Annali di Matematica pura ed applicata
(IV), Vol. CLXII (1992), pp. 1-22

Sur l'adjonction d'une masse de Dirac á une forme régulière et semi-classique (*).

F. MARCELLAN - P. MARONI

Résumé. – *On montre que si L est une forme linéaire régulière et semi-classique, alors la forme $u = L + \lambda\delta_c$ où $c \in \boldsymbol{C}$ est quelconque, est encore régulière et semi-classique pour tout $\lambda \in \boldsymbol{C}$ en dehors d'un ensemble dénombrable de valeurs singulières. On donne l'équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par chaque polynôme de la suite orthogonale associée à u.*

Abstract. – *We show that, if L is a regular, semi-classical functional, then $u = L + \lambda\delta_c$, where $c \in \boldsymbol{C}$, is also regular and semi-classical for every complex λ, except for a discret set. We give the second order linear differential equation satisfied by each polynomial of the orthogonal sequence associated with u.*

Introduction.

Le problème de l'adjonction d'une ou de deux masses de Dirac à une forme classique a été abordé depuis de nombreuses années par plusieurs auteurs, pour donner naissance aux polynômes orthogonaux de type Legendre [15], de type Jacobi [15], [13], de type Laguerre [15], [17], et de type Bessel [10].

C'est sans doute dans la première édition du traité de SZEGÖ (1939) [29] qu'on trouve posé, pour la première fois, le problème de déterminer les propriétés des polynômes orthogonaux par rapport à $d\varphi$ où

$$\varphi(x) = \frac{\alpha}{2}x;\ |x| < 1; \qquad \varphi(x) = -\frac{1}{2}(1+\alpha),\ x \leqslant -1; \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2}(1+\alpha);\ x \geqslant 1.$$

Simultanément, H. L. KRALL (1940) voir [15], en cherchant des équations diffèrentielles linéaires du quatrième ordre vérifiées par des polynômes orthogonaux, obtient trois familles qui sont justement celles de type Legendre, de type Jacobi et de

(*) Entrata in Redazione il 6 dicembre 1988.

Indirizzo degli AA.: F. MARCELLAN: Universidad Politécnica de Madrid, ETS Ingenieros Industriales, José Gutierrez Abascal 2, 28006 Madrid; P. MARONI: Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire d'Analyse Numérique (U.A. 189), Tour 55-65, 5ème étage, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05.

type Laguerre, ainsi que l'a montré A. M. KRALL dans [15]. Ce point de vue s'est considérablement développé depuis avec les travaux de A. M. KRALL et L. L. LITTLEJOHN [16]-[21]: on y trouve de nombreux exemples de suites orthogonales par rapport à une forme classique plus une ou deux masses de Dirac, placées sur les extrémités de l'intervalle d'orthogonalité.

Le problème général de l'adjonction d'une ou de plusieurs masses de Dirac à une forme régulière est abordé dans [3], [5], [22], [30] sous des aspects plus ou moins particuliers: on considère toujours une forme définie positive, dans [5], [22] et [30] sur un intervalle de $\boldsymbol{R}$ et dans [3] sur une courbe quelconque de Jordan.

C'est le point de vue général qu'on adopte ici, en traitant le cas d'une seule masse de Dirac pour des raisons de simplification.

Dans le paragraphe 1, on résout le problème suivant: L étant une forme linéaire régulière et $c \in \boldsymbol{C}$, pour quelles valeurs de λ, la forme $u = L + \lambda\delta_c$ est-elle encore régulière? Pour cela il faut et il suffit que $\lambda \neq \lambda_n$ $n \geq 0$ où la suite $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ dépend de L et de c.

Pour une seule masse de Dirac, c'est la notion de quasi-orthogonalité stricte d'ordre un qui joue un rôle fondamental dans les calculs [23]. Lorsqu'il y a plusieurs masses de Dirac, c'est la notion de quasi-orthogonalité stricte d'ordre supérieure à un qui intervient. Une caractérisation de la quasi-orthogonalité stricte d'ordre s est donnée dans [26].

