und für } n = 2\,.$$

$$(2.10)\qquad D^{ij}_{(2)} = -\tfrac{1}{2}\varepsilon^{ik}\varepsilon^{j}_{\cdot r} B_{k\cdot}^{\ r}\,.$$

Durch eine affine Parametertransformation lassen sich G_{ij} und B_{ij} in einem Punkt P auf die Form

$$(2.11\text{a})\qquad G_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \qquad B_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ -k_i & \text{für } i = j \end{cases}$$

transformieren. In diesem Koordinatensystem wird

$$(2.11\text{b})\qquad D^{ij}_{(r)} = \begin{cases} 0 \quad \text{für } i \neq j \\ \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial H_r}{\partial k_i} \quad \text{für } i = j\,. \end{cases}$$

Ist auf einem Flächenstück $k_i > 0$ für alle i, so ist wegen (2.11) B_{ij} negativ definit und $D^{ij}_{(r)}$ für alle $r = 1, \dots, n$ positiv definit. Schließlich ergibt ein Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten

$$(2.12)\qquad \varepsilon^{i i_2\dots i_n}[y, y_{|i_2}, \dots, y_{|i_r}, x_{|i_{r+1}}, \dots, x_{|i_n}] = (-1)^{r-1} \cdot D^{ij}_{(r)} \cdot \xi_{|j} \cdot n! \cdot Q\,,$$

also

$$(2.13)\qquad \varepsilon^{i i_2\dots i_n}|x, y, y_{|i_2}, \dots, y_{|i_r}, x_{|i_{r+1}}, \dots, x_{|i_n}| = Q \cdot n! \cdot (-1)^{r-1} D^{ij}_{(r)} \cdot p_{|j}\,.$$

§ 3. Ungleichungen für elementarsymmetrische Funktionen

k_r $(r = 1, \dots, n)$ seien n reelle Zahlen, S_j ihre elementarsymmetrischen Funktionen, $H_j = \binom{n}{j}^{-1} \cdot S_j$, $(j = 1, \dots, n)$, $H_0 = 1$.

Lemma 3.1. *Es sei* $0 < m \leqq s \leqq k < k + m \leqq n$; *$m, s, k$ seien ganz und es sei* $H_t > 0$ *für* $1 \leqq t \leqq k + m$. *Dann gilt*

$$(3.1)\qquad H_s H_k - H_{s-m} H_{k+m} \geqq 0\,.$$

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn gilt: $k_1 = k_2 = \dots = k_n$.

[7] Siehe auch (8.1).

Beweis. Für beliebige reelle k_r gilt $H_{k-1}H_{k+1} \leqq H_k^2$ (s. [4], S. 11, (6)); wegen $H_t > 0$ für $t \leqq k$ folgt

$$\frac{H_1}{H_0} \geqq \cdots \geqq \frac{H_s}{H_{s-1}} \geqq \cdots \geqq \frac{H_k}{H_{k-1}} \geqq \frac{H_{k+1}}{H_k}$$

und damit für $s \leqq k$: $H_s H_k \geqq H_{s-1} H_{k+1}$. Entsprechend gilt $H_{s-1}H_{k+1} \geqq \geqq H_{s-2}H_{k+2}, \ldots, H_{s-m+1}H_{k+m-1} \geqq H_{s-m}H_{k+m}$, woraus unmittelbar (3.1) folgt. Im Fall der Gleichheit ist notwendig $H_{k-1}H_{k+1} = H_k^2$, was $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$ nach sich zieht.

Lemma 3.2. *Es sei $1 \leqq s \leqq n$ und $H_t > 0$ für $1 \leqq t \leqq s$; dann gilt*

$$\text{(3.2a)} \qquad H_1 \geqq H_2^{\frac{1}{2}} \geqq \cdots \geqq H_s^{\frac{1}{s}}.$$

Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$.

Zum Beweis s. z. B. [4], S. 11; die dortige Voraussetzung $k_i > 0$ für alle i läßt sich für den l.c. angegebenen Beweis abschwächen zu der Voraussetzung von Lemma 3.2. Zum Beweis der Ungleichung

$$\text{(3.2b)} \qquad (H_{s-1})^{\frac{1}{s-1}} \geqq (H_s)^{\frac{1}{s}}$$

$(1 < s \leqq n)$ reicht sogar die Voraussetzung $H_t \neq 0$ für $1 \leqq t \leqq s-2$, $H_{s-1} > 0$, $H_s > 0$. Als einfache Folgerung von (3.2) ergibt sich

Lemma 3.3. *Sei $1 \leqq m \leqq n$; für $1 \leqq t \leqq m$ sei $H_t > 0$; sei für $1 \leqq r \leqq m$ und $1 \leqq m_i \leqq m$ $m = \sum_{i=1}^{r} m_i \leqq n$; dann gilt*

$$\text{(3.3)} \qquad \left(\prod_{i=1}^{r} H_{m_i} - H_m\right) \geqq 0\,;$$

das Gleichheitszeichen steht wieder genau in dem in Lemma 3.2 angegebenen Fall.

