Construction d'un modèle d'évolution de plaques avec terme d'inerte de rotation (*).

A. RAOULT (Paris, France)

Summary. – *In a previous work, we have shown how the asymptotic expansion method (with the thickness as the «small» parameter) applied to the linear Hellinger-Reissner evolution model for an elastic plate of* $\mathbb{R}^3$ *yields a justification of the classical evolution equation for the transverse displacement of a plate with thickness* $2e$

$$2\varrho e\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+\frac{2}{3}\frac{E}{1-\nu^2}e^3\Delta^2\zeta=\int_{-e}^{e}f_3\,.$$

Pursuing farther the analysis of the asymptotic expansion and considering in particular the first corrector, we are led here to the plate model

$$2\varrho e\frac{\partial^2\zeta}{dt^2}+\frac{2}{3}\frac{E}{1-\nu^2}e^3\Delta^2\zeta-\frac{34-14\nu}{15(1-\nu)}\varrho e^3\Delta\zeta''=\int_{-e}^{e}f_3\,.$$

Equations of the same form have been proposed notably by N. F. Morozov, G. Duvaut, J. L. Lions and are called equations with rotational inertia term. The applicability of such models is studied and sharp convergence estimates are given.

0. – Introduction.

MÉTHODE. – Le présent travail relève de la méthode introduite par P. G. CIARLET et PH. DESTUYNDER, par exemple, pour la justification de modèles de plaques en élasticité linéaire ou non-linéaire.

La méthode peut être rapidement décrite de la manière suivante:

(i) on considère une plaque, c'est-à-dire un corps cylindrique de $\mathbb{R}^3$ dont une dimension — l'épaisseur — est très faible devant les autres; on écrit pour une telle plaque, de surface moyenne ω, dépaisseur $2e$ et soumise à des forces extérieures le système tri-dimensionnel de l'élasticité linéaire sous forme variationnelle mixte, système dont la solution est le couple déplacements-contraintes, fonctions définies sur l'ouvert $\omega\times]-e,e[$;

(ii) par un changement de fonctions approprié (7), on remplace ce système par un problème équivalent posé sur l'ouvert de référence $\omega\times]-1,1[$; la forme

(*) Entrata in Redazione il 25 gennaio 1984.

même de ce nouveau problème (9)-(74-75), dans lequel différentes puissances de l'épaisseur apparaissent comme facteurs de termes qui en sont indépendants suggère un développement asymptotique de la solution en fonction de l'épaisseur;

(iii) une fois déterminés, si possible, les premiers termes du développement asymptotique, on les ramène par le changement de fonctions réciproque de celui de (ii) sur l'ouvert $\omega\times]-e, e[$; ils s'écrivent alors comme solutions d'équations aux dérivées partielles qui en fait sont, ou peuvent se ramener (cf. 3) à des équations posées sur ω. Il convient alors de comparer ces systèmes aux modèles usuels de plaques [6], [5], qui sont des modèles bidimensionnels, généralement obtenus par des hypothèses a priori sur la forme du couple déplacements-contraintes.

MISE EN OEUVRE. – Notons que la méthode ne peut être mise en oeuvre sans préliminaires précis: effectuer le développement asymptotique décrit en (ii) revient à considérer la plaque donnée d'épaisseur $2e$ comme appartenant à une «famille de plaques» d'épaisseurs 2ε tendant vers 0; il faut donc pour chacune de ces plaques définir les paramètres élastiques ou physiques comme, par exemple, la masse volumique cruciale dans les problèmes d'évolution (on pourra voir à ce sujet la discussion faite dans [8]), et préciser le système des forces appliquées.

Les difficultés rencontrées ensuite sont de deux natures:

a) les «difficultés de calcul»: une fois écrites formellement les équations que doivent satisfaire les termes d'ordre 0, 1 et éventuellement 2 du développement asymptotique, il faut en exhiber les solutions ce qui peut donner lieu à des calculs assez longs, comme par exemple, dans le cas du terme d'ordre 2 pour un problème d'évolution;

b) les «difficultés théoriques»: si l'on souhaite assortir les calculs formels de résultats de convergence vers les termes d'ordre 0, 1 ou 2, on est conduit à des démonstrations très techniques (en particulier dans le cas d'évolution) et qui, bien que suivant le schéma classique majorations a priori — convergence faible — convergence forte, ne peuvent être remplacées par aucun résultat standard. Signalons qu'à ce stade, les conditions aux limites imposées au déplacement jouent un rôle fondamental: PH DESTUYNDER [4] a montré qu'on ne peut effectuer un développement à l'ordre 2 pour une plaque encastrée et a étudié le problème de couche limite correspondant; pour nous, nous proposons en (13) et (14) d'autres choix de conditions aux limites qui, nous permettant le calcul d'un terme d'ordre 2, nous conduisent (voir 3.1.2) à une équation d'évolution avec terme d'inertie de rotation.

MODÈLES OBTENUS. – Rappelons que cette approche a permis

1) la justification du modèle bi-harmonique des plaques encastrées en élasticité linéaire [1] avec estimation de l'erreur au moyen de correcteurs [4] ainsi que l'obtention de résultats de convergence pour les problèmes de valeurs propres [2];

2) la justification formelle du modèle non linéaire de von KÁRMÁN [3];

3) la justification du modèle d'évolution bi-harmonique des plaques encastrées en élasticité linéaire [8] avec résultat de convergence.

Utilisée ici dans un cadre fonctionnel convenable, elle nous permet de construire un modèle d'évolution avec terme d'inertie de rotation qui, à notre connaissance, n'est pas le modèle classiquement obtenu par des hypothèses a priori sur la forme des déplacements et des contraintes.

PLAN. – Bien que nous nous intéressions ici principalement à un problème d'évolution, nous consacrons une première partie à l'étude du problème statique; nous y définissons le cadre fonctionnel et la plupart des notations; certains arguments sont omis parce qu'analogues à ceux de [8], ou bien parce que considérés comme des cas particuliers de ceux détaillés dans la deuxième partie qui traite du problème dynamique.

1. – Cas statique.

1.1. *Cadre fonctionnel. Problème de l'élasticité* (P^e). *Ecriture formelle du développement asymptotique: construction des problèmes* (P_0) *et* (P_2).

1.1.1. *Le problème tri-dimensionnel* (P^e). – Considérons une plaque élastique d'épaisseur $2e$, occupant dans son état non déformé le volume $\bar{\omega}\times[-e, e]$, de constantes de Poisson E et ν, et soumise à des forces volumiques $({}^e f_i)$. Le couple $({}^e\sigma, {}^e u)$ des contraintes et des déplacements est déterminé dans le cadre de l'élasticité linéaire par le système formé des équations aux dérivées partielles

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} -\partial_j {}^e\sigma_{ij} = {}^e f_i \quad \text{dans} \quad \omega\times]-e, e[\\ {}^e\sigma_{ij} = \dfrac{E}{1+\nu}\gamma_{ij}({}^e u) + \dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\gamma_{pp}({}^e u)\delta_{ij} \quad \text{où } \gamma_{ij}(u) = \dfrac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) \end{cases}$$

ainsi que de conditions aux limites destinées à traduire des conditions imposées au déplacement — par exemple, encastrement sur une partie de la frontière — ou l'action de forces extérieures telles que des forces surfaciques ou des forces de pression.

Un cas souvent étudié [1], [8] est celui de la plaque encastrée sur sa surface latérale et soumise à des forces $({}^e g_i)$ sur ses surfaces supérieure et inférieure; avec les notations

$$\text{(2)}\qquad \begin{cases} \Omega^e = \omega\times]-e, e[\,, \\ \gamma\colon \text{frontière de } \omega\,, \qquad \Gamma_0^e = \gamma\times[-e, e]\,, \\ \Gamma_+^e = \omega\times\{e\}\,, \qquad \Gamma_-^e = \omega\times\{-e\} \end{cases}$$

les conditions aux limites sont alors

$$(3)\qquad \begin{cases} {}^e u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^e , \\ {}^e\sigma_{i3} = {}^e g_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_+^e , \qquad {}^e\sigma_{i3} = -\,{}^e g_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_-^e . \end{cases}$$

Le problème (1)-(3) est formellement équivalent au problème variationnel mixte (4) ci-dessous, dit modèle d'Hellinger-Reissner.

$$(4)\qquad \begin{cases} \text{Trouver } ({}^e\sigma, {}^e u) \in \Sigma^e \times V^e \\ \forall \tau \in \Sigma^e , \qquad {}^e a({}^e\sigma, \tau) + {}^e B(\tau, {}^e u) = 0 \\ \forall v \in V^e , \qquad\qquad {}^e B({}^e\sigma, v) = -\int\limits_{\Omega^e} {}^e f_i v_i - \int\limits_{\Gamma_+^e \cup \Gamma_-^e} {}^e g_i v_i \end{cases}$$

où les espaces Σ^e, V^e, les formes bilinéaires ${}^e a$, ${}^e B$, sont donnés par

$$(5)\qquad \begin{cases} \Sigma^e = L^2(\Omega^e)^9_s = \{\tau = (\tau_{ij}) \in L^2(\Omega^e)^9;\ \forall (i,j),\ \tau_{ij} = \tau_{ji}\} \\ V^e = \{v \in (H^1(\Omega^e))^3;\ v|_{\Gamma_0^e} = 0\} \\ \forall (\sigma, \tau) \in \Sigma^e \times \Sigma^e , \qquad {}^e a(\sigma, \tau) = \int\limits_{\Omega^e} \left(\frac{1+\nu}{E}\, \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\, \sigma_{pp} \delta_{ij} \right) \tau_{ij} \\ \forall (\tau, v) \in \Sigma^e \times (H^1(\Omega^e))^3 , \qquad {}^e B(\tau, v) = -\int\limits_{\Omega^e} \tau_{ij} \gamma_{ij}(v) . \end{cases}$$

La formulation (4) se prête bien à l'utilisation de la *méthode des développements asymptotiques*. Montrons rapidement comment la mettre en oeuvre (pour plus de détails, on pourra consulter [1], [8]): on considère la plaque comme appartenant à une famille de plaques occupant dans leur état non déformé les volumes $\bar{\omega} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, et — pour simplifier — de mêmes coefficients de Poisson E et ν; ces plaques sont encastrées sur leur surface latérale et soumises à des forces de volume $({}^\varepsilon f_i)$ et à des forces de surface $({}^\varepsilon g_i)$; le couple contraintes-déplacements $({}^\varepsilon\sigma, {}^\varepsilon u)$ est donc, pour chacune des plaques, solution d'un problème du type (4) où e est remplcé par ε. Afin de pouvoir travailler sur la suite $({}^\varepsilon\sigma, {}^\varepsilon u)$, on la transforme par un changement de fonctions en une suite $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ de fonctions définies sur un ouvert Ω indépendant de ε; nous choisissons les notations et les transformations suivantes:

$$(6)\qquad \begin{cases} 1)\ \Omega = \omega \times]-1, 1[,\ \Gamma^+ = \omega \times \{1\},\ \Gamma^- = \omega \times \{-1\},\ \Gamma^0 = \gamma \times [-1, 1]; \\ 2)\ j\text{: homéomorphisme de } L^2(\Omega^\varepsilon) \text{ sur } L^2(\Omega) \text{ défini par} \\ \qquad \forall \varphi \in L^2(\Omega^\varepsilon) , \quad \text{pp } \Omega , \quad j(\varphi)(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, \varepsilon x_3) \\ 3)\ k\text{: homéomorphisme de } L^2(\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon) \text{ sur } L^2(\Gamma^+ \cup \Gamma^-) \text{ défini par} \\ \qquad \forall \psi \in L^2(\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon) , \quad \text{pp } \omega , \quad k(\psi)(x_1, x_2, \pm 1) = \psi(x_1, x_2, \pm\varepsilon); \end{cases}$$

et, les indices grecs décrivant $\{1, 2\}$, les indices latins décrivant $\{1, 2, 3\}$,

$$\left\{\begin{array}{lll} \sigma^{\varepsilon}_{\alpha\beta} = j({}^{\varepsilon}\sigma_{\alpha\beta})\,, & \sigma^{\varepsilon}_{\alpha 3} = \varepsilon^{-1} j({}^{\varepsilon}\sigma_{\alpha 3})\,, & \sigma^{\varepsilon}_{33} = \varepsilon^{-2} j({}^{\varepsilon}\sigma_{33}) \\ u^{\varepsilon}_{\alpha} = j({}^{\varepsilon}u_{\alpha})\,, & u^{\varepsilon}_{3} = \varepsilon j({}^{\varepsilon}u_{3})\,. & \end{array}\right. \tag{7}$$

On obtient alors par un simple calcul la proposition suivante

PROPOSITION 1. – *Si le système de forces* $({}^{\varepsilon}f_i, {}^{\varepsilon}g_i)$ *vérifie*

$$j({}^{\varepsilon}f_{\alpha}) = f^0_{\alpha}\,, \quad j({}^{\varepsilon}f_3) = \varepsilon f^0_3\,, \quad k({}^{\varepsilon}g_{\alpha}) = \varepsilon g^0_{\alpha} \quad k({}^{\varepsilon}g_3) = \varepsilon^2 g^0_3 \tag{8}$$

où $(f^0_i, g^0_i) \in (L^2(\Omega))^3 \times (L^2(\Gamma^+ \cup \Gamma^-))^3$, *alors l'élément* $(\sigma^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})$ *construit à partir de* $({}^{\varepsilon}\sigma, {}^{\varepsilon}u)$ *au moyen des formules* (7) *est l'unique solution du problème*

$$\left\{\begin{array}{ll} (\sigma^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}) \in \Sigma \times V & \\ \forall \tau \in \Sigma\,, & a^{\varepsilon}(\sigma^{\varepsilon}, \tau) + B(\tau, u^{\varepsilon}) = 0 \\ \forall v \in V\,, & B(\sigma^{\varepsilon}, v) = -(f^0_i, v_i) - \displaystyle\int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} g^0_i v_i \end{array}\right. \tag{9}$$

où

$$\Sigma = L^2(\Omega)^9_s = \{\tau = (\tau_{ij});\ \forall (i, j)\ \ \tau_{ij} = \tau_{ji}\}$$

$(\cdot,\cdot)$ (*resp.* $|\cdot|$) *désigne le produit scalaire* (*resp. la norme*) *sur* Σ

$$V = \{v \in (H^1(\Omega))^3;\ v|_{\Gamma_0} = 0\} \tag{10}$$

$$\forall (\sigma, \tau) \in \Sigma \times \Sigma\,, \qquad \begin{aligned} a^{\varepsilon}(\sigma, \tau) &= a_0(\sigma, \tau) + \varepsilon^2 a_2(\sigma, \tau) + \varepsilon^4 a_4(\sigma, \tau) \\ a_0(\sigma, \tau) &= \frac{1+\nu}{E}(\sigma_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha\beta}) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{\mu\mu}, \tau_{\mu\mu}) \\ a_2(\sigma, \tau) &= 2\,\frac{1+\nu}{E}(\sigma_{\alpha 3}, \tau_{\alpha 3}) - \frac{\nu}{E}\big((\sigma_{33}, \tau_{\mu\mu}) + (\sigma_{\mu\mu}, \tau_{33})\big) \\ a_4(\sigma, \tau) &= \frac{1}{E}(\sigma_{33}, \tau_{33}) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\forall (\tau, v) \in \Sigma \times (H^1(\Omega))^3\,, \qquad B(\tau, v) = -\big(\tau_{ij}, \gamma_{ij}(v)\big)\,. \tag{12}$$

La décomposition (11) de la forme a^{ε} suggère alors de poser pour $(\sigma^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})$ un développement asymptotique de la forme

$$(\sigma^{\varepsilon}, u^{\varepsilon}) = (\sigma^0, u^0) + \varepsilon^2(\sigma^2, u^2) + \dots\,,$$

(σ^0, u^0), (σ^2, u^2) ... devant être déterminés par identification des termes en ε^0, en ε^2 ... dans le système (9). La construction d'un tel développement et l'étude de sa validité ont fait l'objet de plusieurs travaux [1], [8]; signalons, en particulier, suivant [4], qu'il ne peut exister de terme d'ordre 2 (σ^2, u^2) avec u^2 réalisant les conditions aux limites d'encastrement, c'est-à-dire avec u^2 dans V; pour pallier cette difficulté PH. DESTUYNDER a fait une analyse de couche limite.

Pour nous, nous choisissons d'utiliser un nouveau cadre fonctionnel permettant le calcul d'un terme d'ordre 2. Ainsi proposons-nous de remplacer dans (9) l'espace V par l'un ou l'autre des espaces:

$$X = \left\{v \in (H^1(\Omega))^3;\ \left(\int_{-1}^{1} v_\alpha\, dx_3\right)\Big|_\gamma = 0,\ \left(\int_{-1}^{1} x_3 v_\alpha n_\alpha\, dx_3\right)\Big|_\gamma = 0,\ \left(\int_{-1}^{1}(1 - x_3^2) v_3\, dx_3\right)\Big|_\gamma = 0\right\} \tag{13}$$

$$T = \left\{v \in (H^1(\Omega))^3;\ \left(\int_{-1}^{1} v_\alpha\, dx_3\right)\Big|_\gamma = 0,\ \left(\int_{-1}^{1} x_3 v_\alpha \tau_\alpha\, dx_3\right)\Big|_\gamma = 0,\ \left(\int_{-1}^{1}(1 - x_3^2) v_3\, dx_3\right)\Big|_\gamma = 0\right\}, \tag{14}$$

où $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$, $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ sont la normale extérieure à γ et la tangente déduite par une rotation de $\Pi/2$; X et T sont deux espaces contenant V et inclus dans $(H^1(\Omega))^3$, choisis pour la souplesse de leurs conditions de bord. Nous travaillerons ci-dessous essentiellement sur l'espace X et donnerons en complément (cf. 3.2.3) les résultats portant sur T. Notons X_{12} et X_3 les deux espaces facteurs de X

$$\left|\begin{aligned} X_{12} &= \left\{(v_1, v_2) \in (H^1(\Omega))^2;\ \left(\int_{-1}^{1} v_\alpha\right)\Big|_\gamma = 0,\ \left(\int_{-1}^{1} x_3 v_\alpha n_\alpha\right)\Big|_\gamma = 0\right\} \\ X_3 &= \left\{v_3 \in H^1(\Omega);\ \left(\int_{-1}^{1}(1 - x_3^2) v_3\right)\Big|_\gamma = 0\right\}. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Désormais, nous appellerons (P^ε) le problème analogue à (9)

$$(P^\varepsilon) \qquad \left\{\begin{array}{ll} \text{Trouver} & (\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in \Sigma \times X \\ \forall \tau \in \Sigma, & a^\varepsilon(\sigma^\varepsilon, \tau) + B(\tau, u^\varepsilon) = 0 \\ \forall v \in X, & B(\sigma^\varepsilon, v) = F^0(v). \end{array}\right.$$

Posons-nous les problèmes de l'existence d'une solution pour (P^ε) et de son interprétation. Rappelons tout d'abord [8] que les formes a^ε sont

1) continues de constante de continuité indépendante de ε;

2) coercives sur Σ et vérifient.