Dans le paragraphe 2, on suppose, de plus, que L est une forme semi-classique [24], [25], [12]. On montre alors que pour chaque $\lambda \neq \lambda_n$ $n \geq 0$, la forme u est encore semi-classique et si $\{\tilde{P}_n\}_{n \geq 0}$ désigne la suite orthogonale normalisée associée à u, on donne la relation de structure de $\{\tilde{P}_n\}_{n \geq 0}$ et l'équation différentielle linéaire du second ordre vérifiée par chaque $\tilde{P}_n$, en fonction des éléments correspondants de la suite $\{P_n\}_{n \geq 0}$ orthogonale par rapport à L.

Le paragraphe 3 est consacré à des exemples. On a placé systèmatiquement le point c à l'origine pour éviter des calculs fastidieux. On traite les cas des polynômes orthogonaux de type Hermite, de type Hermite généralisés (un cas où le suite de départ est semi-classique de classe un pour $\mu \neq 0$), de type Laguerre, déduit du cas précédent par des considérations de symétrie qu'on peut facilement généraliser et de type Bessel. Remarquons pour finir que tous les cas cités et étudiés jusqu'à maintenant sont des cas particuliers du problème suivant: ajouter à une forme régulière et semi-classique une combinaison linéaire finie de masses de Dirac et de dérivées de masses de Dirac. Pour les valeurs admissibles des coéfficients de la combinaison linéaire, on obtient encore une forme régulière et semi-classique, mais qu'il n'est pas facile d'expliciter par suite d'une certaine complexité des calculs.

1. – Soit L une forme linéaire sur $\mathcal{P}$, régulière et soit $\{P_n\}_{n \geq 0}$ la suite orthogonale normalisée correspondante. Pour chaque c, $\lambda \in \boldsymbol{C}$, considérons la forme linéaire suivante:

$$u = L + \lambda\delta_c. \tag{1.1}$$

Le point c étant fixé, il s'agit de déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles la forme u est régulière; pour cela, il suffit de déterminer les valeurs de λ pour lesquelles il existe une suite normalisée $\{\tilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ orthogonale par rapport à u.

On note $L(f)=\langle L,f\rangle$, $f\in\mathcal{P}$ où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. En particulier:

$$\langle L,x^n\rangle = L(x^n)=(L)_n,\qquad n\geqslant 0.$$

On peut toujours supposer que $(L)_0=1$.

De (1.1), on a:

$$(x-c)\,u=(x-c)\,L=v. \tag{1.2}$$

On est amené à chercher la suite $\{\tilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ parmi les suites strictement quasi orthogonales d'ordre un par rapport à v, qui n'est pas, elle-même, nécessairement régulière [23].

Déterminons la suite $\{\tilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ sous la forme:

$$(x-c)\,\tilde{P}_n(x)=\sum_{\nu=0}^{n+1}\lambda_{n,\nu}P_\nu(x),\qquad n\geqslant 0. \tag{1.3}$$

D'où de (1.2):

$$v(P_m\tilde{P}_n)=\lambda_{n,m}L(P_m^2),\qquad 0\leqslant m\leqslant n+1,$$

et donc, en vertu des conditions de quasi-orthogonalité stricte

$$v(P_m\tilde{P}_n)=0\quad 0\leqslant m\leqslant n-2,\ n\geqslant 2;\qquad v(P_{n-1}\tilde{P}_n)\neq 0\quad n\geqslant 1,$$

on a:

$$\lambda_{n,m}=0,\quad 0\leqslant m\leqslant n-2,\quad n\geqslant 2;\quad \lambda_{n,n-1}\neq 0,\quad n\geqslant 1.$$

de sorte que:

$$(x-c)\,\tilde{P}_n(x)=\lambda_{n,n-1}P_{n-1}(x)+\lambda_{n,n}P_n(x)+P_{n+1}(x),\qquad n\geqslant 0, \tag{1.4}$$

avec $P_{-1}(x)=0$.