Unter der Voraussetzung $(-p) > 0$ gelten für die in (2.2a) definierten reduzierten Krümmungen $R_r = (-p)^r \cdot H_r$ entsprechende Ungleichungen.

§ 4. Relativgeometrische Minkowskiformeln

Satz 4.1. *Das orientierte berandete Hyperflächenstück $F \in C^4$ mit glattem Rand ∂F sei bezüglich der Eichhyperfläche G relativ normalisiert. Es sei $g = g(u^i)$ eine stetig differenzierbare Ortsfunktion (oder Vektorfunktion) auf $F \cup \partial F$. Dann gilt*

$$\text{(4.1)} \qquad \int_F H_r(\xi, g)\, do = \int_F D_{(r)}^{ij}(\xi_{|j}, g_{|i})\, do - \int_{\partial F} \omega_{(r)}$$

mit

$$\text{(4.2)} \qquad n! \cdot \omega_{(r)} = (-1)^{r-1} \cdot g \cdot [y, y_{|i_2}, \ldots, y_{|i_r}, x_{|i_{r+1}}, \ldots, x_{|i_n}]\, du^{i_2} \wedge \cdots \wedge du^{i_n}.$$

Ist g eine skalare Ortsfunktion, so ist (4.1) eine vektorielle Integralformel, ebenso für den Fall, daß (ξ, g) und $(\xi_{|j}, g_{|i})$ äußere Produkte sind (vgl. z. B. (8.9)); ist g Vektorfunktion auf $F \cup \partial F$, so sind (ξ, g) und $(\xi_{|j}, g_{|i})$ innere Produkte.

Beweis von (4.1). Multipliziert man (2.5) mit g, so folgt

$$\{\varepsilon^{i_1 \dots i_n} g[y, y_{|i_2}, \dots, y_{|i_r}, x_{|i_{r+1}}, \dots, x_{|i_n}]\}_{\|i_1} - \{\varepsilon^{i_1 \dots i_n} g_{|i_1}[y, \dots, x_{|i_n}]\} = n! \cdot Q(-1)^r H_r(\xi, g).$$

Integriert man, so läßt sich der erste Term links mit dem Stokesschen Satz in ein Randintegral umformen und man erhält unter Beachtung von (2.12) die Integralformel (4.1).

Wegen (2.7) ergibt (4.1) mit $g = f \cdot x$, $f = f(u^i)$, $f \in C^1$, eine Erweiterung der bekannten *Minkowskiformeln* (s. Einleitung)

$$\int_F (H_r \cdot p + H_{r-1}) f\, do = \int_F D^{ij}_{(r)} p_{|j} \cdot f_{|i}\, do - \int_{\partial F} \omega_{(r)}\,; \tag{4.3}$$

$\omega_{(r)}$ ist wieder (4.2) mit $g = f \cdot x$ zu entnehmen. Setzt man in (4.3) $f = -(-p)^{r-1} \cdot h$, $h = h(u^i)$, $h \in C^1$, so folgt mit (2.2a) durch Summation

$$\begin{aligned}\int_F (R_k - R_m) \cdot h\, do = \int_F h \sum_{r=m+1}^{k} D^{ij}_{(r)} p_{|i} p_{|j} (r-1)(-p)^{r-2}\, do \,- \\ - \int_F \sum_{r=m+1}^{k} D^{ij}_{(r)} h_{|i} p_{|j} (-p)^{r-1}\, do - \int_{\partial F} \sum_{r=m+1}^{k} \omega_{(r)}\end{aligned} \tag{4.4}$$

für $0 \leqq m < k \leqq n$.

§ 5. Integralformeln zur Kennzeichnung von Sphären

Die Minkowskiformeln (4.3) und die Ungleichungen aus § 3 erlauben ein einfaches Verfahren zur Aufstellung von Integralformeln, die wir in § 6 zur Kennzeichnung von Sphären durch Krümmungen und Stützabstand heranziehen werden. Der methodische Aufbau der Integralformeln aus Identitäten läßt sich leicht bei der Herleitung der folgenden Integralformeln verfolgen.

Es sei F ein Flächenstück mit Rand ∂F, das den Voraussetzungen von Satz 4.1 genügt; dann gelten für F die Integralsätze (5.1), (5.2) und (5.3).