(16) $$\exists \alpha > 0,\ \forall \varepsilon,\ \forall \tau \in \Sigma, \quad a^\varepsilon(\tau, \tau) \geqslant \alpha\big(|\tau_{\alpha\beta}|^2 + \varepsilon^2|\tau_{\alpha 3}|^2 + \varepsilon^4|\tau_{33}|^2\big)\,.$$

D'autre part, on peut écrire le

LEMME 1. – *X est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $(H^1(\Omega))^3$; sur X, l'application $v \to \big(\sum_{i,j} |\gamma_{ij}(v)|^2\big)^{\frac12}$ est une norme équivalente à $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)^3}$, notée $\|\cdot\|_X$.*

DÉMONSTRATION. – On remarque que, grâce aux conditions aux limites, on a: $\big(v \in X,\ \forall (i, j)\gamma_{ij}(v) = 0\big) \Rightarrow (v = 0)$ puis l'on utilise l'inégalité de KORN [5] et la compacité de l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

On est ainsi en mesure d'appliquer le résultat standard [1] d'existence et unicité pour les problèmes mixtes et l'on a:

PROPOSITION 2. – *Pour $F^0 \in X'$, le problème (P^ε) a une solution et une seule.*

Passons maintenant à l'interprétation; nous nous plaçons dans le cas où F^0 est un élément de X' de la forme

(17) $$F^0(v) = -(f_i^0, v_i) - \int\limits_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} g_i^0 v_i$$

avec $f_i^0 \in L^2(\Omega)$, $g_i^0 \in L^2(\Gamma^+ \cup \Gamma^-)$; physiquement, le problème à considérer n'est pas (P^ε) mais le problème posé sur l'ouvert Ω^e dont il est l'image et qui s'écrit

(18) $$\begin{cases} \text{Trouver} & ({}^e\sigma, {}^eu) \in \Sigma^e \times X^e \\ \forall \tau \in \Sigma^e, & {}^ea({}^e\sigma, \tau) + {}^eB(\tau, {}^eu) = 0 \\ \forall v \in X^e, & {}^eB({}^e\sigma, v) = {}^eF(v) \end{cases}$$

avec

$$X^e = \Big\{v \in (H^1(\Omega^e))^3;\ \Big(\int_{-e}^{e} v_\alpha\, dy_3\Big)\Big|_\gamma = 0,\ \Big(\int_{-e}^{e} y_3 v_\alpha n_\alpha\, dy_3\Big)\Big|_\gamma = 0,\ \Big(\int_{-e}^{e}(e^2 - y_3^2)v_3\, dy_3\Big)\Big|_\gamma = 0\Big\}$$

et

(19) $${}^eF(v) = -\int\limits_{\Omega^e} {}^ef_i v_i - \int\limits_{\Gamma_+^e \cup \Gamma_-^e} {}^eg_i v_i\,.$$

On obtient alors la

PROPOSITION 3. – *Si ${}^eF$ est de la forme* (19), *alors* (17) *est formellement équivalent au système constitué par*

1) *les équations aux dérivées partielles* (1);

2) *les conditions aux limites*:

$$\left(\int_{-e}^{e} {}^e u_\alpha\, dy_3\right)\Big|_\gamma = 0\,, \quad \left(\int_{-e}^{e} y_3{}^e u_\alpha n_\alpha\, dy_3\right)\Big|_\gamma = 0\,, \quad \left(\int_{-e}^{e} (e^2 - y_3^2)\,{}^e u_\alpha\, dy_3\right)\Big|_\gamma = 0 \tag{20}$$

$$ {}^e\sigma_{i3} = {}^e g_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_+^e\,, \qquad {}^e\sigma_{i3} = -\,{}^e g_i \quad \text{sur} \quad \Gamma_-^e \tag{21}$$

$$\exists \chi_\alpha\,, \quad \chi \in L^2(\gamma)\,, \qquad {}^e\sigma_{\alpha\beta} n_\beta = \chi_\alpha + y_3 \chi n_\alpha \tag{22}$$

$$\exists \chi_3 \in L^2(\gamma)\,, \qquad {}^e\sigma_{3\alpha} n_\alpha = (e^2 - y_3^2)\chi_3\,. \tag{23}$$

DÉMONSTRATION. – On prend successivement dans l'équation d'équilibre de (17) $v = \varphi$ élément de $(D(\Omega^e))^3$, $v = (v_1, v_2, 0)$ et $v = (0, 0, v_3)$ éléments de X^e et on remarque que

$$\left(\forall (v_1, v_2, 0) \in X^e,\ \int_{\Gamma_0^e} {}^e\sigma_{\alpha\beta} n_\alpha v_\beta = 0\right) \quad \text{équivaut à (22)}$$

et

$$\left(\forall (0, 0, v_3) \in X^e,\ \int_{\Gamma_0^e} {}^e\sigma_{3\alpha} n_\alpha v_3 = 0\right) \quad \text{équivaut à (23)}\,.$$

1.1.2. *Le problème* (P_0). – Nous nous intéressons ici au problème obtenu en identifiant les termes en ε^0 du problème (P^ε); ce problème, noté (P_0) est donc:

$$(P_0) \qquad \begin{cases} (\sigma^0, u^0) \in \Sigma \times X \\ \forall \tau \in \Sigma\,, \quad a^0(\sigma^0, \tau) + B(\tau, u^0) = 0 \\ \forall v \in X\,, \qquad\qquad B(\sigma^0, v) = F^0(v)\,. \end{cases}$$

L'étude de (P_0) débute comme l'étude détaillée dans [8] du problème limite associé au problème (9) posé sur $\Sigma \times V$; aussi nous contentons-nous de donner les résultats. Suivant [8], nous introduisons les espaces

$$X_{KL} = \{v \in X;\ \gamma_{\alpha 3}(v) = 0,\ \gamma_{33}(v) = 0\} \tag{24}$$

$$S \;= \{\tau \in \Sigma;\ \tau_{\alpha 3} = 0,\ \tau_{33} = 0\} \simeq (L^2(\Omega))^4_s \tag{25}$$

et le problème «faible»

$$(P_0 f) \qquad \begin{cases} (\sigma^0, u^0) \in S \times X_{KL} \\ \forall \tau \in S\,, \quad a^0(\sigma^0, \tau) + B(\tau, u^0) = 0 \\ \forall v \in X_{KL}\,, \qquad\qquad B(\sigma^0, v) = F^0(v)\,. \end{cases}$$

LEMME 2. – *Si* (σ^0, u^0) *est une solution de* (P_0), *alors* $\big((\sigma^0_{\alpha\beta}, 0, 0), u^0\big)$ *est solution de* $(P_0 f)$ *et en particulier* u^0 *appartient à* X_{KL}.

$$X_{KL} = \{v;\ v_3 \in H^2_0(\omega);\ v_\alpha = \boldsymbol{v}_\alpha - x_3\,\partial_\alpha v_3,\ \boldsymbol{v}_\alpha \in H^1_0(\omega)\}\ .$$

REMARQUE 1. – X_{KL} est l'espace des déplacements de Kirchhoff-Love; il coïncide avec V_{KL} où $V_{KL} = \{v \in V;\ \gamma_{\alpha 3}(v) = 0,\ \gamma_{33}(v) = 0\}$.

Notons:

$[\ ,\ ]$: le produit scalaire sur $\big(L^2(\omega)\big)^2$, ou le produit de dualité $\big(H^{-1}(\omega)^2, H^1_0(\omega)^2\big)$;

K: l'opérateur de $\big(H^1(\omega)\big)^2$ sur $\big(H^{-1}(\omega)\big)^2$ défini par

$$(26)\qquad \begin{cases} \forall(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) \in \big(H^1(\omega)\big)^2\ , \quad \forall(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \in \big(H^1_0(\omega)\big)^2\ , \\ [K(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2), (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)] = \dfrac{2E}{1-\nu^2}\,[(1-\nu)\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}) + \nu\gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u})\delta_{\alpha\beta},\ \gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{v})]\ . \end{cases}$$

PROPOSITION 4. – *Pour tout* $F^0 \in X'$, *le problème* $(P_0 f)$ *admet une solution et une seule* (σ^0, u^0) *où*

1) u^0_3 *est l'unique solution du problème bi-harmonique*

$$(27)\qquad \begin{cases} u^0_3 \in H^2_0(\omega) \\ \forall w \in H^2_0(\omega)\ , \quad \dfrac{2}{3}\,\dfrac{E}{1-\nu^2}\,[\Delta u^0_3, \Delta w] = F^0(x_3\,\partial_\alpha w, -w)\ . \end{cases}$$

2) $u^0_\alpha = \boldsymbol{u}^0_\alpha - x_3\,\partial_\alpha u^0_3$, *et* $\boldsymbol{u}^0_\alpha$ *est l'unique solution du système de l'élasticité sur* ω

$$(28)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{u}^0_\alpha \in \big(H^1_0(\omega)\big)^2 \\ \forall \boldsymbol{v}_\alpha \in \big(H^1_0(\omega)\big)^2\ , \quad [K(\boldsymbol{u}^0_1, \boldsymbol{u}^0_2), (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)] = F(-\boldsymbol{v}_1, -\boldsymbol{v}_2, 0)\ . \end{cases}$$

$$(29)\qquad 3)\ \sigma^0_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2}\,\{(1-\nu)\gamma_{\alpha\beta}(u^0) + \nu\gamma_{\mu\mu}(u^0)\delta_{\alpha\beta}\}\ .$$

Nous cherchons maintenant à compléter la solution $\big((\sigma^0_{\alpha\beta}, 0, 0), u^0\big)$ élément de $S \times X_{KL}$ du problème $(P_0 f)$ en un élément $\big((\sigma^0_{\alpha\beta}, \sigma^0_{\alpha 3}, \sigma^0_{33}), u^0\big)$ de $\Sigma \times X$ solution de (P_0); supposons F^0 de la forme (17), les équations que doivent satisfaire $\sigma^0_{\alpha 3}$ et σ^0_{33} sont

$$(30)\qquad \begin{cases} (\sigma^0_{13}, \sigma^0_{23}) \in L^2(\Omega)^2 \\ \forall(v_1, v_2) \in X_{12}\ , \quad (\sigma^0_{\alpha 3}, \partial_3 v_\alpha) = -(\sigma^0_{\alpha\beta}, \partial_\alpha v_\beta) + (f^0_\alpha, v_\alpha) + \displaystyle\int_{\Gamma^+\cup\Gamma^-} g^0_\alpha v_\alpha \end{cases}$$

$$(31)\qquad \begin{cases} \sigma^0_{33} \in L^2(\Omega) \\ \forall v_3 \in X_3\ , \quad (\sigma^0_{33}, \partial_3 v_3) = -(\sigma^0_{\alpha 3}, \partial_\alpha v_3) + (f^0_3, v_3) + \displaystyle\int_{\Gamma^+\cup\Gamma^-} g^0_3 v_3\ . \end{cases}$$

Nous donnons dans le lemme ci-dessous un résultat d'existence pour des problèmes du type (30) ou (31).

LEMME 3. – *Soit Y tel que $\{w \in H^1(\Omega);\ w|_{\Gamma_0} = 0\} \subset Y \subset H^1(\Omega)$ et soit G une forme linéaire sur Y s'écrivant*

$$\forall w \in Y\,, \qquad G(w) = (p, w) + (q_\alpha, \partial_\alpha w) + \int_\omega r w(1) + s w(-1)$$

avec p, q_α, $\partial_\alpha q_\alpha \in L^2(\Omega)$, r, $s \in L^2(\omega)$.

Alors, le problème

$$\sigma \in L^2(\Omega)\,, \quad \forall w \in Y\,, \quad (\sigma, \partial_3 w) = G(w) \tag{32}$$

a une solution si et seulement si les conditions de compatibilité suivantes sont satisfaites:

$$C_1\colon \int_{-1}^{1} (p - \partial_\alpha q_\alpha)\, dx_3 + r + s = 0$$

$$C_2\colon \forall w \in Y\,, \quad \int_{\Gamma_0} q_\alpha n_\alpha w = 0\,;$$

et alors

$$\sigma = \int_{-1}^{x_3} (-p + \partial_\alpha q_\alpha) + \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} (p - \partial_\alpha q_\alpha) + \tfrac{1}{2}(r - s)\,. \tag{33}$$

De même, soit Z tel que $\{(w_1, w_2) \in (H^1(\Omega))^2;\ w_\alpha|_{\Gamma_0} = 0\} \subset Z \subset (H^1(\Omega))^2$ et soit G une forme linéaire sur Z s'écrivant

$$\forall (w_1, w_2) \in Z\,, \quad G(w_1, w_2) = (p_\alpha, w_\alpha) + (q_{\alpha\beta}, \partial_\alpha w_\beta) + \int_\omega r_\alpha w_\alpha(1) + s_\alpha w_\alpha(-1)\,,$$

avec p_α, $q_{\alpha\beta}$, $\partial_\beta q_{\alpha\beta} \in L^2(\Omega)$, r_α, $s_\alpha \in L^2(\omega)$.

Alors, le problème

$$(\sigma_1, \sigma_2) \in (L^2(\Omega))^2\,, \quad \forall (w_1, w_2) \in Z\,, \quad (\sigma_\alpha, \partial_3 w_\alpha) = G(w_1, w_2) \tag{34}$$

a une solution si et seulement si les conditions de compatibilité suivantes sont satisfaites:

$$D_1\colon \int_{-1}^{1} (p_\alpha - \partial_\beta q_{\alpha\beta}) + r_\alpha + s_\alpha = 0$$

$$D_2\colon \forall (w_1, w_2) \in Z\,, \quad \int_{\Gamma_0} q_{\alpha\beta} n_\beta w_\alpha = 0\,;$$

et alors

$$\sigma_\alpha = \int_{-1}^{x_3} (-p_\alpha + \partial_\beta q_{\alpha\beta}) + \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} (p_\alpha - \partial_\beta q_{\alpha\beta}) + \tfrac{1}{2}(r_\alpha - s_\alpha)\,. \tag{35}$$

REMARQUE 2. – A la lecture du Lemme 3, on constate que le problème de l'existence de $(\sigma^0_{\alpha 3}, \sigma^0_{33})$ ne se ramène pas à son analogue dans le cas d'une plaque maintenue sur Γ_0; dans ce dernier cas, en effet, les conditions C_2 et D_2 sont vides. Nous pouvons maintenant énoncer un résultat d'existence pour (P_0).

PROPOSITION 5. – *Soit F_0 de la forme*

$$F^0(v) = -(f^0_i, v_i) - \int_{\Gamma^+\cup\Gamma^-} g^0_3 v_3 \tag{36}$$

avec $f^0_i \in L^2(\Omega)$, $g^0_3 \in L^2(\Gamma^+ \cup \Gamma^-)$, f^0_α indépendant de x_3.