Posant $P_1(x)=x-\beta_0$, on a

$$\lambda_{0,0}=\beta_0-c. \tag{1.5}$$

Dans ces conditions, la suite $\{\tilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ est orthogonale par rapport à u, si et seulement si, elle vérifie:

$$u(\tilde{P}_{n+1})=0,\qquad u(\tilde{P}_n^2)\neq 0,\qquad n\geqslant 0. \tag{1.6}$$

De:

$$\tilde{P}_{n+1}(x)=\lambda_{n+1,n}\frac{P_n(x)-P_n(c)}{x-c}+\lambda_{n+1,n+1}\frac{P_{n+1}(x)-P_{n+1}(c)}{x-c}+\frac{P_{n+2}(x)-P_{n+2}(c)}{x-c}$$

on a, compte tenu de (1.1):

$u(\tilde{P}_{n+1}) =$

$$= \lambda_{n+1,n}(P^{(1)}_{n-1}(c) + \lambda P'_n(c)) + \lambda_{n+1,n+1}(P^{(1)}_n(c) + \lambda P'_{n+1}(c)) + P^{(1)}_{n+1}(c) + \lambda P'_{n+2}(c),$$

où $\{P^{(1)}_n\}_{n \geq 0}$ désigne la suite associée de $\{P_n\}_{n \geq 0}$ relativement à L.

On est conduit au système suivant:

$$\lambda_{n+1,n} P_n(c) + \lambda_{n+1,n+1} P_{n+1}(c) = -P_{n+2}(c),$$

$$\lambda_{n+1,n}(P^{(1)}_{n-1}(c) + \lambda P'_n(c)) + \lambda_{n+1,n+1}(P^{(1)}_n(c) + \lambda P'_{n+1}(c)) = -(P^{(1)}_{n+1}(c) + \lambda P'_{n+2}(c)).$$

Introduisons la relation de récurrence vérifiée par les polynômes P_n:

$$P_{n+2}(x) = (x - \beta_{n+1}) P_{n+1}(x) - \gamma_{n+1} P_n(x), \quad n \geq 0. \tag{1.7}$$

Le déterminant $d_n = d_n(\lambda; c)$ du système précédent, s'écrit alors:

$$d_n = r_n \left(1 + \lambda \sum_{\nu=0}^{n} \frac{P^2_\nu(c)}{r_\nu}\right), \quad n \geq 0, \tag{1.8}$$

$$r_n = \prod_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu \quad \text{et} \quad \gamma_0 = 1. \tag{1.9}$$

D'après (1.8) on a:

$$d_{n+1} = \gamma_{n+1} d_n + \lambda P^2_{n+1}(c), \quad n \geq 0. \tag{1.10}$$

Lorsque $d_n \neq 0$, $n \geq 0$, on a ainsi, compte tenu de (1.7) et (1.10):

$$\lambda_{n+1,n} = \frac{d_{n+1}}{d_n} \neq 0, \tag{1.11}$$

$$\lambda_{n+1,n+1} = \beta_{n+1} - c - \frac{\lambda}{d_n} P_n(c) P_{n+1}(c). \tag{1.12}$$

D'où l'expression de $\tilde{P}_{n+1}(x)$, à l'aide de l'identité de Christoffel-Darboux [27]:

$$\tilde{P}_{n+1}(x) = -\frac{\lambda r_n}{d_n} P_{n+1}(c) \sum_{\nu=0}^{n} \frac{P_\nu(c) P_\nu(x)}{r_\nu} + P_{n+1}(x), \quad n \geq 0. \tag{1.13}$$

Notant

$$\lambda_n = -\left(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{P^2_\nu(c)}{r_\nu}\right)^{-1}, \quad n \geq 0. \tag{1.14}$$

On peut énoncer:

THÉORÈME 1.1. – Soit L une forme régulière et $c \in C$. Pour que la forme $u = u(\lambda; c)$ définie par (1.1) soit régulière, il faut et il suffit que $\lambda \neq \lambda_n$, $n \geq 0$.