Integriert man die Identität

$$f(H_s H_{k-1} - H_{s-1} H_k) = f H_s \cdot (p \cdot H_k + H_{k-1}) - f \cdot H_k \cdot (H_s p + H_{s-1}),$$

so erhält man für $0 < s < k \leqq n$ mit $f = f(u^i)$, $f \in C^1$, unter Beachtung von (4.3) die Integralformel

$$\begin{aligned}\int_F (H_s H_{k-1} - H_{s-1} H_k) \cdot f\, do = \int_F D^{ij}_{(k)} p_{|i} (f \cdot H_s)_{|j}\, do \,- \\ - \int_F D^{ij}_{(s)} p_{|i} \cdot (f \cdot H_k)_{|j}\, do + \int_{\partial F} (\omega_{(s)} - \omega_{(k)})\,;\end{aligned} \tag{5.1}$$

wieder ist $\omega_{(r)}$ (4.2) mit $g = f \cdot H_r \cdot x$ zu entnehmen. Als Ergänzung zu (5.1) ergibt sich für $0 \leqq s < k < n$ aus der Identität

$$f(H_{s+1} H_k - H_{k+1} H_s) \cdot p = (f \cdot H_k)(H_{s+1} \cdot p + H_s) - (f \cdot H_s)(p \cdot H_{k+1} + H_k)$$

die Integralformel

$$\begin{aligned}\int_F (H_{s+1} H_k - H_{k+1} H_s)(-p) f\, do = \int_F D^{ij}_{(k+1)} p_{|i} (f H_s)_{|j}\, do \,- \\ - \int_F D^{ij}_{(s+1)} p_{|i} (f H_k)_{|j}\, do + \int_{\partial F} (\omega_{(s+1)} - \omega_{(k+1)}).\end{aligned} \tag{5.2}$$

Entsprechend leitet man aus der Identität

$$\left(H_{r-1}-(H_r)^{\frac{r-1}{r}}\right)\cdot f = f\cdot p\cdot\left(H_1-(H_r)^{\frac{1}{r}}\right)\cdot(H_r)^{\frac{r-1}{r}} + \\ +(pH_r+H_{r-1})f-(1+H_1p)\cdot(H_r)^{\frac{r-1}{r}}\cdot f$$

die Integralformel

$$(5.3)\quad \int_F\left(H_{r-1}-(H_r)^{\frac{r-1}{r}}\right)f\,do = \int_F\left(H_1-(H_r)^{\frac{1}{r}}\right)\cdot f\cdot p\cdot(H_r)^{\frac{r-1}{r}}\,do + \\ +\int_F D^{ij}_{(r)}p_{|i}f_{|j}\,do - \int_F D^{ij}_{(1)}p_{|i}\left(f\cdot(H_r)^{\frac{r-1}{r}}\right)_{|j}do + \int_{\partial F}(\omega_{(1)}-\omega_{(r)})$$

ab, wobei $\omega_{(k)}$ wieder mit $g=f\cdot(H_k)^{\frac{k-1}{k}}\cdot x$ der Formel (4.2) zu entnehmen ist.

§ 6. Kennzeichnungen von Sphären

Als Anwendung der Integralsätze aus § 5 wollen wir im Rahmen der Relativgeometrie Sphären durch Krümmungsgrößen und Relativabstand kennzeichnen. Wir werden uns dabei auf geschlossene Flächen beschränken; es ist unmittelbar klar, daß man unter geeigneten Randbedingungen auch Sätze für berandete Flächen beweisen kann; ein Beispiel dafür bietet Satz 8.1. Bei geeigneter Wahl der Eichfläche erhält man als Spezialfälle der relativgeometrischen Sätze dieses Paragraphen Kennzeichnungen der n-dimensionalen Kugel in der euklidischen Geometrie und Kennzeichnungen der eigentlichen Affinsphären in der äquiaffinen Geometrie von BLASCHKE; die Charakterisierung der Affinsphären ergibt gleichzeitig eine Charakterisierung der Ellipsoide in der äquiaffinen Geometrie; es gilt nämlich der folgende Satz von BLASCHKE und DEICKE [7]: „Jede affinsphärische Eifläche im R^{n+1} ist ein Ellipsoid".

Auf die Kennzeichnungen der Kugel gehen wir in § 8 noch näher ein.

Für die Anwendungen der Formeln aus § 5 definieren wir die folgenden Flächenklassen $\mathfrak{H}_k$ $(k=1,\ldots,n)$; für $E\in\mathfrak{H}_k$ gelte:

(6.A) $E\in C^5$ sei geschlossen,

(6.B) $D^{ij}_{(r)}$ sei positiv definit für $r=1,\ldots,k$,

(6.C) $H_r>0$ für $r=1,\ldots,k$.

Häufig betrachten wir auch die Flächenklassen $\mathfrak{H}_k(p)$ $(k=1,\ldots,n)$, für die zusätzlich gilt:

(6.D) $p<0$.

(6.B) und (6.C) sind sicher dann erfüllt, wenn für alle $i=1,\ldots,n$ gilt: $k_i>0$. Liegt der Koordinatenursprung innerhalb von E und innerhalb der zugehörigen Eichfläche G, so hängt das Vorzeichen von p von der Richtung von ξ und damit von der Wahl der Normalisierung durch $y(u^i)$ ab. Wegen (2.9) und (6.B) ist G^{ij} positiv definit.