Alors, le problème (P_0) admet une solution et une seule (σ^0, u^0); elle est donnée par

$$\text{1) } u^0_3 \in H^2_0(\omega)\,, \quad \frac{2}{3}\frac{E}{1-\nu^2}\Delta^2 u^0_3 = \int_{-1}^{1} f^0_3 + g^{0+}_3 + g^{0-}_3 \tag{37}$$

2) $u^0_\alpha = \boldsymbol{u}^0_\alpha - x_3\,\partial_\alpha u^0_3$ *avec*

$$\boldsymbol{u}^0 \in (H^1_0(\omega))^2 \text{ et } K\boldsymbol{u}^0 = 2(f^0_1, f^0_2) \tag{38}$$

$$\text{3) } \sigma^0_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2}\{(1-\nu)\gamma_{\alpha\beta}(u^0) + \nu\gamma_{\mu\mu}(u^0)\delta_{\alpha\beta}\} \tag{39}$$

$$\text{4) } \sigma^0_{\alpha 3} = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}(1-x_3^2)\,\partial_\alpha \Delta u^0_3 \tag{40}$$

$$\text{5) } \sigma^0_{33} = -\int_{-1}^{x_3} f^0_3 + \left(\int_{-1}^{1} f^0_3\right)\frac{(x_3+1)(-x_3^2+x_3+2)}{4} + \frac{1}{4}(g^{0+}_3 - g^{0-}_3) + \frac{x_3}{4}(3-x_3^2)(g^{0+}_3 + g^{0-}_3)\,. \tag{41}$$

DÉMONSTRATION:

étape 1. – (37), (38), (39) sont des conséquences immédiates de la Proposition 4; notons que u^0_3, $\boldsymbol{u}^0_\alpha$, et par conséquent $\sigma^0_{\alpha\beta}$, sont réguliers:

$$u^0_3 \in H^2_0(\omega) \cap H^4(\omega)\,; \quad \boldsymbol{u}^0 \in (H^1_0(\omega))^2 \cap (H^2(\omega))^2\,; \quad \sigma^0_{\alpha\beta} \in H^1(\Omega)\,. \tag{42}$$

étape 2. – Recherche de $\sigma^0_{\alpha 3}$: par application du Lemme 3, on cherche à satisfaire D_1 et D_2 pour l'équation (30); rappelons que, par construction,

$$\forall \boldsymbol{v} \in (H^1_0(\omega))^2 , \quad -\left[\left(\int_{-1}^{1}\sigma^0_{\alpha\beta}\right), \gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{v}\right] = F^0(\boldsymbol{v}, 0) = -(f^0_\alpha, \boldsymbol{v}_\alpha)$$

et donc

$$2f^0_\alpha + \partial_\beta\int_{-1}^{1}\sigma^0_{\alpha\beta} = 0 , \quad \text{qui n'est autre que } D_1 .$$

D_2 s'écrit:

(43) $$\forall (w_1, w_2) \in X_{12} , \quad \int_{\Gamma_0}\sigma^0_{\alpha\beta}n_\beta w_\alpha = 0 ;$$

calculons $\sigma^0_{\alpha\beta}n_\beta$; d'après (29)

(44) $$\begin{pmatrix}\sigma^0_{1\beta}n_\beta\\ \sigma^0_{2\beta}n_\beta\end{pmatrix} = \boldsymbol{j} - \frac{Ex_3}{1-\nu^2}\boldsymbol{k} , \quad \text{avec } \boldsymbol{j} \text{ indépendant de } x_3 \text{ et}$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{cases} \big((1-\nu)\,\partial_{11}u^0_3 + \nu\,\Delta u^0_3\big)n_1 + (1-\nu)\,\partial_{12}u^0_3 n_2 \\ (1-\nu)\,\partial_{12}u^0_3 n_1 + \big((1-\nu)\,\partial_{22}u^0_3 + \nu\,\Delta u^0_3\big)n_1 . \end{cases}$$

Remarquons que:

(45) $$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\tau} = (1-\nu)\,D^2u^0_3(\vec{\tau}, \vec{n}) = 0 .$$

De l'appartenance de u^0_3 à $H^4(\omega) \cap H^2_0(\omega)$, on déduit que $\partial_\alpha u^0_3$ et $\partial_\tau(\partial_n u^0_3)$ sont nuls sur γ et donc que $D^2u^0_3(\vec{\tau}, \vec{n}) = 0$; ainsi, sur Γ_0, $\sigma^0_{\alpha\beta}n_\beta$ est de la forme

(46) $$\sigma^0_{\alpha\beta}n_\beta = j_\alpha - \frac{Ex_3}{1-\nu^2}kn_\alpha , \quad \text{avec } j_\alpha, k \text{ indépendants de } x_3 ,$$

ce qui, comme on l'a déjà vu lors de la Proposition 3, prouve que (43) est vérifié; grâce à (35), on obtient l'expression (40) pour $\sigma^0_{\alpha 3}$.

étape 3. – Recherche de σ^0_{33}: on cherche à satisfaire les équations C_1 et C_2 du Lemme 3 pour l'équation (31); d'une part,

$$\int_{-1}^{1}(f^0_3 + \partial_\alpha\sigma^0_{\alpha 3}) + g^{0+}_3 + g^{0-}_3 = \int_{-1}^{1}f^0_3 - \frac{2}{3}\frac{E}{1-\nu^2}\Delta^2u^0_3 + g^{0+}_3 + g^{0-}_3 = 0 \quad \text{d'après (37)},$$

ainsi C_1 est satisfaite; d'autre part C_2 s'écrit:

$$\forall w_3 \in X_3 , \quad \int_{\Gamma_0}\sigma^0_{\alpha 3}n_\alpha w_3 = 0 ;$$

or

$$\sigma^0_{\alpha 3} n_\alpha = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} (1 - x_3^2)\, \partial_n \Delta u^0_3$$

et d'après la structure des éléments de X (13), (C_2) est satisfaite.

REMARQUE 3. - 1) nous n'avons pas cherché ici à donner à F^0 la forme la plus générale possible; signalons que le résultat d'existence est encore valable pour des forces de la forme

$$F^0(v) = -(f^0_i, v_i) - \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} g^0_i v_i - \int_{\Gamma_0} h^0_3 v_3$$

vérifiant

$$h^0_3 = \frac{1}{2}(g^{0+}_\alpha - g^{0-}_\alpha) n_\alpha + \frac{x_3}{2}(g^{0+}_\alpha + g^{0-}_\alpha) n_\alpha - \int_{-1}^{1} f^0_\alpha n_\alpha + \frac{x_3 + 1}{2} \int_{-1}^{1} f^0_\alpha n_\alpha;$$

le cas (36), qui donne pour $\sigma^0_{\alpha 3}$ et σ^0_{33} des expressions assez simples, et qui autorise des forces surfaciques verticales arbitraires est ici suffisant;

2) il est essentiel de noter que dans la vérification des conditions C_2 et D_2 la forme des éléments de X sur Γ_0, qui pouvait paraître artificielle lors de la définition (13) a été cruciale;

3) enfin, donnons une extension immédiate des résultats de régularité (42), si:

$$F^0(v) = -(f^0_i, v_i) - \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} g^0_3 v_3 \tag{47}$$

avec

$$f^0_\alpha \in H^1(\omega)\,, \quad f^0_3 \in L^2(\Omega)\,, \quad g^0_3 \in L^2(\Gamma^+ \cup \Gamma^-)\,,$$

alors $u^\varepsilon_0 \in H^2_0(\omega) \cap H^4(\omega)$, $\boldsymbol{u}^0_\alpha \in H^1_0(\omega) \cap H^3(\omega)$, $\sigma^0_{\alpha\beta} \in H^2(\Omega)$.

Des résultats d'existence pour une solution du problème (P_0) étant connus, nous pouvons maintenant écrire le problème obtenu en identifiant les terms en ε^2 de (P^ε); ce problème, noté (P_2), est

$$(P_2) \qquad \begin{cases} (\sigma^2, u^2) \in \Sigma \times X \\ \forall \tau \in \Sigma\,, \quad a_0(\sigma^2, \tau) + B(\tau, u^2) = -a_2(\sigma^0, \tau) \\ \forall v \in X\,, \quad B(\sigma^2, v) = 0\,. \end{cases}$$

Comme dans l'étude de (P_0), nous commençons par tronquer le problème (P_2)

et définissons le problème faible

$$(P_2 f)\qquad \begin{cases} (\sigma^2, u^2) \in S \times X \\ \forall \tau \in \Sigma, \quad a_0(\sigma^2, \tau) + B(\tau, u^2) = -a_2(\sigma^0, \tau) & (48) \\ \forall v \in X_{KL}, \quad B(\sigma^2, v) = 0 & (49) \end{cases}$$

pour lequel nous pouvons énoncer le résultat d'existence suivant.

PROPOSITION 6. – *Sous les hypothèses* (47), *le problème* $(P_2 f)$ *admet une solution et une seule* (σ^2, u^2); *elle est donnée par*

$$(50)\qquad 1)\ u_3^2 = \boldsymbol{u}_3^2 - \frac{\nu}{1-\nu} x_3 \gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0) + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{x_3^2}{2} \Delta u_3^0,$$

où $\boldsymbol{u}_3^2$ *est l'unique élément de* $H^2(\omega)$ *tel que*

$$(51)\qquad \frac{2}{3} \frac{E}{1-\nu^2} \Delta^2 \boldsymbol{u}_3^2 = -\frac{E}{(1-\nu^2)(1-\nu)} \frac{2}{3} \frac{8+\nu}{10} \Delta^3 u_3^0 + \frac{\nu}{1-\nu} \Delta \int_{-1}^{1} x_3 \sigma_{33}^0$$

$$(52)\qquad \boldsymbol{u}_3^2|_\gamma = -\frac{\nu}{10(1-\nu)} \Delta u_3^0|_\gamma, \qquad \partial_n \boldsymbol{u}_3^2|_\gamma = -\frac{8+\nu}{10(1-\nu)} \partial_n \Delta u_3^0|_\gamma$$

$$(53)\qquad 2)\ u_\alpha^2 = \boldsymbol{u}_\alpha^2 - x_3 \partial_\alpha \boldsymbol{u}_3^2 + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{x_3^2}{2} \partial_\alpha \gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0) - \partial_\alpha \Delta u_3^0 \frac{1}{1-\nu} \left(x_3 + \frac{x_3^3}{3} \left(\frac{\nu}{2} - 1 \right) \right)$$

où $(\boldsymbol{u}_1^2, \boldsymbol{u}_2^2)$ *est l'unique élément de* $(H^1(\omega))^2$ *tel que*

$$(54)\qquad K\boldsymbol{u}^2 = \frac{E\nu}{3(1-\nu^2)(1-\nu)} \operatorname{grad} \Delta \gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0) + \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{grad} \int_{-1}^{1} \sigma_{33}^0$$

$$(55)\qquad \boldsymbol{u}_\alpha^2|_\gamma = -\frac{\nu}{6(1-\nu)} \partial_\alpha \gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0)|_\gamma$$

$$(56)\qquad 3)\ \sigma_{\alpha\beta}^2 = \frac{E}{1-\nu^2} \{(1-\nu)\gamma_{\alpha\beta}(u^2) + \nu \gamma_{\mu\mu}(u^2)\delta_{\alpha\beta}\} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{33}^0 \delta_{\alpha\beta} =$$

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \{(1-\nu)\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}^2) + \nu \gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^2)\delta_{\alpha\beta}\} - \frac{Ex_3}{1-\nu^2} \{(1-\nu)\, \partial_{\alpha\beta} \boldsymbol{u}_3^2 + \nu\, \Delta \boldsymbol{u}_3^2 \delta_{\alpha\beta}\} +$$

$$+ \frac{E\nu}{2(1-\nu^2)(1-\nu)} x_3^2 \{(1-\nu)\, \partial_{\alpha\beta} \gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0) + \nu\, \Delta \gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0) \delta_{\alpha\beta}\} -$$

$$- \frac{E}{(1-\nu^2)(1-\nu)} \left(x_3 + \frac{x_3^3}{3} \left(\frac{\nu}{2} - 1 \right) \right) \{(1-\nu)\, \partial_{\alpha\beta} \Delta u_3^0 + \nu\, \Delta^2 u_3^0\} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{33}^0 \delta_{\alpha\beta}.$$

DÉMONSTRATION. – Cherchons tout d'abord les éléments (σ^2, u^2) de $S \times (H^1(\Omega))^3$ qui satisfont l'équation de comportment de $(P_2 f)$ et l'appartenance de u^2 à X. Prenant successivement τ de la forme $(\tau_{\alpha\beta}, 0, 0)$, $(0, \tau_{\alpha 3}, 0)$, $(0, 0, \tau_{33})$ dans (48), on remplace (48) par (57), (58), (59) avec

$$\sigma^2_{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2}\{(1-\nu)\gamma_{\alpha\beta}(u^2) + \nu\gamma_{\mu\mu}(u^2)\delta_{\alpha\beta}\} + \frac{\nu}{1-\nu}\sigma^0_{33}\delta_{\alpha\beta} \tag{57}$$

$$\gamma_{\alpha 3}(u^2) = \frac{1+\nu}{E}\sigma^0_{\alpha 3} = -\frac{1}{2(1-\nu)}(1-x_3^2)\,\partial_\alpha \Delta u^0_3 \tag{58}$$

$$\gamma_{33}(u^2) = -\frac{\nu}{E}\sigma^0_{\mu\mu} = -\frac{\nu}{1-\nu}\{\gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0) - x_3\,\Delta u^0_3\}\,. \tag{59}$$

On remarque que (57) n'est autre que (56) et on intègre (58) et (59); (59) équivaut à

$$u^2_3 = \boldsymbol{u}^2_3 - \frac{\nu}{1-\nu}x_3\gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0) + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{x_3^2}{2}\Delta u^0_3; \qquad \boldsymbol{u}^2_3 \text{ indépendant de } x_3\,.$$

De plus, pour que u^2_3 appartienne à X_3, il faut et il suffit que

$$\boldsymbol{u}^2_3 \in H^1(\omega) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{u}^2_3|_\gamma = -\frac{1}{10}\frac{\nu}{1-\nu}\Delta u^0_3|_\gamma\,. \tag{60}$$

On procède de même sur (58), et compte-tenu du calcul de u^2_3, (58) fournit

$$u^2_\alpha = \boldsymbol{u}^2_\alpha - x_3\,\partial_\alpha \boldsymbol{u}^2_3 + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{x_3^2}{2}\partial_\alpha\gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0) - \partial_\alpha\Delta u^0_3\frac{1}{1-\nu}\left(x_3 + \frac{x_3^3}{3}\left(\frac{\nu}{2}-1\right)\right),$$

$\boldsymbol{u}^2_\alpha$ indépendant de x_3.

De plus, pour que $(u^2_1, u^2_2) \in X_{12}$, il faut et il suffit que

$$\boldsymbol{u}^2_\alpha \in H^1(\omega) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{u}^2_\alpha|_\gamma = -\frac{1}{6}\frac{\nu}{1-\nu}\partial_\alpha\gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0)|_\gamma \tag{61}$$

$$\boldsymbol{u}^2_3 \in H^2(\omega) \quad \text{et} \quad \partial_n \boldsymbol{u}^2_3|_\gamma = -\frac{8+\nu}{10(1-\nu)}\partial_n\Delta u^0_3|_\gamma\,. \tag{62}$$

Notons que l'hypothèse (47) a été utilisée pour considérer $\partial_\alpha\gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0)$ sur γ, et que, d'après la surjectivité de l'application $u \to (u|_\gamma, \partial_n u|_\gamma)$ de $H^2(\omega)$ sur $H^{\frac{3}{2}}(\gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ [5] les conditions aux limites (60) et (62) sont compatibles. En résumé, il y a une infinité d'éléments de $\Sigma\times X$ vérifiant (48): les éléments de la forme (50), (53) et (56) satisfaisant les conditions de bord (52) et (55).

Imposons maintenant de plus la condition (49); on choisit successivement v dans X_{KL} de la forme $v = (\boldsymbol{v}_\alpha, 0)$ avec $\boldsymbol{v}_\alpha$ dans $H^1_0(\omega)$ et $v = (-x_3\,\partial_\alpha v_3, v_3)$ avec v_3 dans $H^2_0(\omega)$; l'équation d'équilibre (49) est alors remplacée tous calculs faits par (54) qui est une équation dans $(H^{-1}(\omega))^2$ (pour la définition de K, voir (26)) et (51) qui est une équation dans $H^{-2}(\omega)$; enfin les problèmes (51)-(52) et (54)-(55) sont des problèmes elliptiques classiques ayant une solution et une seule.

REMARQUES 4. – 1) on peut remplacer (51) par une équation aux dérivées partielles où le second membre ne fait intervenir que les données:

$$\frac{2}{3}\frac{E}{1-\nu^2}\Delta^2 u_3^2 = -\frac{\nu}{1-\nu}\Delta\int_{-1}^{1} x_3 \int_{-1}^{x_3} f_3^0 + \frac{3\nu-8}{10(1-\nu)}\Delta\left(\int_{-1}^{1} f_3^0 + g_3^{0+} + g_3^{0-}\right); \tag{63}$$

2) la structure des éléments de X joue ici un rôle essentiel: elle permet que les conditions de bord associées au bilaplacien soient compatibles, ce qu'aurait interdit un espace a priori plus naturel tel que:

$$Z = Z_{12}\times X_3\,, \qquad Z_{12} = \left\{(v_1, v_2)\in (H^1(\Omega))^2;\ \left(\int_{-1}^{1} v_\alpha\right)\Big|_\gamma = 0,\ \left(\int_{-1}^{1} x_3 v_\alpha\right)\Big|_\gamma = 0\right\};$$

3) enfin, un contre-exemple que nous ne détaillons pas ici montre qu'en général le problème (P_2) (non tronqué) n'admet pas de solution.

1.2. *Résultats de convergence.*

Nous avons, au paragraphe 1.1, défini une famille indicée par ε de problèmes (P^ε), un problème limite naturel (P_0) et un problème d'ordre 2 $(P_2 f)$; nous avons vérifié que tous ces problèmes admettaient une solution dans un même espace $\Sigma\times X$; nous sommes maintenant en mesure de donner des résultats de convergence à l'ordre 2 dans $\Sigma\times X$; indiquons tout d'abord un résultat de convergence à l'ordre 0 dont la démonstration se déduit aisément des méthodes de [8].

LEMME 4. – *Pour tout* $F^0 \in X'$, *on a, pour* ε *tendant vers* 0,

$$u^\varepsilon \to u^0 \quad \textit{dans} \quad (H^1(\Omega))^3$$

$$\sigma^\varepsilon_{\alpha\beta} \to \sigma^0_{\alpha\beta}\,, \quad \varepsilon\sigma^\varepsilon_{\alpha 3} \to 0\,, \quad \varepsilon^2\sigma^\varepsilon_{33} \to 0 \quad \textit{dans} \quad L^2(\Omega)$$

où (σ^0, u^0) *est la solution de* $(P_0 f)$.

Quant au résultat à l'ordre 2, il sécrit

THÉORÈME 1. – *Sous les seules hypothèses* (47) *d'existence d'une solution pour* $(P_2 f)$, *on a*

$$\frac{1}{\varepsilon^2}(u^\varepsilon - u^0) \to u^2 \quad \textit{dans} \quad (H^1(\Omega))^3$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2}(\sigma^\varepsilon_{\alpha\beta} - \sigma^0_{\alpha\beta}) \to \sigma^2_{\alpha\beta}\,, \quad \frac{1}{\varepsilon}(\sigma^\varepsilon_{\alpha 3} - \sigma^0_{\alpha 3}) \to 0\,, \quad (\sigma^\varepsilon_{33} - \sigma^0_{33}) \to 0 \quad \textit{dans} \quad L^2(\Omega)$$

où (σ^0, u^0) *est la solution de* (P_0) *et* (σ^2, u^2) *la solution de* $(P_2 f)$.

DÉMONSTRATION. – Notons que la difficulté vient de ce que le problème $(P_2 f)$, bien qu'admettant une solution dans $\Sigma\times X$, n'est pas posé dans $\Sigma\times X$.