LEMME 1.2. – Posons:

$$\rho_n = \lambda_{n,n-1} - \gamma_n, \qquad \sigma_n(x) = x - \beta_n + \lambda_{n,n}, \qquad n \geq 0.$$

On a:

$$(x-c)P_n(x) = \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}\tilde{P}_{n+1}(x) + \frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}}\sigma_{n+1}(x)\tilde{P}_n(x), \tag{1.15}$$

$$(x-c)P_{n+1}(x) = \left(\sigma_n(x) - \rho_n\frac{\lambda_{n,n}}{\lambda_{n,n-1}}\right)\tilde{P}_{n+1}(x) - \frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}}\rho_{n+1}\tilde{P}_n(x). \tag{1.16}$$

DEM. – Ecrivons (1.4) sous la forme

$$(x-c)\tilde{P}_n(x) = \left(\frac{\lambda_{n,n-1}}{\gamma_n}(x-\beta_n) + \lambda_{n,n}\right)P_n(x) + \left(1 - \frac{\lambda_{n,n-1}}{\gamma_n}\right)P_{n+1}(x) \tag{1.17}$$

et en changeant $n \to n+1$:

$$(x-c)\tilde{P}_{n+1}(x) = (\lambda_{n+1,n} - \gamma_{n+1})P_n(x) + (x - \beta_{n+1} + \lambda_{n+1,n+1})P_{n+1}(x). \tag{1.18}$$

Le déterminant Δ_n de ce système peut s'écrire:

$$\Delta_n = \frac{\lambda_{n,n-1}}{\gamma_n}(x-c)^2,$$

d'où les équations (1.15) et (1.16). ∎

Lorsque $\lambda \neq \lambda_n$, $n \geq 0$, déterminons les éléments de la relation de récurrence de la suite $\{\tilde{P}_n\}_{n\geq 0}$:

$$\begin{cases} \tilde{P}_{n+2}(x) = (x - \tilde{\beta}_{n+1})\tilde{P}_{n+1}(x) - \tilde{\gamma}_{n+1}\tilde{P}_n(x), & n \geq 0, \\ \tilde{P}_0(x) = 1, \quad \tilde{P}_1(x) = x - \tilde{\beta}_0. \end{cases} \tag{1.19}$$

On a

$$\tilde{\gamma}_0 = 1 + \lambda, \tag{1.20}$$

$$\tilde{\gamma}_{n+1} = \gamma_n \frac{d_{n+1}d_{n-1}}{d_n^2}, \qquad n \geq 0, \ d_{-1} = 1, \tag{1.21}$$

$$\tilde{\beta}_n = \beta_{n+1} + \lambda_{n,n} - \lambda_{n+1,n+1}, \qquad n \geq 0. \tag{1.22}$$

De

$$\prod_{\nu=0}^{n+1}\tilde{\gamma}_\nu = u(\tilde{P}_{n+1}^2) = \lambda_{n+1,n}L(P_n^2) = \frac{d_{n+1}}{d_n}\prod_{\nu=0}^{n}\gamma_\nu \tag{1.23}$$

on a facilement (1.21) et $u(1) = 1 + \lambda = \tilde{\gamma}_0$.