Um zu zeigen, daß ein Flächenstück relativsphärisch ist, werden wir stets eine der folgenden Bedingungen (a) oder (b) nachweisen:

(a) jeder Punkt ist Relativnabel, d. h. es gilt $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$;

(b) es ist $p = \text{const.}$

Im Fall (a) braucht man z. B. nur zu zeigen, daß in jedem Punkt für eine der Beziehungen (3.1), (3.2), (3.3) stets die Gleichheit gilt.

Satz 6.1.[8] *Sei* $1 \leqq k \leqq n$; *gilt auf* $E \in \mathfrak{H}_k(p)$ *die Relation* $H_k = G(p)$ *mit* $G \in C^1$ *und* $\dfrac{dG}{dp} = G' \geqq 0$, *so ist E Sphäre.*

Beweis. I. Sei $1 \leqq k \leqq n-1$; setzt man in (5.2) $s=0$, $f = \text{const.}$, so folgt mit $(H_k)_{|j} = G' \cdot p_{|j}$

$$\int (H_1 H_k - H_{k+1})(-p)\, do = \int \left(-\frac{1}{n}\right) G^{ij} p_{|i} p_{|j} \cdot G' \, do\,;$$

wegen (3.1) und (6.D) ist der linke Integrand nicht negativ, und wegen (6.B) und $G' \geqq 0$ ist der rechte Integrand nicht positiv. Dann gilt aber $H_1 H_k - H_{k+1} = 0$ und damit Satz 6.1 für $k \leqq n-1$.

II. Sei $k = n$ (der Beweis gilt für $2 \leqq k \leqq n$); jetzt benutzen wir (5.3) mit

$$f = \text{const} \quad \text{und} \quad \left((H_k)^{\frac{k-1}{k}}\right)_{|j} = \frac{k-1}{k} (H_k)^{\frac{-1}{k}} \cdot G' \cdot p_{|j}:$$

$$\int \left(H_{k-1} - (H_k)^{\frac{k-1}{k}}\right) do = \int \left(H_1 - (H_k)^{\frac{1}{k}}\right) p (H_k)^{\frac{k-1}{k}} \, do + \\ + \int \frac{1-k}{n \cdot k} \cdot G^{ij} p_{|i} p_{|j} \cdot (H_k)^{\frac{-1}{k}} \cdot G' \, do\,;$$

wegen (3.2), (6.D) und $G' \geqq 0$ schließen wir wie in I auf $H_1 - (H_k)^{\frac{1}{k}} = 0$, d. h. E ist Sphäre.

Als Spezialfälle erhalten wir die folgenden Aussagen:

Korollar 6.2.[9] *Es sei* $1 \leqq k \leqq n$ *und auf* $E \in \mathfrak{H}_k(p)$ *gelte* $H_k = \text{const.}$; *dann ist E Sphäre.*

Korollar 6.3.[10] *Es sei* $1 \leqq k \leqq n$; *auf* $E \in \mathfrak{H}_k(p)$ *gelte* $R_k = \text{const.} = c$; *dann ist* $c = 1$ *und E ist Sphäre.*

Beweis. Mit $H_k = c(-p)^{-k} = G(p)$ wird $G' = k \cdot c(-p)^{-(k+1)}$, also $G' \geqq 0$; die Aussage über die Konstante folgt dann etwa aus (4.4) für $m = 0$.

Satz 6.4. *Es sei* $1 \leqq s < k \leqq n$. *Gilt auf* $E \in \mathfrak{H}_k$

$$\frac{H_k}{H_s} = G(p),\ G \in C^1,\ G' \geqq 0\,,$$

so ist E Sphäre.

---

[8] Siehe z. B. Grotemeyer [11], Satz 2; dabei beachte man das Vorzeichen in der Definition des Stützabstands.

[9] Siehe Süss [18].

[10] Siehe Aeppli [1], Grotemeyer [10].

Beweis. Wegen $E \in \mathfrak{H}_k$ ist $H_s > 0$ und $D^{ij}_{(s)}$ positiv definit. Setzt man in (5.1) $f = \frac{1}{H_s}$, so folgt mit (3.1) wieder $H_s H_{k-1} = H_{s-1} H_k$.