étape 1. – Majorations a priori: on pose

$$\bar\sigma^\varepsilon=\sigma^\varepsilon-\sigma^0\,,\quad \bar u^\varepsilon=u^\varepsilon-u^0\,,\quad u^{*\varepsilon}=u^\varepsilon-u^0-\varepsilon^2u^2\,. \tag{64}$$

Par soustraction de (P_0) à (P^ε), on a

$$\begin{cases}\forall\tau\in\Sigma\,, & a^\varepsilon(\bar\sigma^\varepsilon,\tau)+B(\tau,\bar u^\varepsilon)=-\varepsilon^2a_2(\sigma^0,\tau)-\varepsilon^4a_4(\sigma^0,\tau)\\ \forall v\in X\,, & B(\bar\sigma^\varepsilon,v)=0\end{cases} \tag{65}$$

d'où l'on tire

$$\begin{cases}a^\varepsilon(\bar\sigma^\varepsilon,\bar\sigma^\varepsilon)=-\varepsilon^2a_2(\sigma^0,\bar\sigma^\varepsilon)-\varepsilon^4a_4(\sigma^0,\bar\sigma^\varepsilon)\\ B(\bar\sigma^\varepsilon,u^2)=0\,.\end{cases} \tag{66}$$

L'équation de comportement de $(P_2 f)$ fournit alors

$$a_0(\sigma^2,\bar\sigma^\varepsilon)=-a_2(\sigma^0,\bar\sigma^\varepsilon)\,. \tag{67}$$

Reportant dans (66), on a

$$a^\varepsilon(\bar\sigma^\varepsilon,\bar\sigma^\varepsilon)=\varepsilon^2a_0(\sigma^2,\bar\sigma^\varepsilon)-\varepsilon^4a_4(\sigma^0,\bar\sigma^\varepsilon)\,.$$

Comme a_0 (resp. o_4) est un produit scalaire sur S (resp. $L^2(\Omega)$), on en déduit

$$\begin{aligned}a^\varepsilon(\bar\sigma^\varepsilon,\bar\sigma^\varepsilon)&\leqslant\varepsilon^2a_0(\sigma^2,\sigma^2)^{\frac12}a_0(\bar\sigma^\varepsilon,\bar\sigma^\varepsilon)^{\frac12}+\varepsilon^4a_4(\sigma^0,\sigma^0)^{\frac12}a_4(\bar\sigma^\varepsilon,\bar\sigma^\varepsilon)^{\frac12}\\ &\leqslant\varepsilon^2a_0(\sigma^2,\sigma^2)^{\frac12}a^\varepsilon(\bar\sigma^\varepsilon,\bar\sigma^\varepsilon)^{\frac12}+\varepsilon^2a_4(\sigma^0,\sigma^0)^{\frac12}a^\varepsilon(\bar\sigma^\varepsilon,\bar\sigma^\varepsilon)^{\frac12}\,,\end{aligned}$$

et donc

$$a^\varepsilon(\bar\sigma^\varepsilon,\bar\sigma^\varepsilon)\leqslant C\varepsilon^4\,,$$

qui fournit

$$\exists C,\ \forall\varepsilon\,,\quad |\sigma^\varepsilon_{\alpha\beta}-\sigma^0_{\alpha\beta}|\leqslant C\varepsilon^2\,,\quad |\sigma^\varepsilon_{\alpha3}-\sigma^0_{\alpha3}|\leqslant C\varepsilon\,,\quad |\sigma^\varepsilon_{33}-\sigma^0_{33}|\leqslant C\,. \tag{68}$$

D'autre part, d'après (65) et $(P_2 f)$, on a

$$\forall\tau\in\Sigma\,,\quad B(\tau,\bar u^\varepsilon-\varepsilon^2u^2)=-a^\varepsilon(\bar\sigma^\varepsilon,\tau)+\varepsilon^2a_0(\sigma^2,\tau)-\varepsilon^4a_4(\sigma^0,\tau)$$

et, d'après l'équi-continuité des formes a^ε, on déduit de (68)

$$\sup_{\tau\in\Sigma}\frac{B(\tau, u^{*\varepsilon})}{|\tau|}\leqslant C\varepsilon^2\,, \qquad \text{qui fournit}$$

$$\exists C,\ \forall\varepsilon\,, \qquad \|u^\varepsilon - u^0\|\leqslant C\varepsilon^2\,. \tag{69}$$

Les estimations (68) et (69) sont les majorations a priori souhaitées.

étape 2. – Nous ne la détaillons pas; on déduit de (68) et (69) des résultats de convergence faible, puis, considérant comme dans [8] le produit scalaire

$$a(\sigma, \tau) = (a_0 + a_2 + a_4)(\sigma, \tau)\,, \tag{70}$$

les résultats de convergence forte au moyen de l'étude de $a^\varepsilon(\bar\sigma^\varepsilon/\varepsilon^2, \bar\sigma^\varepsilon/\varepsilon^2)$.

En conclusion, insistons sur le fait que le Théorème 1 a fourni des résultats de convergence optimaux; on exploitera ces résultats en revenant à l'ouvert de départ $\omega\times]-e, e[$. Pour cette discussion, nous renvoyons au paragraphe 3 où seront interprétés simultanément les cas statique et dynamique.

2. – Cas dynamique.

Nous nous intéressons maintenant au cas d'une plaque élastique en mouvement; le principe de la méthode et le choix du cadre fonctionnel ont été donnés au paragraphe 1.

2.1. *Problèmes* (P^ε), (P_0), (P_2).

Pour une plaque d'épaisseur $2e$ et de masse volumique ${}^e\varrho$ le problème que nous considérons est donc le problème d'évolution associé à (18)

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } ({}^e\sigma, {}^eu)\in L^\infty(0, T; \Sigma^e\times X^e)\,, \quad ({}^eu)'\in L^\infty\big(0, T; (L^2(\Omega^e))^3\big) \\ \forall\tau\in\Sigma^e\,, \quad {}^ea({}^e\sigma, \tau) + {}^eB(\tau, {}^eu) = 0 \\ \forall v\in X^e\,, \quad -\,{}^e\varrho\langle({}^eu)'', v\rangle_{(X^e)',(X^e)} + {}^eB({}^e\sigma, v) = {}^eF(v) \\ {}^eu(0) = {}^eU\,, \quad {}^eu'(0) = {}^eV\,. \end{array}\right. \tag{71}$$

De façon classique, on a [6]:

Pour $\quad {}^eF\in L^2(0, T; (X^e)')\,, \quad ({}^eF)'\in L^2(0, T; (X^e)')\,, \quad {}^eU\in X^e\,, \quad {}^eV\in\big(L^2(\Omega^e)\big)^3\,,$

le problème (71) a une solution et une seule; de plus $({}^eu)''\in L^\infty(0, T; (X^e)')$.

Nous considérons maintenant, comme au paragraphe 1, la plaque comme élément d'une «famille de plaques» d'épaisseurs 2ε, de mêmes coefficients E et ν, soumises à des forces ${}^\varepsilon F$, et de masses volumiques de la forme $\varrho\varepsilon^2$; pour une discussion de ce dernier choix, nous renvoyons à [8] ou à la partie 3. Par les changements (7) immédiatement étendus à des fonctions dépendant du temps, et pour des forces appliquées ${}^\varepsilon F$ de la forme

$$ {}^\varepsilon F(v) = -\int_{\Omega^\varepsilon} {}^\varepsilon f_i v_i - \int_{\Gamma_+^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon} {}^\varepsilon g_3 v_3 \,, \tag{72} $$

on définit une suite de problèmes (P^ε) grâce à la

PROPOSITION 7. – *Si le système de forces vérifie*

$$ j({}^\varepsilon f_\alpha) = f_\alpha^0 \,, \quad j({}^\varepsilon f_3) = \varepsilon f_3^0 \,, \quad k({}^\varepsilon g_3) = \varepsilon^3 g_2^0 $$

où

$$ (f_i^0, g_3^0) \,, \quad (f_i^{0'}, g_3^{0'}) \in L^2\big(0, T; (L^2(\Omega))^3 \times L^2(\Gamma^+ \cup \Gamma^-)\big) \,, \tag{73} $$

si U^ε *et* V^ε *sont définis au moyen de* ${}^\varepsilon U$, ${}^\varepsilon V$ *par les changements* (7), *alors* $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ *est l'unique solution du problème*

$$ (P^\varepsilon) \quad \begin{cases} (\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) \in L^\infty(0, T; \Sigma \times X) \,, \quad (u^\varepsilon)' \in L^\infty\big(0, T; (L^2(\Omega))^3\big) \\ \forall \tau \in \Sigma \,, \quad a^\varepsilon(\sigma^\varepsilon, \tau) + B(\tau, u^\varepsilon) = 0 & (74) \\ \forall v \in X \,, \quad -\varrho\langle u_3^{\varepsilon''}, v_3\rangle - \varrho\varepsilon^2\langle (u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon)'', (v_1, v_2)\rangle + B(\sigma^\varepsilon, v) = F^0(v) & (75) \\ u^\varepsilon(0) = U^\varepsilon \,, \quad u^{\varepsilon'}(0) = V^\varepsilon & (76) \end{cases} $$

avec

$$ F^0(v) = -(f_i^0, v_i) - \int_{\Gamma^+ \cup \Gamma^-} g_3^0 v_3 \,; \tag{77} $$

de plus,

$$ (u^\varepsilon)'' \in L^\infty(0, T; X') \,. $$

Notons que dans (75) — équation dans $L^\infty(0, T)$ — les crochets désignent les dualités $\langle L^\infty(0, T; X_3'), X_3\rangle$ ou $\langle L^\infty(0, T; X_{12}'), X_{12}\rangle$; pour découpler u_1^ε et u_2^ε, on peut écrire (75) sous la forme de l'équation de $D'(0, T)$

$$ \forall v \in X \,, \quad -\varrho(u_3^{\varepsilon''}, v_3) - \varrho\varepsilon^2(u_\alpha^{\varepsilon''}, v_\alpha) + B(\sigma^\varepsilon, v) = F^0(v) \tag{78} $$

où $(\cdot,\cdot)$ désigne la dualité $\big(D'(0, T; L^2(\Omega)), L^2(\Omega)\big)$.

D'autre part, signalons que désormais nous noterons $L^\infty(0, T; X)$ sous la forme usuelle $L^\infty(X)$, $C^0([0, T]; L^2(\Omega))$ sous la forme $C^0(L^2(\Omega))$, etc. et que le symbole [ ] sera utilisé pour les différents produits de dualité sur ω.

2.1.1. *Problème* (P_0). – Considérons un développement asymptotique de la forme

$$(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon) = (\sigma^0, u^0) + \varepsilon(\sigma^1, u^1) + \ldots ;$$

par identification des termes en ε^0 dans le problème (P^ε), nous définissons un problème limite (P_0)

$$(P_0) \qquad \begin{cases} (\sigma^0, u^0) \in L^\infty(\Sigma \times X), \quad u_3^{0\prime} \in L^\infty(L^2(\Omega)) \\ \forall \tau \in \Sigma, \quad a_0(\sigma^0, \tau) + B(\tau, u^0) = 0 \\ \forall v \in X, \quad -\varrho\langle u_3^{0\prime\prime}, v_3\rangle + B(\sigma^0, v) = F^0(v) \\ u_3^0(0) = U_3^0, \quad u_3^{0\prime}(0) = V_3^0 . \end{cases}$$

Passant par l'intermédiaire d'un problème (P_0f) où les fonctions-test ne décrivent que X_{KL}, on obtient le résultat d'existence

PROPOSITION 8. – *Si* F_0 *est de la forme* (77) *avec*

$$f_3^0 \in H^1(L^2(\Omega)), \quad g_3^0 \in H^1(L^2(\Gamma^+ \cup \Gamma^-)) \tag{79}$$

$$f_\alpha^0 \text{ indépendant de } x_3, \quad f_\alpha^0 \in L^\infty(L^2(\omega)) \tag{80}$$

$$U_3^0 \in (H^4 \cap H_0^2)(\omega), \quad V_3^0 \in H_0^2(\omega), \tag{81}$$

alors le problème (P_0) *admet une solution et une seule* (σ^0, u^0) *qui est donnée par*

1) u_3^0 *est l'unique solution du problème d'évolution sur* ω

$$\begin{cases} u_3^0 \in L^\infty(H_0^2(\omega)), \quad u_3^{0\prime} \in L^\infty(L^2(\omega)) \\ 2\varrho u_3^{0\prime\prime} + \dfrac{2}{3}\dfrac{E}{1-\nu^2}\Delta^2 u_3^0 = \displaystyle\int_{-1}^{1} f_3^0 + g_3^{0+} + g_3^{0-} \\ u_3^0(0) = U_3^0, \quad u_3^{0\prime}(0) = V_3^0 \end{cases} \tag{82}$$

2) $u_\alpha^0 = \boldsymbol{u}_\alpha^0 - x_3\,\partial_\alpha u_3^0$, *où* $\boldsymbol{u}^0$ *est l'unique solution du problème*

$$\boldsymbol{u}^0 \in L^\infty\big((H_0^1(\omega))^2\big), \quad K\boldsymbol{u}^0 = 2(f_1^0, f_2^0) \tag{83}$$

$$\text{3)}\ \sigma_{\alpha\beta}^0 = \frac{E}{1-\nu^2}\{(1-\nu)\gamma_{\alpha\beta}(\boldsymbol{u}^0) + \nu\gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0)\delta_{\alpha\beta}\} \tag{84}$$

$$\text{4)}\ \sigma_{\alpha 3}^0 = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}(1-x_3^2)\,\partial_\alpha \Delta u_3^0 \tag{85}$$

$$\text{5)}\ \sigma_{33}^0 = \varrho u_3^{0\prime\prime}\left(\frac{x_3^3 - x_3}{2}\right) - \int_{-1}^{x_3} f_3^0 + \left(\int_{-1}^{1} f_3^0\right)\frac{(x_3+1)(-x_3^2+x_3+2)}{4} + \frac{1}{2}(g_3^{0+} - g_3^{0-}) + \frac{x_3}{4}(3-x_3^2)(g_3^{0+} + g_3^{0-}) \tag{86}$$

et (σ^0, u^0) *vérifie*

(87) $$u_3^0 \in C^0\big((H^4 \cap H_0^2)(\omega)\big)\,, \quad u_3^{0\prime} \in C^0\big(H_0^2(\omega)\big)\,, \quad u_3^{0\prime\prime} \in C^0\big(L^2(\omega)\big)$$

(88) $$\boldsymbol{u}_\alpha^0 \in L^\infty\big((H^2 \cap H_0^1)(\omega)\big)\,, \quad \sigma_{\alpha\beta}^0 \in L^\infty\big(H^1(\Omega)\big)\,.$$

DÉMONSTRATION. – Une fois (82), (83), (84) obtenus, on remarque que leurs solutions ont, grâce aux hypothèses faites les régularités (87)-(88), ainsi $\sigma_{\alpha\beta}^0$ et $u_3^{0\prime\prime}$ sont-ils assez réguliers pour que l'on puisse utiliser le Lemme 3 pour la construction de $\sigma_{\alpha 3}^0$ et σ_{33}^0 qui se fait alors comme dans la Proposition 5.

Nous aurons aux paragraphes 2.1.2 et 2.2 besoin de résultats de régularité supplémentaires sur u^0; donnons-les ci-dessous; nous posons

(89) $$\psi = \int_{-1}^{1} f_3^0 + g_3^{0+} + g_3^{0-}\,.$$

COROLLAIRE 1. – *Si*

1) $f_3^0 \in H^2\big(L^2(\Omega)\big)\,, \quad g_3^0 \in H^2\big(L^2(\Gamma^+ \cup \Gamma^-)\big)$;

2) $f_\alpha^0 \in W^{2,\infty}\big(H^1(\omega)\big)$;

(90) 3) $U_3^0 \in (H^4 \cap H_0^2)(\omega)\,, \quad \psi(0) - \dfrac{2}{3}\dfrac{E}{1-\nu^2}\Delta^2 U_3^0 \in H_0^2(\omega)\,, \quad V_3^0 \in (H^4 \cap H_0^2(\omega)$

alors

(91) 4) $u_3^0 \in C^1\big((H^4 \cap H_0^2)(\omega)\big)\,, \quad u_3^{0\prime\prime} \in C^0\big(H_0^2(\omega)\big)\,, \quad u_3^{0(3)} \in C^0\big(L^2(\omega)\big)$;

(92) 5) $\boldsymbol{u}_\alpha^0 \in W^{2,\infty}\big((H^3 \cap H_0^1)(\omega)\big)$.

COROLLAIRE 2. – *Si*

1) $f_3^0 \in H^3\big(L^2(\Omega)\big)\,, \quad g_3^0 \in H^3\big(L^2(\Gamma^+ \cup \Gamma^-)\big)$;

2) $f_\alpha^0 \in H^3\big(H^1(\omega)\big)$;

(93) 3) $U_3^0 \in (H^4 \cap H_0^2)(\omega)\,, \quad \psi(0) - \dfrac{2}{3}\dfrac{E}{1-\nu^2}\Delta^2 U_3^0 \in (H^3 \cap H_0^2)(\omega)$

(94) 4) $V_3^0 \in (H^4 \cap H_0^2)(\omega)\,, \quad \psi'(0) - \dfrac{2}{3}\dfrac{E}{1-\nu^2}\Delta^2 V_3^0 \in H_0^1(\omega)$

alors

(95) 5) $u_3^0 \in C^1\big((H^4 \cap H_0^2)(\omega)\big)\,, \quad u_3^{0\prime\prime} \in C^0\big((H^3 \cap H_0^2)(\omega)\big)\,, \quad u_3^{0(3)} \in C^0\big(H_0^1(\omega)\big)$;

(96) 6) $\boldsymbol{u}_\alpha^0 \in H^3\big((H^3 \cap H_0^1)(\omega)\big)$.