Ensuite

$$u(\tilde{P}_n^2)\tilde{\beta}_n = u(x\tilde{P}_n^2(x)) = u((x-c)\tilde{P}_n^2(x)) + cu(\tilde{P}_n^2)$$

donc de (1.4):

$$u(\tilde{P}_n^2)\tilde{\beta}_n = \lambda_{n,n}u(\tilde{P}_n^2) + u(P_{n+1}\tilde{P}_n) + cu(\tilde{P}_n^2) = (\lambda_{n,n}+c)\,u(\tilde{P}_n^2) + \lambda P_{n+1}(c)\tilde{P}_n(c).$$

Mais de (1.13), on a:

$$\tilde{P}_n(c) = \frac{r_{n-1}}{d_{n-1}}P_n(c) = \frac{u(\tilde{P}_n^2)}{d_n}P_n(c) \text{ avec (1.19)}$$

et donc:

$$\tilde{\beta}_n = \lambda_{n,n} + c + \frac{\lambda}{d_n}P_n(c)P_{n+1}(c),$$

c'est-à-dire (1.22), compte tenu de (1.12).

EXEMPLES. – 1) Lorsque L est définie positive et $c \in \boldsymbol{R}$, alors u est aussi définie positive pour chaque $\lambda > 0$. Plus généralement, la forme u est régulière pour chaque $\lambda \in \boldsymbol{C} -]-\infty, 0[$.

2) Supposons L symétrique, régulière et réelle alors pour chaque c et λ tels que $\mathrm{Re}\, c = 0$ et $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, la forme u est régulière. La propriété a lieu, en particulier, lorsque L est symétrique et définie positive.

3) Soit L symétrique et définie négative, c'est-à-dire $\beta_n = 0$, $n \geqslant 0$ et $\gamma_{n+1} < 0$, $n \geqslant 0$, $(\gamma_0 = 1)$.

Prenons $c = 0$. Alors la forme u est également symétrique et définie négative pour chaque $\lambda > 0$. Car de (1.10), on peut écrire:

$$d_{2n+1} = \gamma_{2n+1}d_{2n} \qquad n \geqslant 0,$$

$$d_{2n+2} = \gamma_{2n+2}d_{2n+1} + \lambda P_{n+2}^2(0).$$

On a $d_0 = 1 + \lambda > 0$. Par récurrence, on voit que $d_{2n} > 0$ $n \geqslant 0$ et donc $d_{2n+1} < 0$ $n \geqslant 0$. De (1.21), on a $\tilde{\gamma}_{n+1} < 0$, $n \geqslant 0$ et de (1.12) et (1.22), $\tilde{\beta}_n = 0$ $n \geqslant 0$.

REMARQUE. – Dans le cas où L est symétrique et $c = 0$, alors, d'après (1.13) et pour chaque $\lambda \neq \lambda_n$ $n \geqslant 0$, on a:

(1.24) $$\tilde{P}_{2n+1}(x) = P_{2n+1}(x), \qquad n \geqslant 0,$$

(1.25) $$\sigma_n(x) = x, \qquad n \geqslant 0,$$

d'après (1.5) et (1.12).

On en déduit le résultat suivant: si $\{R_n\}_{n\geq 0}$ est une suite orthogonale telle que $xR_n(x^2)=P_{2n+1}(x)$, $n\geq 0$, alors toutes les suites orthogonales symétriques $\{\tilde{P}_n\}_{n\geq 0}$ telles que $\tilde{P}_{2n+1}(x)=x\,R_n(x^2)$, $n\geq 0$ sont données par (1.13) où $c=0$ et les formes associées respectives diffèrent par une masse de Dirac à l'origine.

Par contre si $\{R_n\}_{n\geq 0}$ est telle que $R_n(x^2)=P_{2n}(x)$, $n\geq 0$, on sait que la suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est la seule possible [4].

2. – Supposons que la forme régulière L soit une forme semi-classique, c'est-à-dire qu'il existe deux polynômes Ψ et Φ tels que [25]:

$$\Psi L + D(\Phi L) = 0\,, \tag{2.1}$$

avec $\deg\Psi = p\geq 1$ et $\deg\Phi = t$.