Korollar 6.5. *Gilt auf* $E \in \mathfrak{H}_k$ *die Relation* $H_k = c \cdot H_s$, $c = \text{const.}$, *so ist* E *Sphäre.*

Korollar 6.6. *Gilt auf* $E \in \mathfrak{H}_k(p)$ *die Relation* $R_k = c \cdot R_s$, $c = \text{const.}$, *so ist* E *Sphäre.*

Die Sätze 6.1 bis 6.4 lassen sich in allgemeinerer Form aussprechen; so kann man in Satz 6.1 durch Summation der Integralformeln Relationen der Form $\sum_{r=1}^{n-1} f_r \cdot H_r = G(p)$ betrachten mit $f_r = f_r(p) \geqq 0$, $f_r \in C^1$ und $f'_r \leqq 0$, falls mindestens für ein r, $1 \leqq r \leqq n-1$, die Nullstellen von f_r nirgends dicht auf E liegen. Eine ganz entsprechende Kennzeichnung der Sphäre innerhalb der Flächenklasse $\mathfrak{H}_n(p)$ erhält man für $0 < s < n$ durch die Relation

$$\frac{1}{H_s} \cdot \sum_{r=1}^{n-s} f_r H_{s+r} + \frac{1}{H_{s-1}} \cdot \sum_{r=1}^{n-s} g_r H_{s-1+r} = G(p)$$

mit $G \in C^1$, $G' \geqq 0$ und $f_r + g_r = h_r(p)$, $h_r \in C^1$, $h'_r \leqq 0$; $r = 1, \ldots, n-s$. Den Nachweis der letzten Behauptung führt man (nach geeigneter Umnumerierung) durch Zusammenfassen der Integralformeln (5.1) und (5.2).

In [19] zeigte SÜSS, daß Hypersphären durch

$$R_k = R_m \quad (n \geqq k > m \geqq 0)$$

gekennzeichnet werden. Dieses Ergebnis ist in Korollar 6.6 enthalten. Wir wollen das Resultat von SÜSS noch in anderer Hinsicht verallgemeinern:

Satz 6.7. *Es sei* $0 \leqq m < k \leqq n$. *Auf* $E \in \mathfrak{H}_k(p)$ *gelte eine der folgenden Relationen*

(a) $$R_k \geqq R_m$$

(b) $$R_k \leqq R_m.$$

Dann ist E Sphäre und in (a) und (b) gilt das Gleichheitszeichen.

Beweis. Aus (4.4) folgt mit $h = (-p)^{-s}$

$$\int (R_k - R_m)(-p)^{-s}\, do = \int \sum_{r=m+1}^{k} D^{ij}_{(r)} p_{|i} p_{|j} (r-s-1)(-p)^{r-s-2}\, do.$$

Im Fall (a) wählen wir z. B. $s = n$, im Fall (b) $s = 0$ und schließen wie üblich. Mit $R_k = R_m$ ist aber alles bewiesen.

Da in Satz 6.7 der Fall $m = 0$ zugelassen ist, ergibt sich sofort das folgende Korollar:

Korollar 6.8. *Auf* $E \in \mathfrak{H}_k(p)$ *gibt es für jedes* s *mit* $1 \leqq s \leqq k$ *stets Punkte, in denen* $R_s = 1$ *gilt.*

Satz 6.9. *Es sei* $0 \leqq m, k \leqq n$ *und* $0 \leqq m_i \leqq m$ *für* $i = 1, \ldots, t, t \geqq 1$; *sei* $\sum_{i=1}^{t} m_i = m$. *Auf* $E \in \mathfrak{H}_n(p)$ *gelte*

$$\prod_{i=1}^{t} R_{m_i} \leqq R_k .$$

Dann ist E Sphäre.

Beweis. Der Fall $k = m$ ist wegen (3.3) trivial. Sei etwa $k > m$. Durch Integration der Identität

$$\left(\prod_{i=1}^{t} R_{m_i} - R_m\right)(-p)^{-s} = \left(\prod_{i=1}^{t} R_{m_i} - R_k\right)(-p)^{-s} + (R_k - R_m)(-p)^{-s}$$

erhält man mit (4.4)

$$\int \left(\prod_{i=1}^{t} R_{m_i} - R_m\right)(-p)^{-s}\, do = \int \left(\prod_{i=1}^{t} R_{m_i} - R_k\right)(-p)^{-s}\, do +$$
$$+ \int \sum_{r=m+1}^{k} D^{ij}_{(r)} p_{|i} p_{|j} (r - s - 1)(-p)^{r-s-2}\, do .$$

Wählt man z. B. $s = n$, so ist die rechte Seite nach Voraussetzung, nach (6.B) und (6.D) nicht positiv, die linke Seite nach (3.3) nicht negativ. Der linke Integrand verschwindet also überall auf E; damit haben wir alles bewiesen, falls $k > m$; im Fall $m > k$ geht man von der gleichen Identität mit $s = 0$ aus und wendet wieder (4.4) an.

Satz 6.9 ist eine Erweiterung von Satz 6.7, da $k > m$ und $k < m$ möglich ist. Übrigens müssen die m_i nicht notwendig verschieden sein; ebenso ist $k = 0$ und $m = 0$ möglich:

Korollar 6.10. *Sei auf* $E \in \mathfrak{H}_m(p)$ *für* $0 \leqq m_i \leqq m \leqq n$, $m = \sum_{i=1}^{t} m_i$,

$$\prod_{i=1}^{t} R_{m_i} \leqq 1 ;$$

dann ist E Sphäre.