DÉMONSTRATIONS. – Démontrons, par exemple, le corollaire 2; le problème (82) est du type

$$\left\{\begin{array}{l} u \in L^{\infty}\big(H_0^2(\omega)\big)\,, \qquad u' \in L^{\infty}\big(L^2(\omega)\big)\,,\\ u'' + \Delta^2 u = \varphi\,,\\ u(0) = p\,, \qquad u'(0) = q\,. \end{array}\right. \tag{97}$$

On dérive 3 fois le problème (97) et l'on a ainsi 4 problèmes qui sont encore du type (97); pour les 3 premiers, on utilise le résultat classique [7]:

si $\varphi \in L^2\big(L^2(\omega)\big)$, $p \in H_0^2(\omega)$, $q \in L^2(\omega)$, alors $u \in C^0\big(H_0^2(\omega)\big)$, $u' \in C^0\big(L^2(\omega)\big)$; pour le 4è, on utilise le résultat obtenu par interpolation [7]:

si $\varphi \in L^2\big(H^{-1}(\omega)\big)$, $p \in H_0^1(\omega)$, $q \in H^{-1}(\omega)$, alors $u \in C^0\big(H_0^1(\omega)\big)$, $u' \in C^0\big(H^{-1}(\omega)\big)$. On vérifie aisément que les conditions (93), (94) ont été choisies pour que les couples successifs de données initiales aient les régularités demandées.

2.1.2. *Le Problème* (P_2). – Nous avons vu en 2.1.1 que sous des hypothèses convenables, le problème (P_0) a une solution; ceci autorise à écrire le problème, noté (P_2), obtenu par identification des termes en ε^2 de (P^ε); restreint à X_{KL}, (P_2) a la forme

$$(P_2 f)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (\sigma^2, u^2)\colon [0, T] \to S\times X & \\ \forall \tau \in \Sigma\,, & a_0(\sigma^2, \tau) + B(\tau, u^2) = -\,a_2(\sigma^0, \tau)\\ \forall v \in X_{KL}\,, & -\,\varrho(u_3^{2''}, v_3) + B(\sigma^2, v) = \varrho(u_\alpha^{0''}, v_\alpha)\\ u_3^2(0) = U_3^2\,, \quad u_3^{2'}(0) = V_3^2\,. & \end{array}\right.$$

Donnons un résultat d'existence pour $(P_2 f)$.

PROPOSITION 9. – *Sous les hypothèses du Corollaire* 1 *et pour* U_3^2 *et* V_3^2 *vérifiant*

$$U_3^2 = \boldsymbol{U}_3^2 - \frac{\nu}{1-\nu}\, x_3 \gamma_{\mu\mu} \boldsymbol{u}^0(0) + \frac{\nu}{1-\nu}\,\frac{x_3^2}{2}\,\Delta U_3^0 \tag{98}$$

$$V_3^2 = \boldsymbol{V}_3^2 - \frac{\nu}{1-\nu}\, x_3 \gamma_{\mu\mu} \boldsymbol{u}^{0'}(0) + \frac{\nu}{1-\nu}\,\frac{x_3^2}{2}\,\Delta V_3^0 \tag{99}$$

avec

$$\boldsymbol{U}_3^2 \in H^2(\omega)\,, \qquad \boldsymbol{U}_3^2|_\gamma = -\frac{1}{10}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,\Delta U_3^0|_\gamma\,, \qquad \partial_n \boldsymbol{U}_3^2|_\gamma = -\frac{8+\nu}{10(1-\nu)}\,\partial_n \Delta U_3^0|_\gamma$$

$$\text{et} \qquad \boldsymbol{V}_3^2 \in L^2(\omega)\,,$$

il existe un couple (σ^2, u^2) *et un seul solution de* $(P_2 f)$ *et vérifiant*

$$(\sigma^2, u^2) \in L^\infty(S \times X), \quad u_3^{2\prime} \in L^\infty(L^2(\Omega)).$$

Il est donné par

$$u_3^2 = \boldsymbol{u}_3^2 - \frac{\nu}{1-\nu} x_3 \gamma_{\mu\mu} \boldsymbol{u}^0 + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{x_3^2}{2} \Delta u_3^0, \tag{100}$$

où $\boldsymbol{u}_3^2$ *est l'unique solution du problème d'évolution sur* ω

$$\left\{\begin{aligned}
&(101)\quad \boldsymbol{u}_3^2 \in L^\infty(H^2(\omega)), \quad \boldsymbol{u}_3^{2\prime} \in L^\infty(L^2(\omega)), \quad \boldsymbol{u}_3^2|_\gamma = -\frac{1}{10}\frac{\nu}{1-\nu} \Delta u_3^0|_\gamma, \\
&\qquad\qquad \partial_n \boldsymbol{u}_3^2|_\gamma = -\frac{8+\nu}{10(1-\nu)} \partial_n \Delta u_3^0|_\gamma \\
&(102)\quad 2\varrho \boldsymbol{u}_3^{2\prime\prime} + \frac{2}{3}\frac{E}{1-\nu^2} \Delta^2 \boldsymbol{u}_3^2 = \frac{34-14\nu}{15(1-\nu)} \varrho \Delta u_3^{0\prime\prime} - \frac{\nu}{1-\nu} \Delta \int_{-1}^{1} x_3 \int_{-1}^{1} f_3 + \frac{3\nu - 8}{10(1-\nu)} \Delta \psi \\
&(103)\quad \boldsymbol{u}_3^2(0) = \boldsymbol{U}_3^2, \quad \boldsymbol{u}_3^{2\prime}(0) = \boldsymbol{V}_3^2
\end{aligned}\right.$$

$$\text{et} \quad u_\alpha^2 = \boldsymbol{u}_\alpha^2 - x_3\, \partial_\alpha \boldsymbol{u}_3^2 + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{x_3^2}{2} \partial_\alpha \gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0) - \partial_\alpha \Delta u_3^0 \frac{1}{1-\nu}\left(x_3 + \frac{x_3^3}{3}\left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\right) \tag{104}$$

où $\boldsymbol{u}^2$ *est l'unique solution du problème quasi-statique sur* ω

$$\left\{\begin{aligned}
&(105)\quad \boldsymbol{u}^2 \in L^\infty(H^1(\omega)^2), \quad \boldsymbol{u}_\alpha^2|_\gamma = -\frac{1}{6}\frac{\nu}{1-\nu} \partial_\alpha \gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0)|_\gamma \\
&(106)\quad K\boldsymbol{u}^2 = -2\varrho \boldsymbol{u}^{0\prime\prime} + \frac{1}{3}\frac{E\nu}{(1-\nu^2)(1-\nu)} \operatorname{grad} \Delta \gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0) + \frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{grad} \int_{-1}^{1} \sigma_{33}^0 \\
&(107)\quad \sigma_{\alpha\beta}^2 = \frac{E}{1-\nu^2}\{(1-\nu)\gamma_{\alpha\beta}(u^2) + \nu \gamma_{\mu\mu}(u^2)\delta_{\alpha\beta}\} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{33}^0 \delta_{\alpha\beta}.
\end{aligned}\right.$$

DÉMONSTRATION. – Dans une première étape, on cherche les couples (σ^2, u^2) de $L^\infty(S \times (H^1(\Omega))^3)$ tels que $u_3^{2\prime} \in L^\infty(L^2(\Omega))$, satisfaisant l'équation de comportement de $(P_2 f)$ et l'appartenance de u^2 à X; les calculs sont analogues à ceux du cas statique (Proposition 6); ces couples sont donc ceux de la forme (107), (104), (106) avec

$$\boldsymbol{u}_3^2 \in L^\infty(H^2(\omega)), \quad \boldsymbol{u}_3^{2\prime} \in L^\infty(L^2(\omega)) \quad \text{et} \tag{108}$$

$$\boldsymbol{u}_3^2|_\gamma = -\frac{1}{10}\frac{\nu}{1-\nu} \Delta u_3^0|_\gamma, \quad \partial_n \boldsymbol{u}_3^2|_\gamma = -\frac{8+\nu}{10(1-\nu)} \partial_n \Delta u_3^0|_\gamma$$

$$\boldsymbol{u}_\alpha^2 \in L^\infty(H^1(\omega)) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{u}_\alpha^2|_\gamma = -\frac{1}{6}\frac{\nu}{1-\nu} \partial_\alpha \gamma_{\mu\mu} \boldsymbol{u}^0|_\gamma. \tag{109}$$

Notons que u_3^0 et $\boldsymbol{u}^0$ sont assez réguliers pour que les équations (108), (109) aient un sens; elles ont une infinité de solutions.

On cherche ensuite parmi les solutions de (108), (109) celles pour lesquelles (σ^2, u^2) satisfont l'équation d'équilibre de $(P_2 f)$ et les conditions initiales; par décomposition de X_{KL}, l'équation d'équilibre équivaut aux deux équations de $D'(0, T)$

$$\text{(110)} \qquad \forall \boldsymbol{v} \in (H_0^1(\omega))^2 , \qquad -(\sigma_{\alpha\beta}^2, \gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{v}) = \varrho(u_\alpha^{0''}, \boldsymbol{v}_\alpha)$$

$$\text{(111)} \qquad \forall v_3 \in H_0^2(\omega) , \qquad -\varrho(u_3^{2''}, v_3) + (\sigma_{\alpha\beta}^2, x_3\, \partial_{\alpha\beta} v_3) = \varrho(u_\alpha^{0''}, -x_3\, \partial_\alpha v_3) .$$

Etudions (110); d'après la forme de u^0, (110) équivaut à

$$\forall \boldsymbol{v} \in (H_0^1(\omega))^2 , \qquad -(\sigma_{\alpha\beta}^2, \gamma_{\alpha\beta}\boldsymbol{v}) = 2\varrho[u_\alpha^{0''}, \boldsymbol{v}_\alpha]$$

et grâce à l'expression (107) de $\sigma_{\alpha\beta}^2$, à

$$\text{(112)} \qquad K\boldsymbol{u}^2 = \frac{1}{3}\,\frac{E\nu}{(1-\nu^2)(1-\nu)}\,\operatorname{grad} \Delta\gamma_{\mu\mu}(\boldsymbol{u}^0) + \frac{\nu}{1-\nu}\,\operatorname{grad}\int_{-1}^{1}\sigma_{33}^0 - 2\varrho\boldsymbol{u}^{0''} ,$$

le second membre de (112) est dans $L^\infty(H^{-1}(\omega))$; (112) et (109) déterminent donc $\boldsymbol{u}^2$.

Etudions (111); d'après la forme de u^0, (111) équivaut à

$$\forall v_3 \in H_0^2(\omega) , \qquad -\varrho(u_3^{2''}, v_3) + (\sigma_{\alpha\beta}^2, x_3\, \partial_{\alpha\beta} v_3) = \tfrac{2}{3}\varrho[\partial_\alpha u_3^{0''}, \partial_\alpha v_3]$$

et grâce aux expressions (107), (100) de $\sigma_{\alpha\beta}^2$ et u_3^2 à

$$\text{(113)} \qquad -2\varrho\boldsymbol{u}_3^{2''} - \frac{2}{3}\,\frac{E}{1-\nu^2}\,\Delta^2\boldsymbol{u}_3^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)(1-\nu)}\,\frac{2}{3}\,\frac{8+\nu}{10}\,\Delta^3 u_3^0 - \frac{\nu}{1-\nu}\,\Delta\int_{-1}^{1} x_3\sigma_{33}^0 + \\ + \varrho\,\frac{1}{3}\left(\frac{\nu}{1-\nu} - 2\right)\Delta u_3^{0''};$$

utilisant l'expression (86) de σ_{33}^0 afin de faire apparaître toutes les contributions de $\Delta u_3^{0''}$, on transforme (113) tout d'abord en

$$-2\varrho\boldsymbol{u}_3^{2''} - \frac{2}{3}\,\frac{E}{1-\nu^2}\,\Delta^2\boldsymbol{u}_3^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)(1-\nu)}\,\frac{2}{3}\,\frac{8+\nu}{10}\,\Delta^3 u_3 + \varrho\Delta u_3^{0''}\,\frac{17\nu-10}{15(1-\nu)} + \\ + \frac{\nu}{1-\nu}\,\Delta\int_{-1}^{1}\left(x_3\int_{-1}^{x_3} f_3\right) - \frac{2}{5}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,\Delta\psi$$

et enfin au moyen de l'équation (82) satisfaite par u_3^0 en

$$(114)\qquad +2\varrho \boldsymbol{u}_3^{2''} + \frac{2}{3}\frac{E}{1-\nu^2}\Delta^2\boldsymbol{u}_3^2 = \frac{34-14\nu}{14(1-\nu)}\varrho\,\Delta u_3^{0''} - \frac{\nu}{1-\nu}\Delta\int_{-1}^{1}\left(x_3\int_{-1}^{x_3} f_3\right) + \\ + \frac{3\nu-8}{10(1-\nu)}\Delta\psi\,.$$

Munie des conditions de régularité et de bord (108) et de conditions initiales du type

$$(115)\qquad \boldsymbol{u}_3^2(0) = \boldsymbol{U}_3^2\,,\quad \boldsymbol{u}_3^2(0) = \boldsymbol{V}_3^2\,,$$

(114) définit un problème d'évolution du second ordre qui, puisque les conditions de bord varient avec t, est une variante du problème classique. Le second membre ainsi que sa dérivée étant d'après le Corollaire 1 dans $L^2(H^{-2}(\omega))$, on a par extension du théorème usuel, existence et unicité de $\boldsymbol{u}_3^2$ satisfaisant (108), (114), (115) pour

$$\boldsymbol{U}_3^2 \in H^2(\omega)\,,\qquad \boldsymbol{U}_3^2|_\gamma = -\frac{1}{10}\frac{\nu}{1-\nu}\Delta u_3^0(0)|_\gamma\,,\qquad \partial_n\boldsymbol{U}_3^2|_\gamma = -\frac{8+\nu}{10(1-\nu)}\partial_n\Delta u_3^0(0)|_\gamma\,,$$

et $\boldsymbol{V}_3^2 \in L^\infty(\omega)$.

Enfin, on remarque qu'il est équivalent d'imposer à u_3^2 les conditions initiales de $(P_2 f)$ et à $\boldsymbol{u}_3^2$ les conditions (115); notons que c'est la forme (100) de u_3^2 qui a permis de donner un sens précis aux conditions initiales de $(P_2 f)$.

Afin de pouvoir mettre en oeuvre des procédés de majoration a priori au paragraphe 2.2, nous renforçons les conditions de régularité de la Proposition 9.

COROLLAIRE 3. – *Sous les hypothèses du Corollaire 2, l'équation de comportement de $(P_2 f)$ a des solutions (σ^2, u^2) vérifiant*

$$(116)\qquad \sigma^2 \in H^1(S)\,,\quad u^2 \in H^1(X)\,,\quad u^{2''} \in L^2\big((L^2(\Omega))^3\big)\,.$$

DÉMONSTRATION. – Il suffit de reprendre la 1ère étape de la démonstration précédente: on constate que dans les expressions (107), (104), (100) les contributions dues à u^0 ont la régularité souhaitée et que l'on peut choisir $\boldsymbol{u}_\alpha^2$ et $\boldsymbol{u}_3^2$ satisfaisant les conditions de bord (109), (108) et vérifiant

$$\boldsymbol{u}_\alpha^2 \in H^1\big(H^1(\omega)\big)\,,\quad \boldsymbol{u}_\alpha^{2''} \in L^2\big(L^2(\omega)\big)\,,\quad \boldsymbol{u}_3^2 \in H^1\big(H^2(\omega)\big)\,,\quad \boldsymbol{u}_3^{2''} \in L^2\big(H^1(\omega)\big)\,.$$

REMARQUE 5. – Il serait contraignant dans les choix de f_3^0, g_3^0, U_3^0, V_3^0 d'exiger la régularité (116) d'une solution de toutes les équations de $(P_2 f)$.

2.2. *Résultats de convergence.*

Nous souhaitons donner ici, de même que nous l'avons fait dans le cas statique, un résultat de convergence à l'ordre 2, c'est-à-dire du type

$$\varepsilon^{-2}(\sigma^\varepsilon - \sigma^0) \to \sigma^2 , \qquad \varepsilon^{-2}(u^\varepsilon - u^0) \to u^2 ,$$

où $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$, (σ^0, u^0), (σ^2, u^2) sont les solutions des problèmes (P^ε), (P_0), (P_2) décrits précédemment; dans un premier temps, on peut obtenir un résultat de majoration a priori.

PROPOSITION 10. – *Sous les hypothèses du Corollaire 2 et si les données initiales de (P^ε) et (P_0) sont telles que*

$$|(\sigma^\varepsilon_{\alpha\beta} - \sigma^0_{\alpha\beta})(0)| \leqslant C\varepsilon^2 , \qquad |(\sigma^\varepsilon_{\alpha 3} - \sigma^0_{\alpha 3})(0)| \leqslant C\varepsilon , \qquad |\sigma^\varepsilon_{33}(0)| \leqslant C , \tag{117}$$

$$|u^{\varepsilon\prime}_3(0) - u^{0\prime}_3(0)| \leqslant C\varepsilon^2 , \quad |u^{\varepsilon\prime}_\alpha(0) - u^{0\prime}_\alpha(0)| \leqslant C\varepsilon \tag{118}$$

alors

$$1)\ \varepsilon^{-2}(\sigma^\varepsilon_{\alpha\beta} - \sigma^0_{\alpha\beta}) , \qquad \varepsilon^{-1}(\sigma^\varepsilon_{\alpha 3} - \sigma^\varepsilon_{\alpha 3}) , \qquad \sigma^\varepsilon_{33} \textit{ sont bornées dans } L^\infty(L^2(\Omega)) , \tag{119}$$

$$2)\ \varepsilon^{-2}(u^\varepsilon - u^0) \quad \textit{est bornée dans} \quad L^\infty(X); \tag{120}$$

$$\varepsilon^{-2}(u^{\varepsilon\prime}_3 - u^{0\prime}_3) , \qquad \varepsilon^{-1}(u^{\varepsilon\prime}_\alpha - u^{0\prime}_\alpha) \quad \textit{sont bornées dans} \quad L^\infty(L^2(\Omega)) .$$

DÉMONSTRATION. – Choisissons une solution (σ^2, u^2) de l'équation de comportement de $(P_2 f)$ ayant la régularité (116) et introduisons les fonctions d'écart:

$$\bar\sigma = \sigma^\varepsilon - \sigma^0 , \qquad \bar u = u^\varepsilon - u^0$$

$$\sigma^* = \sigma^\varepsilon - \sigma^0 - \varepsilon^2\sigma^2 , \qquad u^* = u^\varepsilon - u^0 - \varepsilon^2 u^2 .$$

En utilisant (74) et ses analogues dans (P_0) et $(P_2 f)$, qu'il est commode d'appeler équations de comportement, on a

$$\forall \tau \in \Sigma , \quad a^\varepsilon(\sigma^*, \tau) + B(\tau, u^*) = -\varepsilon^4 a_4(\sigma^0, \tau) - \varepsilon^4 a_2(\sigma^2, \tau) , \tag{121}$$

en utilisant les équations d'équilibre de (P^ε) et (P_0), on a

$$\forall v \in X , \quad B(\bar\sigma, v) = \varrho(\bar u''_3, v_3) + \varrho\varepsilon^2(u^{\varepsilon\prime\prime}_\alpha, v_\alpha) . \tag{122}$$

On dérive formellement (121), et on prend $\tau = \bar\sigma$; puis l'on prend $v = u^{*\prime}$ dans (122) (pour une justification de ce procédé formel, on peut voir [7]; noter que (122) n'étant valable que pour v élément de X, l'appartenance de $u^2(t)$ et donc de $u^*(t)$

à X est essentielle); on obtient

$$a^{\varepsilon}(\sigma^{*\prime}, \bar{\sigma}) + \varrho(\bar{u}_3'', u_3^{*\prime}) + \varrho\varepsilon^2(u_\alpha^{\varepsilon''}, u_\alpha^{*\prime}) = -\varepsilon^4 a_4(\sigma^{0\prime}, \bar{\sigma}) - \varepsilon^4 a_2(\sigma^{2\prime}, \bar{\sigma})$$

ou encore

$$(123) \qquad a^{\varepsilon}(\bar{\sigma}', \bar{\sigma}) + \varrho(\bar{u}_3'', \bar{u}_3') + \varrho\varepsilon^2(\bar{u}_\alpha'', \bar{u}_\alpha') = \varepsilon^2 a_0(\sigma^{2\prime}, \bar{\sigma}) - \varepsilon^4 a_4(\sigma^{0\prime}, \bar{\sigma}) + \\ + \varrho\varepsilon^4(u_\alpha^{0''}, u_\alpha^{2\prime}) - \varrho\varepsilon^2(u_\alpha^{0''}, \bar{u}_\alpha) + \varrho\varepsilon^4(\bar{u}_\alpha'', u_\alpha^{2\prime}) + \varrho\varepsilon^2(\bar{u}_3'', u_3^{2\prime});$$

on a ainsi fait apparaître la dérivée de χ^{ε}, où

$$(124) \qquad \chi^{\varepsilon} = a^{\varepsilon}(\bar{\sigma}, \bar{\sigma}) + \varrho|\bar{u}_3'|^2 + \varrho\varepsilon^2|\bar{u}_\alpha'|^2$$

et par intégration par parties de certains termes on transforme (123) en

$$(125) \qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\chi^{\varepsilon} = \theta_1^{\varepsilon} + \theta_2^{\varepsilon} + \theta_3^{\varepsilon} + \varphi_2^{\varepsilon\prime} + \varphi_3^{\varepsilon\prime}$$

avec

$$\begin{cases} \theta_1^{\varepsilon} = \varepsilon^2 a_0(\sigma^{2\prime}, \bar{\sigma}) - \varepsilon^4 a_4(\sigma^{0\prime}, \bar{\sigma}) + \varrho\varepsilon^4(u_\alpha^{0''}, u_\alpha^{2\prime}) \\ \theta_2^{\varepsilon} = -\varrho\varepsilon^4(\bar{u}_\alpha', u_\alpha^{2''}) \\ \theta_3^{\varepsilon} = \varrho\varepsilon^2(u_\alpha^{0(3)}, \bar{u}_\alpha) - \varrho\varepsilon^2(\bar{u}_3', u_3^{2''}) \\ \varphi_2^{\varepsilon} = \varrho\varepsilon^4(\bar{u}_\alpha', u_\alpha^{2\prime}) \\ \varphi_3^{\varepsilon} = -\varrho\varepsilon^2(u_\alpha^{0''}, \bar{u}_\alpha) + \varrho\varepsilon^2(\bar{u}_3', u_3^{2\prime}) . \end{cases}$$

Remarquons que $\chi^{\varepsilon} \in L^{\infty}(0, T)$ et que d'après les Corollaires 2 et 3 les éléments θ_i^{ε} et φ_i^{ε} sont bien définis: par exemple, $u_\alpha^{0(3)}$ et $u_3^{2''}$ étant dans $L^2(L^2(\Omega))$, θ_3^{ε} appartient à $L^1(0, T)$; nous allons maintenant majorer $\theta_i^{\varepsilon}, \varphi_i^{\varepsilon}$; nous utiliserons la majoration suivante

ETAPE 1.

$$(126) \qquad \exists C,\ \exists k \in L^{\infty}(0, T),\ \forall \varepsilon, \qquad \|\bar{u}\| \leqslant C(\varepsilon^2 k + \chi^{\varepsilon\frac{1}{2}}) \qquad \text{pp.}$$

En effet d'après les équations de comportement de (P^{ε}), (P_0) et (P_2), on a

$$\forall \tau \in \Sigma, \quad B(\tau, \bar{u}) = -a^{\varepsilon}(\bar{\sigma}, \tau) + \varepsilon^2 a_0(\sigma^2, \tau) - \varepsilon^4 a_4(\sigma^0, \tau) + \varepsilon^2 B(\tau, u^2);$$

or

$$a^{\varepsilon}(\bar{\sigma}, \tau) \leqslant a^{\varepsilon}(\bar{\sigma}, \bar{\sigma})^{\frac{1}{2}} a^{\varepsilon}(\tau, \tau)^{\frac{1}{2}} \leqslant C\chi^{\varepsilon\frac{1}{2}}|\tau|;$$

on majore de même les termes suivants et utilisant l'égalité

$$\|\bar{u}\|_X = \sup_{\tau \in \Sigma} \frac{B(\tau, \bar{u})}{|\tau|},$$

on obtient (126) avec $k = a_0(\sigma^2, \sigma^2)^{\frac{1}{2}} + a_4(\sigma^0, \sigma^0)^{\frac{1}{2}} + |\gamma(u^2)|$

ETAPE 2. – On montre que

$$\exists C,\ \exists l \in L^1(0, T),\ \forall \varepsilon, \quad |\theta_\alpha^\varepsilon| \leqslant C(\varepsilon^4 l + \chi^\varepsilon) \quad \text{pp.} \tag{127}$$

En effet: par exemple,

$$|\theta_1^\varepsilon| \leqslant \varepsilon^2 a_0(\sigma^{2'}, \sigma^{2'})^{\frac{1}{2}} a_0(\bar{\sigma}, \bar{\sigma})^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^2 a_4(\sigma^{0'}, \sigma^{0'})^{\frac{1}{2}} \varepsilon^2 a_4(\bar{\sigma}, \bar{\sigma})^{\frac{1}{2}} + \varrho\varepsilon^4 |u_\alpha^{0''}||u_\alpha^{2'}| \leqslant \tfrac{1}{2}\big(\varepsilon^4 l_1 + a^\varepsilon(\bar{\sigma}, \bar{\sigma})\big)$$

avec $l_1 = a_0(\sigma^{2'}, \sigma^{2'}) + a_4(\sigma^{0'}, \sigma^{0'}) + 2\varrho|u_\alpha^{0''}|\,|u_\alpha^{2'}|$.

ETAPE 3. – On montre que

$$\exists C,\ \exists m \in L^1(0, T),\ \forall \varepsilon, \quad |\theta_3^\varepsilon| \leqslant C(\varepsilon^4 m + \chi^\varepsilon) \quad \text{pp.} \tag{128}$$

On procède comme ci-dessus et l'on majore le terme $\|\bar{u}\|^2$ au moyen de (126); on obtient (128) avec

$$m = \|u_\alpha^{0(3)}\|^2_{X_{12'}} + |u_3^{2''}|^2 + k^2 .$$

Enfin, toujours au moyen de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de (126), on obtient

ETAPE 4.

$$\exists C,\ \exists c_0 < \tfrac{1}{2},\ \exists n \in L^\infty(0, T),\ \forall \varepsilon, \quad |\varphi_2^\varepsilon| + |\varphi_3^\varepsilon| \leqslant C\varepsilon^4 n + c_0 \chi^\varepsilon \quad \text{pp.} \tag{129}$$

avec

$$n = |u_\alpha^{2'}|^2 + \|u_\alpha^{0''}\|^2_{X_{12'}} + |u_3^{2'}|^2 + k^2 .$$

Revenons maintenant à (125), et intégrons; ainsi

$$\chi^\varepsilon(t) = \chi^\varepsilon(0) - 2\varphi_3^\varepsilon(0) - 2\varphi_2^\varepsilon(0) + 2\varphi_2^\varepsilon(t) + 2\varphi_3^\varepsilon(t) + 2\int_0^t \sum_{i=1}^3 \theta_i^\varepsilon(s)\, ds ,$$

utilisons (127)-(128)-(129):

$$\chi^\varepsilon(t) \leqslant \chi^\varepsilon(0) - 2\varphi_2^\varepsilon(0) - 2\varphi_3^\varepsilon(0) + C\varepsilon^4 n(t) + C\varepsilon^4 \int_0^t (l + m) + C\int_0^t \chi^\varepsilon + 2c_0 \chi^\varepsilon$$

et, comme $2c_0 < 1$,

$$\chi^\varepsilon(t) \leqslant C|\chi^\varepsilon(0) - 2\varphi_2^\varepsilon(0) - 2\varphi_3^\varepsilon(0)| + C\varepsilon^4\Big(\|n\|_\infty + \int_0^T (l+m)\Big) + C\int_0^t \chi^\varepsilon .$$

Enfin, grâce au lemme de Gronwall, on a

$$\chi^\varepsilon(t) \leqslant C|\chi^\varepsilon(0) - 2\varphi_2^\varepsilon(0) - 2\varphi_3^\varepsilon(0)| + C\varepsilon^4$$

et procédant comme à l'étape 4

$$\chi^\varepsilon(t) \leqslant C\big(\chi^\varepsilon(0) + \varepsilon^4\big) \qquad \text{pp.}$$

ce qui achève la démonstration.

On peut écrire les hypothèses sur les données initiales de la Proposition 10 uniquement en fonction des données sur les déplacements des problèmes (P^ε), (P_0): par un développement des équations de comportement de (P^ε) et (P_0), on démontre le

COROLLAIRE 4. – *Sous les hypothèses du Corollaire* 2 *et si les données initiales vérifient*

$$(130) \qquad \|U^\varepsilon - u(0)\| \leqslant C\varepsilon^2 , \qquad \left|\varepsilon^{-2}\gamma_{\alpha 3}(U^\varepsilon) + \frac{1}{2(1-\nu)}(1-x_3^2)\partial_\alpha \Delta u_3(0)\right| \leqslant C\varepsilon ,$$

$$\left|\varepsilon^{-2}\gamma_{33}(U^\varepsilon) - \frac{\nu}{\nu-1}\gamma_{\mu\mu}\big(u(0)\big)\right| \leqslant C\varepsilon^2$$

$$(131) \qquad |V_3^\varepsilon - u_3^{0'}(0)| \leqslant C\varepsilon^2 , \qquad |V_\alpha^\varepsilon - u_\alpha^{0'}(0)| \leqslant C\varepsilon ,$$

alors (119) *et* (120) *sont vérifiés.*

Enfin, nous pouvons énoncer le résultat de convergence souhaité.

THÉORÈME 2. – *Sous les hypothèses du Corollaire* 2 *et si les données initiales des problèmes* (P^ε) *et* (P_0) *sont telles que*

(132) (i) $\varepsilon^{-2}\big(U^\varepsilon - u^0(0)\big)$ *converge dans* $\big(H^1(\Omega)\big)^3$ *vers un élément* U^2 *de la forme*

$$1)\ \ U_3^2 = \boldsymbol{U}_3^2 - \frac{\nu}{1-\nu}x_3\gamma_{\mu\mu}\boldsymbol{u}^0(0) + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{x_3^2}{2}\Delta U_3^0$$

avec

$$\boldsymbol{U}_3^2 \in H^2(\omega) , \qquad \boldsymbol{U}_3^2|_\gamma = -\frac{1}{10}\frac{\nu}{1-\nu}\Delta U_3^0|_\gamma , \qquad \partial_n \boldsymbol{U}_3^2|_\gamma = -\frac{8+\nu}{10(1-\nu)}\partial_n \Delta U_3^0|_\gamma ;$$

$$2)\ \ U_\alpha^2 = \boldsymbol{U}_\alpha^2 - x_3\,\partial_\alpha \boldsymbol{U}_3^2 + \frac{\nu}{1-\nu}\partial_\alpha\gamma_{\mu\mu}\boldsymbol{u}(0) - \partial_\alpha\Delta U_3^0\frac{1}{1-\nu}\left(x_3 + \frac{x_3^3}{3}\left(\frac{\nu}{2} - 1\right)\right)$$

où U^2_α *est donnée par*

$$U^2_\alpha \in H^1(\omega)\,, \qquad U^2_\alpha|_\gamma = -\frac{1}{6}\frac{\nu}{1-\nu}\,\partial_\alpha\gamma_{\mu\mu}\boldsymbol{u}(0)|_\gamma$$

$$K\boldsymbol{U}^2 = -2\varrho\boldsymbol{u}^{0''}(0) + \frac{1}{3}\frac{E\nu}{(1-\nu)(1-\nu^2)}\operatorname{grad}\Delta\gamma_{\mu\mu}\boldsymbol{u}(0) + \frac{\nu}{1-\nu}\operatorname{grad}\int_{-1}^{1}\sigma^0_{33}(0)$$

et que

$$\varepsilon^{-1}\big(\sigma^\varepsilon_{\alpha 3}(0) - \sigma^0_{\alpha 3}(0)\big) \to 0 \quad \textit{dans} \quad L^2(\Omega) \tag{133}$$

$$\sigma^\varepsilon_{33}(0) \to \sigma^0_{33}(0) \quad \textit{dans} \quad L^2(\Omega)\,. \tag{134}$$

(135) (ii) $\varepsilon^{-1}\big(V^\varepsilon_\alpha - u^{0'}_\alpha(0)\big) \to 0$, $\varepsilon^{-2}(V^\varepsilon_3 - V^0_3) \to V^2_3$ *dans* $L^2(\Omega)$ *avec* V^2_3 *de la forme*

$$V^2_3 = \boldsymbol{V}^2_3 - \frac{\nu}{1-\nu}\,x_3\gamma_{\mu\mu}\boldsymbol{u}^{0'}(0) + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{x_3^2}{2}\Delta V^0_3\,, \qquad \boldsymbol{V}^2_3 \in L^2(\omega)$$

alors

$$\varepsilon^{-2}(u^\varepsilon - u^0) \to u^2 \quad \textit{dans} \quad L^2(X)\,,$$

$$\varepsilon^{-1}(u^\varepsilon_\alpha - u^0_\alpha)' \to 0\,, \quad \varepsilon^{-2}(u^\varepsilon_3 - u^0_3)' \to u^{2'}_3 \quad \textit{dans} \quad L^2\big(L^2(\Omega)\big)\,,$$

$$\varepsilon^{-2}(\sigma^\varepsilon_{\alpha\beta} - \sigma^0_{\alpha\beta}) \to \sigma^2_{\alpha\beta}\,, \quad \varepsilon^{-1}(\sigma^\varepsilon_{\alpha 3} - \sigma^0_{\alpha 3}) \to 0\,,$$

$$\sigma^\varepsilon_{33} - \sigma^0_{33} \to 0 \quad \textit{dans} \quad L^2\big(L^2(\Omega)\big)$$

où

$\big((\sigma^2_{\alpha\beta}, 0, 0), u^2\big)$ *est l'unique solution du problème* $(P_2 f)$ *de données* U^2_3, V^2_3.

REMARQUE 6. – Les conditions (133), (134) peuvent être écrites uniquement en fonction des données de (P^ε) et (P_0) sous la forme

$$\varepsilon^{-1}\left(\varepsilon^{-2}\gamma_{\alpha 3}(U^\varepsilon) + \frac{1}{2(1-\nu)}(1-x_3^2)\,\partial_\alpha\Delta U^0_3\right) \to 0 \tag{136}$$

$$\varepsilon^{-2}\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\big(\nu\gamma_{\mu\mu}(U^\varepsilon) + \varepsilon^{-2}(1-\nu)\gamma_{33}(U^\varepsilon)\big) \to \tag{137}$$

$$\to -\frac{E}{3(1-\nu^2)}\Delta^2 U^0_3\left(\frac{x_3^3 - x_3}{2}\right) + \left(\frac{x_3+1}{2}\int_{-1}^{1} f^0_3 - \int_{-1}^{x_3} f_3 + \frac{1}{2}(g^{0+}_3 - g^{0-}_3) + \frac{x_3}{2}(g^{0+}_3 - g^{0-}_3)\right)(0)\,.$$

DÉMONSTRATION. – Elle se décompose en deux étapes: on établit tout d'abord la convergence faible, ensuite la convergence forte.

ETAPE 1. – Convergence faible.