Für $m = 0$ erhält man – wie in Satz 6.7a – die Sphären kennzeichnende Ungleichung $1 \leqq R_k$ aus Satz 6.9 ($0 < k \leqq n$).

Es ist nun leicht, nach dem Verfahren der Sätze 6.7 – 6.9 weitere kennzeichnende Ungleichungen für Sphären anzugeben und zu beweisen. Ein Beispiel ist die Ungleichung

$$R_s R_k - R_j R_{k+m} \leqq 0$$

für $0 < m \leqq s \leqq k < k + m \leqq n$ und jedes j mit $0 \leqq j \leqq n$. Weiterhin erhält man Verallgemeinerungen der Sätze 6.7 – 6.9 durch Summationsprozesse; wir wollen das am Beispiel von Satz 6.7 erläutern; ebenso hat man bei den anderen Aussagen zu verfahren.

Satz 6.11. *Es sei* $0 \leqq m_j < k_j \leqq n$; *sei* $a_j = a_j(p) \geqq 0$ *und* $a_j \in C^1$ $(j = 1, \ldots, r, r > 0)$. *Auf* $E \in \mathfrak{H}_n(p)$ *gelte*

(a) $$\sum_{j=1}^{r} a_j R_{k_j} \geqq \sum_{j=1}^{r} a_j R_{m_j}, \quad a_j' \geqq 0$$

oder

(b) $$\sum_{j=1}^{r} a_j R_{k_j} \leqq \sum_{j=1}^{r} a_j R_{m_j}, \quad a_j' \leqq 0;$$

dann ist E Sphäre.

Insbesondere sind die Fälle $m_j = 0$, d. h. $R_{m_j} = 1$, und $a_j = \text{const.}$ möglich. Dann hat man als einfachen Spezialfall von Satz 6.11 ein Analogon zu einem Satz von Voss (s. [20], Satz VII, S. 210):

Korollar 6.12. *Gilt auf* $E \in \mathfrak{H}_n(p)$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot R_j = \text{const.} \quad \textit{mit} \quad a_j = \text{const.} \geqq 0,$$

so ist E Sphäre.

Zu 6.11 und 6.12 ähnliche Sätze findet man bei AEPPLI [1].

§ 7. Ein Beispiel

Die Frage, ob die Sätze 6.1 und 6.4 entsprechend für Funktionen $G = G(p)$, $G \in C^1$, $G' < 0$, gelten, ist zu verneinen. Ein bekanntes und oft herangezogenes Beispiel dafür ist das Rotationsellipsoid im E^3, auf dem

$$H_1 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left((-p) + \beta \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} (-p)^3\right) \quad \text{und} \quad H_2 = \alpha(-p)^4$$

mit Konstanten $\alpha > 0$, $\beta > 0$ gilt[11]. Also bestehen auf dem Rotationsellipsoid die Relationen

$$H_2 = \alpha(-p)^4 = G_1(p) > 0 \quad \text{mit} \quad G_1'(p) < 0$$

und

$$\frac{H_2}{H_1} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot (-p) \cdot ((-p)^{-2} \alpha^{-\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}})^{-1} = G_2(p) > 0 \quad \text{mit} \quad G_2'(p) < 0\,.$$

§ 8. Kennzeichnungen der Kugel im E^{n+1}

Seien g_{ij} und b_{ij} die Fundamentaltensoren erster und zweiter Art eines Hyperflächenstücks F der Klasse C^3 im E^{n+1} mit dem Ortsvektor $x(u^i)$ und der Flächennormalen ξ; $p = \langle x, \xi \rangle$ sei der Stützabstand, k_i seien die Hauptkrümmungen und H_i die Krümmungen $(i = 1, \ldots, n)$; $\varepsilon_{i_1 \ldots i_n}$ sei der Riccitensor und es sei für $k = 1, \ldots, n$[12]

(8.1) $$n! \cdot c_{(k)}^{ij} = \varepsilon^{i i_2 \ldots i_n} \cdot \varepsilon^{j}_{\cdot j_2 \ldots j_k i_{k+1} \ldots i_n} \cdot b_{i_2}{}^{j_2} \ldots b_{i_k}{}^{j_k};$$

[11] Siehe CHERN [6] und GROTEMEYER [11] (beachte Fußnote 8).
[12] Vgl. Voss [20], S. 187, (1.14).

für $k=1$ ist

(8.2) $$c^{ij}_{(1)} = \frac{1}{n} g^{ij};$$

es gelten die Relationen

(8.3) $$n! \cdot H_r = \varepsilon^{i_1 \dots i_n} \varepsilon_{j_1 \dots j_r i_{r+1} \dots i_n} \cdot b_{i_1}{}^{j_1} \dots b_{i_r}{}^{j_r},$$

(8.4) $$c^{ij}_{(r)} g_{ij} = H_{r-1},$$

(8.5) $$c^{ij}_{(r)} b_{ij} = H_r.$$

Ist der Rand ∂F von F glatt, so gilt entsprechend zu (4.1) mit $g = g(u^i)$, $g \in C^1$:

(8.6) $$\int_F H_k(\xi, g)\, do + \int_F c^{ij}_{(k)}(x_{|j}, g_{|i})\, do + \int_{\partial F} \omega_{(k)} = 0;$$

dabei ist

(8.7) $$n! \cdot \omega_{(k)} = (-1)^{k+1} g \cdot [\xi, \xi_{|i_2}, \dots, \xi_{|i_k}, x_{|i_{k+1}}, \dots, x_{|i_n}]\, du^{i_2} \wedge \dots \wedge du^{i_n}.$$

Wie im Anschluß an (4.1) ist zu bemerken, daß (8.6) für eine Ortsfunktion g wieder eine vektorielle Integralformel darstellt; nach entsprechender Bildung eines äußeren Produkts gewinnt man weitere vektorielle Integralformeln; so erhält man beispielsweise im Fall $n=2$ mit dem von SCHERRER ([15], S. 106, (13)) eingeführten Stützvektor

(8.8) $$\eta = [x, \xi]$$

wegen $c^{ij}_{(k)}[x_{|i}, x_{|j}] = c^{ij}_{(k)} \varepsilon_{ij} \cdot \xi = 0$ die vektoriellen Integralformeln

(8.9a) $$-\int_F H_1 \eta\, do = \frac{1}{2} \int_{\partial F} (r \mathring{r} \xi - p \mathring{x})\, dt$$

(8.9b) $$-\int_F H_2 \eta\, do = \frac{1}{2} \int_{\partial F} (-\mathring{p} \xi + p \mathring{\xi})\, dt;$$

dabei ist t der Parameter des Randes $\partial F: u^i = u^i(t)$; „$\circ$“ bezeichnet die Differentiation nach t.

Für geschlossene Flächen kann man (8.9) der Formel (8.6) mit $g = \text{const.}$ gegenüberstellen.

Wählt man insbesondere in (8.6) $g = f \cdot x$ mit $f = f(u^i)$, $f \in C^1$, so erhält man für ein beliebiges orientiertes Flächenstück $F \in C^3$ mit glattem Rand ∂F die *Minkowskiformeln der euklidischen Geometrie*

(8.10) $$\int_F (H_k p + H_{k-1}) f\, do = -\int_F c^{ij}_{(k)} \langle x, x_{|j} \rangle \cdot f_{|i}\, do - \int_{\partial F} \omega_{(k)}.$$

Bezeichnet man mit $r = +(\langle x, x \rangle)^{\frac{1}{2}}$ die Nullpunktsentfernung eines Flächenpunktes, so ergibt sich wegen der Weingartenschen Ableitungsgleichungen aus $p_{|i} = \langle x, \xi_{|i} \rangle$ die Relation

(8.11) $$p_{|i} = -b_{i.}^{\ j} \cdot \langle x, x_{|j} \rangle = -b_{i.}^{\ j} \cdot r \cdot r_{|j};$$

sei speziell $f = f(r, p)$, $f \in C^1$; (8.10) lautet mit $a^{ij}_{(k)} = c^{im}_{(k)} b_{m.}^{\ j}$ $(k = 1, \dots, n)$:

(8.12) $$\int_F (H_k p + H_{k-1}) \cdot f\, do = \int_F \left(\frac{\partial f}{\partial p} \cdot r^2 \cdot a^{ij}_{(k)} - \frac{\partial f}{\partial r} \cdot r \cdot c^{ij}_{(k)} \right) \cdot r_{|i} \cdot r_{|j}\, do - \int_{\partial F} \omega_{(k)}.$$

Unter der Voraussetzung, daß $a_{(k)}^{ij}$ und $c_{(k)}^{ij}$ positiv definit sind (das ist sicher dann der Fall, wenn b_{ij} positiv definit ist, d. h. für Eihyperflächen; für weitere Flächen vgl. VOSS [20], S. 209—210), kann man also im euklidischen Fall die Aussagen 6.1—6.6 erweitern: statt der Funktion $G = G(p)$ mit $\frac{dG}{dp} \geqq 0$ betrachten wir eine Funktion $G = G(p, r)$ mit $\frac{\partial G}{\partial p} \geqq 0$ und $\frac{\partial G}{\partial r} \leqq 0$. Außer den reduzierten Krümmungen $R_k = (-p)^k H_k$ sind entsprechende Krümmungsgrößen $S_k = r^\alpha(-p)^\beta H_k$ mit nicht negativen Zahlen α, β und $\alpha + \beta = k$ von Interesse; wir erhalten analog zu 6.3 und 6.6 Aussagen über die Krümmungsgrößen S_k.