Les hypothèses du Théorème 2 sont plus fortes que celles de la Proposition 10, on tire donc de (119) et (120) l'existence de $\sigma^2_{\alpha\beta}, \sigma^1_{\alpha 3}, \chi_{33}, u^2, z_3, z_\alpha$ tels que

(138) $$\varepsilon^{-2}(\sigma^\varepsilon_{\alpha\beta} - \sigma^0_{\alpha\beta}) \rightharpoonup \sigma^2_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon^{-1}(\sigma^\varepsilon_{\alpha 3} - \sigma^0_{\alpha 3}) \rightharpoonup \sigma^1_{\alpha 3},$$
$$\sigma^\varepsilon_{33} \rightharpoonup \chi_{33} \quad \text{dans} \quad L^\infty(L^2(\Omega)) \quad \text{faible étoile;}$$

(139) $$\varepsilon^{-2}(u^\varepsilon - u^0) \rightharpoonup u^2 \quad \text{dans} \quad L^\infty(X) \quad \text{faible étoile;}$$

(140) $$\varepsilon^{-2}(u^{\varepsilon\prime}_3 - u^{0\prime}_3) \rightharpoonup z_3, \quad \varepsilon^{-1}(u^{\varepsilon\prime}_\alpha - u^{0\prime}_\alpha) \rightharpoonup z_\alpha \quad \text{dans} \quad L^\infty(L^2(\Omega)) \quad \text{faible étoile.}$$

Identifions maintenant $\sigma^2, u^2, \ldots$; tout d'abord (139) et (140) donnent

(141) $$z_3 = u^{2\prime}_3, \quad z_\alpha = 0 .$$

On désigne symboliquement par $(\overline{P}^\varepsilon)$ le problème « (P^ε) moins (P^0) » et on effectue

(i) des passages à la limite dans l'équation d'équilibre (122) de $(\overline{P}^\varepsilon)$: choisissant $v = (0, 0, v_3)$, $v_3 \in X_3$, on obtient

(142) $$\forall v_3 \in X_3, \quad (\chi_{33} - \sigma^0_{33}, \partial_3 v_3) = 0 \quad \text{ou} \quad \chi_{33} = \sigma^0_{33} ;$$

choisissant $v = (v_1, v_2, 0)$, $(v_1, v_2) \in X_{12}$ et divisant par ε, on obtient

(143) $$\forall (v_1, v_2) \in X_{12}, \quad (\sigma^1_{\alpha 3}, \partial_3 v_\alpha) = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma^1_{\alpha 3} = 0$$

choisissant $v \in X_{KL}$ et divisant par ε^2, on obtient

(144) $$\forall v \in X_{KL}, \quad -\varrho(u^{2\prime\prime}_3, v_3) + B(\sigma^2, v) = 0 \quad \text{dans} \quad D'(0, T) .$$

(ii) un passage à la limite dans l'équation de comportement de $(\overline{P}^\varepsilon)$ qui s'écrit

$$\forall \tau \in \Sigma, \quad a_0(\varepsilon^{-2}\bar{\sigma}, \tau) + a_2(\sigma^\varepsilon, \tau) + \varepsilon^2 a_4(\sigma^\varepsilon, \tau) + B(\tau, \varepsilon^{-2}\bar{u}) = 0 ;$$

on obtient, grâce à (142)

(145) $$\forall \tau \in \Sigma, \quad a_0(\sigma^2, \tau) + a_2(\sigma^0, \tau) + B(\tau, u^2) = 0 .$$

(iii) la détermination d'une première condition initiale: on a d'après (139) et (140),

$$\varepsilon^{-2}(u^\varepsilon_3 - u^0_3)(0) \rightharpoonup u^2_3(0) \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega); \quad \text{et donc d'après (132)}$$

(146) $$u^2_3(0) = U^2_3 .$$

(iv) la détermination d'une deuxième condition initiale: pour cela, on obtient des informations sur la convergence de $\bar{u}''$ au moyen de (122) restreint à X_{KL} de la manière suivante; on choisit w dans $H_0^2(\omega)$ et on définit θ^ε élément de $L^\infty(0, T)$ par

$$\theta^\varepsilon = \varepsilon^{-2}(\bar{u}_3', w) + (\bar{u}_\alpha', -x_3\,\partial_\alpha w)\,.$$

θ^ε vérifie d'après (140), (141), (122), (135)

$\theta^\varepsilon \rightharpoonup (u_3^{2\prime}, w)$ dans $L^2(0, T)$ faible, $\theta^{\varepsilon\prime}$ est borné dans $L^2(0, T)$ et $\theta^\varepsilon(0) \rightharpoonup (V_3^2, w)$;

ainsi,

$$\forall w \in H_0^2(\omega)\,, \quad (u_3^{2\prime}, w)(0) = (V_3^2, w)\,. \tag{147}$$

On rassemble maintenant (144), (145), (146), (147); le raisonnement déjà vu lors de la Proposition 9 prouve que u_3^2 est de la forme (100); (147) fournit donc d'après (135)

$$2\boldsymbol{u}_3^{2\prime}(0) + \frac{1}{3}\frac{\nu}{1-\nu}\Delta u_3^{0\prime}(0) = 2\boldsymbol{V}_3^2 + \frac{1}{3}\frac{\nu}{1-\nu}\Delta V_3^0 \quad \text{ou}$$

$$u_3^{2\prime}(0) = V_3^2\,. \tag{148}$$

On constate que (144), (145), (146), (148) n'est autre que $(P_2 f)$; on a donc démontré l'analogue du Théorème 2 avec des convergences faibles.

ETAPE 2. – Convergence forte: on pose

$$\tilde{\sigma} = (\varepsilon^{-2}\bar{\sigma}_{\alpha\beta}, \varepsilon^{-1}\bar{\sigma}_{\alpha 3}, \bar{\sigma}_{33}) \quad \text{et} \quad \tilde{\sigma}^2 = (\sigma_{\alpha\beta}^2, 0, 0)\,.$$

On sait que d'après l'étape 1 que

$$(\varepsilon^{-2}\bar{u}_3', \varepsilon^{-1}\bar{u}_\alpha', \tilde{\sigma}) \rightharpoonup (u_3^{2\prime}, 0, \tilde{\sigma}^2) \quad \text{dans} \quad L^2(L^2(\Omega)^{12}) \quad \text{faible ;}$$

pour montrer que cette convergence est en fait une convergence forte, il suffit d'établir la convergence des normes, c'est-à-dire de montrer que

$$\int_0^T \big(\varrho\varepsilon^{-4}|\bar{u}_3'|^2 + \varrho\varepsilon^{-2}|\bar{u}_\alpha'|^2 + a(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma})\big) \to \int_0^T \big(\varrho|u_3^{2\prime}|^2 + a(\tilde{\sigma}^2, \tilde{\sigma}^2)\big)\,, \tag{149}$$

où a a été défini en (70).

On calcule donc le premier membre E de (149); or

$$E = \int_0^T \varepsilon^{-4}\chi^\varepsilon(t)\,dt\,, \quad \text{où } \chi^\varepsilon \text{ a été défini en (124)}\,,$$

et d'après la décomposition (125) on a formellement

$$E = T\varepsilon^{-4}\chi^\varepsilon(0) - 2T\varepsilon^{-4}(\varphi_2^\varepsilon(0) + \varphi_3^\varepsilon(0)) + 2\varepsilon^{-4}\int_0^T(\varphi_2^\varepsilon + \varphi_3^\varepsilon) + 2\varepsilon^{-4}\int_0^T\int_0^t \sum_{i=1}^3 \theta_i^\varepsilon ,$$

d'après l'étape 1 et les hypothèses sur les données initiales

$$\begin{aligned} E \to T\{\varrho|V_3^2|^2 + a_0(\sigma^2(0), \sigma^2(0))\} - 2T\{\varrho|V_3^2|^2 - \varrho(u_\alpha^{0''}(0), U_\alpha^2)\} + \\ + 2\int_0^T(\varrho|u_3^{2'}| - (u_\alpha^{0''}, u_\alpha^2)) + \int_0^T a_0(\sigma^2, \sigma^2) + 2\varrho\int_0^T(u_\alpha^{0''}, u_\alpha^2) - \\ - \varrho\int_0^T|u_3^{2'}|^2 - Ta_0(\sigma^2(0), \sigma^2(0)) - 2\varrho T(u_\alpha^{0''}(0), U_\alpha^2) + \varrho T|V_3^2|^2 = \\ = \int_0^T\varrho|u_3^{2'}|^2 + \int_0^T a_0(\sigma^2, \sigma^2) = \int_0^T(\varrho|u_3^{2'}|^2 + a(\tilde{\sigma}^2, \tilde{\sigma}^2)) . \end{aligned}$$

Enfin, on déduit de (149) ainsi obtenu la convergence des déplacements en écrivant que d'après les équations de comportement

$$\begin{aligned} - B(\tau, \varepsilon^{-2}\bar{u} - u^2) = a_0(\varepsilon^{-2}\bar{\sigma} - \sigma^2, \tau) + a_2(\bar{\sigma}, \tau) + \varepsilon^2 a_4(\sigma^\varepsilon, \tau) \leqslant \\ \leqslant M\{|\varepsilon^{-2}\bar{\sigma}_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}^2| + |\bar{\sigma}| + \varepsilon^2|\sigma_{33}^\varepsilon|\}|\tau| \end{aligned}$$

et donc

$$\sup_{\tau\in\Sigma} \frac{1}{|\tau|} B(\tau, \varepsilon^{-2}\bar{u} - u^2) \to 0 .$$

3. – Interprétation.

On exploite ci-dessous les résultats de convergence des paragraphes 1 et 2 afin de construire des modèles de plaques; l'idée consiste à approcher, lorsque les hypothèses des Théorèmes 1 ou 2 sont satisfaites, $(\sigma^\varepsilon, u^\varepsilon)$ par (σ^0, u^0) ou mieux par $(\sigma^0 + \varepsilon^2\sigma^2, u^0 + \varepsilon^2 u^2)$.

Intéressons-nous par exemple à la composante verticale u_3^ε du déplacement; on obtient des modèles bi-dimensionnels en l'approchant

1) soit, par u_3^0 qui est indépendant de x_3;

2) soit, si l'on tient compte du terme d'ordre 2, par la restriction r_3^ε de $u_3^0 + \varepsilon^2 u_3^2$ à la surface moyenne ω; on peut aussi utiliser la moyenne verticale m_3^ε de $u_3^0 + \varepsilon^2 u_3^2$.

D'après (82), (100), (102) ces 3 éléments sont les solutions respectives des 3 problèmes posés sur $\omega \times]0, T[$ dans le cas dynamique (avec simplification immédiate dans le cas statique) ci-dessous

$$\left\{\begin{array}{l} 2\varrho u_3^{0''} + \dfrac{2}{3}\dfrac{E}{1-\nu^2}\Delta^2 u_3^0 = \psi\,, \qquad \psi \text{ défini en (89)}\,, \\ u_3^0 \in H_0^2(\omega)\,, \quad u_3^0(0) = U_3^0\,, \quad u_3^{0'}(0) = V_3^0\,, \end{array}\right. \tag{150}$$

posant

$$r_3^\varepsilon = (u_3^0 + \varepsilon^2 u_3^2)|_{x_3=0} = u_3^0 + \varepsilon^2 \boldsymbol{u}_3^2 \tag{151}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\varrho r_3^{\varepsilon''} + \dfrac{2}{3}\dfrac{E}{1-\nu^2}\Delta^2 r_3^\varepsilon = \varepsilon^2 \dfrac{34-14\nu}{15(1-\nu)}\varrho\,\Delta u_3^{0''} + \psi + \\ \qquad\qquad + \varepsilon^2 \Delta\left(-\dfrac{\nu}{1-\nu}\displaystyle\int_{-1}^{1} x_3 \int_{-1}^{x_3} f_3 + \dfrac{3\nu-8}{10(1-\nu)}\psi\right) \\ r_3^\varepsilon|_\gamma = -\varepsilon^2 \dfrac{\nu}{10(1-\nu)}\Delta u_3^0|_\gamma\,, \quad \partial_n r_3^\varepsilon|_\gamma = -\varepsilon^2 \dfrac{8+\nu}{10(1-\nu)}\partial_n \Delta u_3^0|_\gamma\,, \\ r_3^\varepsilon(0) = U_3^0 + \varepsilon^2 \boldsymbol{U}_3^2\,, \quad r_3^{\varepsilon'}(0) = V_3^0 + \varepsilon^2 \boldsymbol{V}_3^2\,. \end{array}\right. \tag{152}$$

et posant

$$m_3^\varepsilon = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(u_3^0 + \varepsilon^2 u_3^2) = u_3^0 + \varepsilon^2 \boldsymbol{u}_3^2 + \varepsilon^2 \frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{6}\Delta u_3^0 \tag{153}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\varrho m_3^{\varepsilon''} + \dfrac{2}{3}\dfrac{E}{1-\nu^2}\Delta^2 m_3^\varepsilon = \varepsilon^2 \dfrac{34-14\nu}{15(1-\nu)}\varrho\,\Delta u_3^{0''} + \psi + \\ \qquad\qquad + \varepsilon^2 \Delta\left(-\dfrac{\nu}{1-\nu}\displaystyle\int_{-1}^{1} x_3 \int_{-1}^{x_3} f_3 + \dfrac{7\nu-12}{15(1-\nu)}\psi\right) \\ m_3^\varepsilon|_\gamma = \varepsilon^2 \dfrac{2}{15}\dfrac{\nu}{1-\nu}\Delta u_3^0|_\gamma\,, \quad \partial_n m_3^\varepsilon|_\gamma = \varepsilon^2 \dfrac{1}{5}\left(-4+\dfrac{\nu}{3}\right)\dfrac{1}{1-\nu}\partial_n \Delta u_3^0|_\gamma\,, \\ m_3^\varepsilon(0) = U_3^0 + \varepsilon^2 \boldsymbol{U}_3^2 + \varepsilon^2 \dfrac{\nu}{1-\nu}\dfrac{1}{6}\Delta U_3^0\,, \\ \qquad\qquad m_3^{\varepsilon'}(0) = V_3^0 + \varepsilon^2 \boldsymbol{V}_3^2 + \varepsilon^2 \dfrac{\nu}{1-\nu}\dfrac{1}{6}\Delta V_3^0\,. \end{array}\right. \tag{154}$$

3.1. *Un cas concret.*

Plaçons-nous maintenant dans un cas particulier réaliste: celui d'une plaque d'épaisseur $2e$ et de masse volumique ${}^e\varrho$, soumise à son poids et à l'action d'une force surfacique ${}^{e}g_3$ exercée sur Γ_{+}^{e} supposée pour simplifier indépendante de (x_1, x_2); suivant le procédé décrit en 1.1, on la considère comme faisant partie d'une famille de plaques d'épaisseurs 2ε, soumises à leur poids et à des forces ${}^{\varepsilon}g_3$; alors si leurs densités respectives sont de la forme

$$(155) \qquad {}^{\varepsilon}\varrho = \varrho\varepsilon^2$$

et si les forces ${}^{\varepsilon}g_3$ vérifient

$$(156) \qquad {}^{\varepsilon}g_3^{+} = g_3^{+}\varepsilon^3$$

les forces appliquées ${}^{\varepsilon}F$ sont transformées par les changments (7) en

$$F^{\varepsilon}(v) = \varrho\varepsilon\int_{\Omega} v_3 - \varepsilon\int_{\omega} g_3^{+}v_3 \,.$$

Par linéarité des problèmes (P^{ε}) statiques ou dynamiques en $(\sigma^{\varepsilon}, u^{\varepsilon})$, c'est donc au couple $(\varepsilon^{-1}\sigma^{\varepsilon}, \varepsilon^{-1}u^{\varepsilon})$ que l'on peut appliquer les Théorèmes 1 ou 2.

3.1.1. *Cas statique.* – Rappelons que le déplacement vertical ${}^{e}u_3$ vérifie d'après (7)

$${}^{e}u_3(x_1, x_2, ex_3) = e^{-1}u_3^{\varepsilon}(x_1, x_2, x_3) \,;$$

Les hypothèses du Théorème 1 étant clairement vérifiées, on peut considérer que pour « e assez petit »

$$e^{-2}({}^{e}u_3 - z_3^0)(x_1, x_2, 0) \simeq \boldsymbol{z}_3^2(x_1, x_2)$$

et, d'après (152), ${}^{e}r_3 = z_3^0 + e^2\boldsymbol{z}_3^2$ est l'unique solution de

$$(157) \qquad \begin{cases} \dfrac{2}{3}\dfrac{E}{1-\nu^2}\, e^3\Delta^2\, {}^{e}r_3 = -2e\,{}^{e}\varrho + {}^{e}g_3^{+} \\[2mm] {}^{e}r_3|_{\gamma} = -e^2\dfrac{\nu}{10(1-\nu)}\,\Delta z_3^0|_{\gamma}\,, \qquad \partial_n {}^{e}r_3|_{\gamma} = -e^2\dfrac{8+\nu}{10(1-\nu)}\,\partial_n\Delta z_3^0|_{\gamma} \end{cases}$$

où z_3^0 est défini par

$$(158) \qquad z_3^0 \in H_0^2(\omega)\,, \quad \frac{2}{3}\frac{E}{1-\nu^2}\, e^3\,\Delta^2 z_3^0 = -2e\,{}^{e}\varrho + {}^{e}g_3^{+}\,.$$

On peut aussi choisir d'approcher la moyenne verticale en écrivant que

$$e^{-2}\left(\frac{1}{2e}\int_{-e}^{e} {}^{e}u_3 - z_3^0\right) \simeq \boldsymbol{z}_3^2 + \frac{1}{6}\frac{\nu}{1-\nu}\,\Delta z_3^0$$

et, d'après (154),

$$^e m_3 = z_3^0 + e^2 z_3^2 + e^2 \frac{1}{6} \frac{\nu}{1-\nu} \Delta z_3^0$$

est l'unique solution de

$$(159) \qquad \begin{cases} \dfrac{2}{3} \dfrac{E}{1-\nu^2} e^3 \Delta^2 {}^e m_3 = -2e\,{}^e\varrho + {}^e g_3^+ \\ {}^e m_3|_\gamma = e^2 \dfrac{2}{15} \dfrac{\nu}{1-\nu} \Delta z_3^0|_\gamma, \qquad \partial_n {}^e m_3|_\gamma = e^2 \dfrac{1}{5}\left(-4 + \dfrac{\nu}{3}\right) \dfrac{\nu}{1-\nu} \partial_n \Delta z_3^0|_\gamma . \end{cases}$$

On constate que dans les 3 problèmes ci-dessus l'équation aux dérivées partielles est la même et n'est autre que l'équation du *modèle de plaques usuel* [6]; seules changent les conditions aux limites. On dira que grâce à (157) ou à (159), on a des justifications « à l'ordre 2 » du modèle biharmonique, alors que (158) en est une justification « à l'ordre 0 » [8]; enfin, on note que l'existence d'un pseudo-développement pour ${}^e u_3$ dans ce cas concret pour le choix (155) est une justification a posteriori de l'introduction d'un tel choix au paragraphe 2.1.

3.1.2. *Cas dynamique.* – On se donne, comme ci-dessus, une plaque d'épaisseur $2e$ soumise à son poids et à une force surfacique ${}^e g_3$ sur Γ_+^e dépendant maintenant du temps; on en étudie le déplacement à partir d'une position d'équilibre; autrement dit, le déplacement initial ${}^e U$ est donné par

$$(160) \qquad \begin{cases} \forall \tau \in \Sigma^e, & {}^e a({}^e\sigma(0), \tau) + {}^e B(\tau, {}^e U) = 0 \\ \forall v \in X^e, & {}^e B({}^e\sigma(0), v) = {}^e F(0)(v) \end{cases}$$

enfin, on suppose, pour fixer les idées, que la vitesse initiale ${}^e V$ est nulle.

La plaque est considérée comme élément d'une famille de plaques soumises aux forces définies par (155) et (156), en équilibre à l'instant 0, c'est-à-dire de déplacements ${}^\varepsilon U$ solutions de (160) où e est remplacé par ε, et de vitesses initiales ${}^\varepsilon V$ nulles. On peut donc appliquer le Théorème 1 au problème statique transformé de (160); vérifiions que ceci permet d'affirmer que les hypothèses du Théorème 2 sont satisfaites par les problèmes indicés par ε de données initiales $(\varepsilon^{-1} U^\varepsilon, 0)$ et le problème d'ordre 0 de données initiales $(Z_3^0, 0)$ où

$$(161) \qquad Z_3^0 \in H_0^2(\omega), \quad \frac{2}{3} \frac{E}{1-\nu^2} \Delta^2 Z_3^0 = -2\varrho + g_3^+(0) .$$

(i) d'une part, d'après le Théorème 1, on a

$$\varepsilon^{-2}(\varepsilon^{-1} U^\varepsilon - Z^0) \to Z^2 \quad \text{dans} \quad (H^1(\Omega))^3 ,$$

où

1) $Z_\alpha^0 = -x_3\,\partial_\alpha Z_3^0$ et Z_3^0 est la solution de (161),

2) $Z_3^2 = \boldsymbol{Z}_3^2 + \dfrac{\nu}{1-\nu}\dfrac{x_3^2}{2}\Delta Z_3^0$ et

$$\Delta^2 \boldsymbol{Z}_3^2 = 0\,,\quad \boldsymbol{Z}_3^2|_\gamma = -\frac{\nu}{10(1-\nu)}\Delta Z_3^0|_\gamma\,,\quad \partial_n \boldsymbol{Z}_3^2|_\gamma = -\frac{8+\nu}{10(1-\nu)}\partial_n \Delta Z_3^0|_\gamma\,,$$

3) $Z_\alpha^2 = -x_3\,\partial_\alpha \boldsymbol{Z}_3^2 - \partial_\alpha \Delta Z_3^0 \dfrac{\nu}{1-\nu}\left(x_3 + \dfrac{x_3^3}{3}\left(\dfrac{\nu}{2}-1\right)\right)$;

ainsi, l'hypothèse (132) est-elle satisfaite; on a de même (133) et (134)

(ii) d'autre part, on a clairement (135) car $V^\varepsilon = 0$;

(iii) enfin, il suffit par exemple que g_3^{0+} appartienne à $H^3(H_0^1(\omega))$ pour que les hypothèses du Corollaire 2 soient satisfaites; remarquons que (161) a été utilisé pour la vérification de (93).

Appliquant le Théorème 2, on considère donc que, pour « e assez petit »,

$$e^{-2}({}^e u_3 - z_3^0)(x_1, x_2, 0) \simeq \boldsymbol{z}_3^2(x_1, x_2)$$

et, d'après (152), ${}^e r_3 = z_3^0 + e^2 \boldsymbol{z}_3^2$ est l'unique solution de

$$\text{(162)}\quad \begin{cases} 2\,{}^e\varrho e\,{}^e r_3'' + \dfrac{2}{3}\dfrac{E}{1-\nu^2}e^3\,\Delta^2\,{}^e r_3 = -2e\,{}^e\varrho + {}^e g_3^+ + {}^e\varrho e^3 \dfrac{34-14\nu}{15(1-\nu)}\Delta z_3^{0''} \\[2ex] {}^e r_3|_\gamma = -e^2\dfrac{\nu}{10(1-\nu)}\Delta z_3^0|_\gamma\,,\quad \partial_n\,{}^e r_3|_\gamma = -e^2\dfrac{8+\nu}{10(1-\nu)}\partial_n\,\Delta z_3^0|_\gamma \\[2ex] {}^e r_3(0) = Z_3^0 + e^2 \boldsymbol{Z}_3^2\,,\quad {}^e r_3'(0) = 0 \end{cases}$$

où z_3^0 est défini par

$$\text{(163)}\quad \begin{cases} 2\,{}^e\varrho e z_3^{0''} + \dfrac{2}{3}\dfrac{E}{1-\nu^2}e^3\,\Delta^2 z_3^0 = -2e\,{}^e\varrho + {}^e g_3^+ \\[1ex] z_3^0 \in H_0^2(\omega)\,,\quad z_3^0(0) = Z_3^0\,,\quad z_3^{0\prime}(0) = 0\,. \end{cases}$$

Remarquons que l'équation d'évolution de (162) peut aussi s'écrire

$$\text{(164)}\quad 2\,{}^e\varrho e\,{}^e r_3'' - \frac{34-14\nu}{15(1-\nu)}\,{}^e\varrho e^3\,\Delta\,{}^e r_3'' + \frac{2}{3}\frac{E}{1-\nu^2}e^3\,\Delta^2\,{}^e r_3 =$$

$$= -2e\,{}^e\varrho + {}^e g_3^+ + {}^e\varrho e^5 \chi\,,\quad \chi \text{ indépendant de } e\,.$$

L'équation (164) est, suivant la terminologie de [5], une équation avec *terme d'inertie de rotation*; on remarque que le coefficient $-(34-14\nu)/(15(1-\nu))$ étant négatif, on peut montrer directement que l'équation (164) munie des conditions aux limites et des conditions initiales de (162) a bien une solution.

On peut aussi choisir d'approcher $\dfrac{1}{2e}\displaystyle\int_{-e}^{e} {}^e u_3$ par ${}^e m_3 = z_3^0 + e^2 z_3^2 + e^2 \dfrac{1}{6}\dfrac{\nu}{1-\nu}\Delta z_3^0$, ${}^e m_3$ est la solution d'un système du type

$$
(165)\quad \left\{
\begin{aligned}
&2\,{}^e\varrho e\,{}^e m_3'' - \frac{34-14\nu}{15(1-\nu)}\,{}^e\varrho e^3\,\Delta\,{}^e m_3'' + \frac{2}{3}\frac{E}{1-\nu^2}\,e^3\,\Delta^2\,{}^e m_3 = \\
&\qquad\qquad = -2e\,{}^e\varrho + {}^e g_3^+ + {}^e\varrho e^5 \bar{\chi}\,, \qquad \bar{\chi} \text{ indépendant de } e\,.\\
&{}^e m_3|_\gamma = e^2 \frac{2}{15}\frac{\nu}{1-\nu}\,\Delta z_3^0|_\gamma\,, \qquad \partial_n\,{}^e m_3|_\gamma = e^2\frac{1}{5}\Big(-4+\frac{\nu}{3}\Big)\frac{1}{1-\nu}\,\partial_n\,\Delta z_3^0|_\gamma\\
&{}^e m_3(0) = Z_3^0 + e^2 \mathbf{Z}_3^2 + e^2\frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{6}\,\Delta Z_3^0\,, \qquad {}^e m_3'(0) = 0\,.
\end{aligned}\right.
$$

Les relations (163) constituent une justification « à l'ordre 0 » du modèle usuel des plaques donné dans [6] par exemple; (164) et (165) ou encore plus simplement

$$
(166)\qquad 2\,{}^e\varrho e\,{}^e w_3'' - \frac{34-14\nu}{15(1-\nu)}\,{}^e\varrho e^3\,\Delta\,{}^e w_3'' + \frac{2}{3}\frac{E}{1-\nu^2}\,e^3\,\Delta^2\,{}^e w_3 = -2e\,{}^e\varrho + {}^e g_3^+
$$

sont des « modèles à l'ordre 2 »; pour les obtenir, on doit donc contrairement au cas statique, modifier le modèle usuel par l'adjonction d'un terme en $\Delta w''$, habituellement appelé terme d'inertie de rotation (cf. G. DUVAUT et J. L. LIONS [5] qui considèrent un modèle analogue, mais avec un coefficient différent, analysé ci-dessous en 3.2.1). Il est important de noter que ce terme supplémentaire apparaît dans (166) avec la même puissance de l'épaisseur que le terme bi-harmonique habituel; il ne doit donc pas être négligé. Remarquons d'autre part que ce terme a un effet régularisant sur les dérivées en temps du déplacement vertical; l'écriture de la conservation de l'énergie permet, par exemple, de montrer que ${}^e w_3'$ appartient à $L^\infty(H^1(\omega))$.

3.2. *Compléments.*

3.2.1. *Un autre modèle avec terme d'inertie de rotation.* – Le modèle de Morozov cité dans [5] n'est pas (166) mais

$$
(167)\qquad 2\,{}^e\varrho e\zeta'' - \frac{2}{3}\,{}^e\varrho e^3\,\Delta\zeta'' + \frac{2}{3}\frac{E}{1-\nu^2}\,e^3\,\Delta^2\zeta = -2e\,{}^e\varrho + {}^e g_3^+\,.
$$

On vérifie que pour obtenir (167), il suffit de remplacer dans le système (71) dont

$({}^\varepsilon\sigma, {}^\varepsilon u)$ est la solution, la forme bilinéaire ${}^\varepsilon a$ par la forme tronquée ${}^\varepsilon a_0$, où

$$ {}^\varepsilon a_0(\sigma, \tau) = \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{1+\nu}{E}\, \sigma_{\alpha\beta} - \frac{\nu}{E}\, \sigma_{\mu\mu}\delta_{\alpha\beta} \right) \tau_{\alpha\beta}\,. $$

Simplifiant ainsi l'équation de comportement on considère donc a priori que le déplacement est du type Kirchhoff-Love; sa composante 3° est alors d'après l'équation d'équilibre non tronquée solution de (167). Bien sûr, pour ce modèle, il n'y a pas de résultat d'approximation du type $\varepsilon^{-2}({}^\varepsilon u_3 - {}^\varepsilon\zeta)(x_1, x_2, 0) \simeq 0$, comme ceux obtenus en 3.1.2.

3.2.2. *Résultats sur les contraintes.* – Nous plaçant à nouveau dans le cadre défini au paragraphe 3.1.2, nous complétons les résultats d'approximation du déplacement, par l'approximation des contraintes. Utilisant les expressions (84), (85), (86) et (107) et revenant aux ouverts «physiques» $\omega \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ par les changements de fonctions (7), on obtient les estimations d'erreurs absolues et d'erreurs relatives suivantes:

$$ \forall\delta,\ \exists\varepsilon_0,\ \forall\varepsilon \leqslant \varepsilon_0,\ \forall(i,j)\,, \qquad \|{}^\varepsilon\sigma_{ij} - {}^\varepsilon s_{ij}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} \leqslant \delta\varepsilon^{3+\frac{1}{2}} \tag{168} $$

avec, pour $y_3 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

$$ \begin{aligned} {}^\varepsilon s_{\alpha\beta}(y_3) = {} & -\frac{Ey_3}{1-\nu^2}\{(1-\nu)\,\partial_{\alpha\beta} z_3^0 + \nu\,\Delta z_3^0 \delta_{\alpha\beta}\} - \\ & -\frac{E\varepsilon^2 y_3}{1-\nu^2}\{(1-\nu)\,\partial_{\alpha\beta}\boldsymbol{z}_3^2 + \nu\,\Delta \boldsymbol{z}_3^2\delta_{\alpha\beta}\} - \\ & -\frac{E}{(1-\nu^2)(1-\nu)}\left(\varepsilon^2 y_3 + \frac{y_3^3}{3}\left(\frac{\nu}{2}-1\right)\right)\{(1-\nu)\,\partial_{\alpha\beta}\Delta z_3^0 + \nu\,\Delta^2 z_3^0\delta_{\alpha\beta}\} + \\ & + \frac{\nu}{1-\nu}\left\{(y_3^3 - y_3\varepsilon^2)\,\frac{\varrho}{2}\,(z_3^{0\prime\prime}+1) + \frac{g_3^+}{2}\,(\varepsilon + y_3)\left(\varepsilon^2 + \frac{{}^\varepsilon y_3}{2} - \frac{y_3^2}{2}\right)\right\}\delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{169} $$

$$ {}^\varepsilon s_{\alpha 3}(y_3) = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\,(\varepsilon^2 - y_3^2)\,\partial_\alpha \Delta z_3^0 \tag{170} $$

$$ {}^\varepsilon s_{33}(y_3) = \frac{y_3^3 - \varepsilon^2 y_3}{2}\,\varrho(z_3^{0\prime\prime}+1) + \frac{g_3^+}{2}\,(\varepsilon + y_3)\left(\varepsilon^2 + \frac{{}^\varepsilon y_3}{2} - \frac{y_3^2}{2}\right); \tag{171} $$

rappelons que z_3^0 est donné par (163) et $\boldsymbol{z}_3^2$ par

$$ \left\{ \begin{aligned} & 2\varrho \boldsymbol{z}_3^{2\prime\prime} + \frac{2}{3}\,\frac{E}{1-\nu^2}\,\Delta^2 \boldsymbol{z}_3^2 = \frac{34-14\nu}{15(1-\nu)}\,\varrho\,\Delta z_3^{0\prime\prime} \\ & \boldsymbol{z}_3^2|_\gamma = -\frac{1}{10}\,\frac{\nu}{1-\nu}\,\Delta z_3^0|_\gamma\,, \qquad \partial_n \boldsymbol{z}_3^2|_\gamma = -\frac{8+\nu}{10(1-\nu)}\,\partial_n\,\Delta z_3^0|_\gamma \\ & \boldsymbol{z}_3^2(0) = \boldsymbol{Z}_3^2\,, \qquad \boldsymbol{z}_3^{2\prime}(0) = 0\,. \end{aligned} \right. $$

$$(172)\qquad \forall\delta,\ \exists\varepsilon_0,\ \forall\varepsilon\leqslant\varepsilon_0 \begin{cases} \|{}^\varepsilon\sigma_{\alpha\beta}-{}^\varepsilon s_{\alpha\beta}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant\delta\varepsilon^2\|{}^\varepsilon s_{\alpha\beta}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\\ \|{}^\varepsilon\sigma_{\alpha3}-{}^\varepsilon s_{\alpha3}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant\delta\varepsilon\|{}^\varepsilon s_{\alpha3}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\\ \|{}^\varepsilon\sigma_{33}-{}^\varepsilon s_{33}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\leqslant\delta\|{}^\varepsilon s_{33}\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)}\,. \end{cases}$$

Enfin, on remarque la forme polynomiale en y_3 des approximants ${}^\varepsilon s_{ij}$ et on constate que l'on peut, utilisant (163), remplacer dans (169) et (171) les termes en $(z_3^{0''}+1)$ par des termes en $\Delta^2 z_3^0$ et g_3^+.

3.2.3. *Autre cadre fonctionnel.* – Une étude parallèle à l'étude ci-dessus peut être menée dans l'espace T introduit en (14). On a pour les problèmes d'ordre 0 et d'ordre 2 des résultats d'existence et d'interprétation que nous résumons.

Le problème d'ordre 0 a une solution et une seule donnée par:

$$\begin{cases} u_3^0|_\gamma=0\,, \quad \big((1-\nu)\,\partial_{nn}u_3^0+\nu\,\Delta u_3^0\big)|_\gamma=0\\ 2\varrho u_3^{0''}+\dfrac{2}{3}\dfrac{E}{1-\nu^2}\,\Delta^2 u_3^0=\psi\,. \end{cases}$$

C'est le problème des plaques simplement posées; u_α^0 et σ^0 ont les formes (85) et (86).

Enfin, si ω est un rectangle le problème d'ordre 2 a une solution; comme dans la Proposition 9, u_3^2 a la forme (100) et vérifie (102); seules les conditions de bord sont modifiées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. G. CIARLET - P. DESTUYNDER, *A justification of the two-dimensional linear plate model*, J. de Mécanique, Vol. 18, 2 (1979), pp. 315-344.

[2] P. G. CIARLET - S. KESAVAN, *Approximation bi-dimensionnelle du problème de valeurs propres pour une plaque*, C.R. Acad. Sci. Paris, t 289 (1979).

[3] P. G. CIARLET, *A justification of the von Kármán equations*, Arch. Rational Mech. Anal., **73** (1980), pp. 349-389.

[4] PH. DESTUYNDER, *Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques*, Thèse, Univ. P. et M. Curie (1980).

[5] G. DUVAUT - J. L. LIONS, *Problèmes unilatéraux dans la théorie de la flexion forte des plaques; le cas d'évolution*, J. de Mécanique, Vol. 13, 1 (1974), pp. 245-266.

[6] G. DUVAUT - J. L. LIONS, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.

[7] J. L. LIONS - E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.

[8] A. RAOULT, *Contributions à l'étude des modèles d'évolution de plaques et à l'approximation d'équations d'évolution linéaires du second ordre par des méthodes multipas*, Thèse 3ème cycle, Univ. P. et M. Curie (1980).