Insbesondere im Fall $n = 2$ kann man zuweilen auf einige der (z. T. doch recht einschneidenden) Voraussetzungen, wie sie (6.B)—(6.D) im euklidischen Fall entsprechen, verzichten; wir wollen das folgende Beispiel, einen zu Satz 6.4 analogen Satz, gleich für berandete Flächen aussprechen:

Satz 8.1. *Das Flächenstück $F \in C^3$ im E^3 sei orientierbar und habe einen glatten Rand ∂F mit der Parameterdarstellung $u^i = u^i(t)$; auf $F \cup \partial F$ sei $H_1 > 0$*[13] *und auf F gelte*

$$\frac{H_2}{H_1} = G(r)$$

mit $G \in C^1$ und $G' = \frac{dG}{dr} \leqq 0$. Längs des Randes gelte

$\left\langle \eta, H_2 \cdot \frac{dx}{dt} + H_1 \cdot \frac{d\xi}{dt} \right\rangle \leqq 0$. Dann ist F Stück einer Kugel.

Beweis. Wir integrieren die Identität

$$\frac{1}{H_1}(H_1^2 - H_2) = (H_1 + H_2 p) - \frac{H_2}{H_1}(H_1 p + 1)$$

und erhalten mit (8.8) und (8.12)

$$\int_F (H_1^2 - H_2)\frac{1}{H_1} do = \frac{1}{2}\int_F g^{ij} r_{|i} r_{|j} G' \, do + \frac{1}{2}\int_{\partial F} \left\langle \eta, H_2 \cdot \frac{dx}{dt} + H_1 \cdot \frac{d\xi}{dt} \right\rangle \cdot \frac{1}{H_1} dt .$$

Jetzt schließen wir wie üblich.

Literatur

1. AEPPLI, A.: On the uniqueness of compact solutions for certain elliptic differential equations. Proc. Am. Math. Soc. **11**, 826—832 (1960).
2. ALEKSANDROV, A. D.: Uniqueness theorems for surfaces in the large III. Am. Math. Soc. Translations (2), **21**, 389—403 (1962). (Übersetzung aus Vestnik Leningrad. Univ. **13**, 1958, no. 7, S. 14—26.)
3. — and J. A. VOLKOV: Uniqueness theorems for surfaces in the large IV. Am. Math. Soc. Trans. (2), **21**, 403—411 (1962). (Übersetzung aus Vestnik Leningrad. Univ. **13**, 1958, no. 13, S. 27—34.)

[13] Unter den geschlossenen Flächen gibt es durchaus Flächen höheren Geschlechts mit $H_1 > 0$; ebenso gibt es entsprechende berandete Flächen.

4. Beckenbach, E. F., u. R. Bellmann: Inequalities. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1961.
5. Blaschke, W.: Differentialgeometrie II. 1. u. 2. Auflage. Berlin: Springer 1923.
6. Chern, S. S.: Some new characterizations of the Euclidean sphere. Duke Math. J. **12**, 279—290 (1945).
7. Deicke, A.: Über die Finslerräume mit $A_i = 0$. Arch. Math. **4**, 45—51 (1953).
8. Feeman, G. F., and C. C. Hsiung: Characterizations of Riemann n-spheres. Am. J. Math. **81**, 691—708 (1959).
9. Grotemeyer, K. P.: Die Integralsätze der affinen Flächentheorie. Arch. Math. **3**, 38—43 (1952).
10. — Eine kennzeichnende Eigenschaft der Affinsphären. Arch. Math. **3**, 307—310 (1952).
11. — Eine kennzeichnende Eigenschaft der Kugel. Arch. Math. **4**, 230—233 (1953).
12. Kubota, T.: Über die konvex-geschlossenen Mannigfaltigkeiten im n-dimensionalen Raum. Tôhoku Sci. Rep. Ser. I, 14, Nr. 1, S. 85—99 (1925).
13. — Über Eibereiche im n-dimensionalen Raum. Tôhoku Sci. Rep. Ser. I, Nr. 4, S. 399—402 (1925).
14. Mirsky, L.: An introduction to linear algebra. Oxford 1955.
15. Scherrer, W.: Integralsätze der Flächentheorie. Comm. Math. Helv. **19**, 105—114 (1946/47).
16. P. A. u. A. P. Schirokov: Affine Differentialgeometrie. Leipzig: Teubner 1962.
17. Simon, U.: Integralformeln zur Kennzeichnung von Hyperflächen durch Krümmungen und Stützabstand. Dissertation Freie Universität Berlin 1965.
18. Süss, W.: Zur relativen Differentialgeometrie V: Über Eihyperflächen im R^{n+1}. Tôhoku Math. J. **31**, 202—209 (1929).
19. — Über Kennzeichnungen der Kugeln und Affinsphären durch Herrn K. P. Grotemeyer. Arch. Math. **3**, 311—313 (1952).
20. Voss, K.: Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen. Math. Ann. **131**, 180—218 (1956).

Dr. Udo Simon
Institut für Geometrie an der Technischen Universität
1 Berlin 12, Hardenbergstr. 34

(Eingegangen am 1. April 1966)