La classe s de L est donnée par:

$$\text{lorsque } 0\leq t\leq p+1,\ s=p-1; \qquad \text{lorsque } t\geq p+2,\ s=t-2\,.$$

THÉORÈME 2.1. – Soit L une forme régulière, semi-classique de classe s. Alors pour chaque $\lambda\neq\lambda_n$ $n\geq 0$, la forme $u=L+\lambda\delta_c$ est une forme régulière semi-classique, de classe $s+1$ lorsque $\Phi(c)=0$ et de classe $s+2$ lorsque $\Phi(c)\neq 0$.

DEM. – Observons que l'équation (2.1) est équivalente à

$$(x-c)(\Psi L + D(\Phi L)) = 0 \qquad \text{et} \qquad (\Psi L)_0 = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$((x-c)\,\Psi(x)-\Phi(x))\,L + D((x-c)\,\Phi(x)\,L) = 0 \qquad \text{et} \qquad (\Psi L)_0 = 0\,.$$

On en déduit que u vérifie l'équation suivante:

$$((x-c)\,\Psi(x)-\Phi(x))\,u + D((x-c)\,\Phi(x)\,u) = -\,\lambda\Phi(c)\,\delta_c\,. \tag{2.2}$$

a) $\Phi(c)=0$. Alors u est une forme semi-classique avec:

$$\tilde{\Psi}(x) = (x-c)\,\Psi(x)-\Phi(x)\,; \qquad \tilde{\Phi}(x) = (x-c)\,\Phi(x)\,, \tag{2.3}$$

$$\tilde{p}\leq\max(p+1,t)\,; \qquad \tilde{t} = t+1\,. \tag{2.4}$$

On distingue trois cas:

1) $0\leq t\leq p$, alors $\tilde{p}=p+1$, donc $\tilde{t}\leq\tilde{p}$ entraîne $\tilde{s}=\tilde{p}-1=p=s+1$,

2) $t=p+1$, alors $\tilde{t}=p+2$, donc $\tilde{p}\leq p+1=\tilde{t}-1$. Si $\tilde{t}=\tilde{p}+1$, alors $\tilde{s}=\tilde{p}-1=\tilde{t}-2=p=s+1$. Si $\tilde{t}\geq\tilde{p}+2$, alors $\tilde{s}=\tilde{t}-2=p=s+1$.

3) $t\geq p+2$, alors $\tilde{p}=t=\tilde{t}-1$, donc $\tilde{s}=\tilde{p}-1=t-1=s+1$.

b) $\Phi(c)\neq 0$. L'équation (2.2) est équivalente à l'équation:

$$(x-c)\{\{(x-c)\,\Psi(x)-\Phi(x)\}\,u + D((x-c)\,\Phi(x)\,u)\} = 0\,,$$

c'est-à-dire

$$(x-c)\{((x-c)\,\Psi(x)-2\Phi(x))\,u+D((x-c)\,\Phi(x)\,u)\}=0\,.$$

La forme u est semi-classique avec:

$$\tilde{\Psi}(x)=(x-c)^2\,\Psi(x)-2(x-c)\,\Phi(x)\,;\qquad \tilde{\Phi}(x)=(x-c)^2\,\Phi(x)\,, \tag{2.5}$$

$$\tilde{p}\leqslant p+2\,;\qquad \tilde{t}=t+2\,, \tag{2.6}$$

1) $0\leqslant t\leqslant p$, alors $\tilde{p}=p+2$, donc $\tilde{t}\leqslant\tilde{p}$, soit $\tilde{s}=\tilde{p}-1=s+2$,
2) $t=p+1$ alors $\tilde{t}=p+3$, donc $\tilde{p}\leqslant\tilde{t}-1$. Si $\tilde{t}=\tilde{p}+1$, $\tilde{s}=\tilde{p}-1=t=s+2$ si $\tilde{t}\geqslant\tilde{p}+2$, $\tilde{s}=\tilde{t}-2=t=s+2$,
3) $t\geqslant p+2$, alors $\tilde{p}=t+1=\tilde{t}-1$, donc $\tilde{s}=\tilde{p}-1=t=s+2$. ∎

La relation de structure de la suite $\{\tilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$.

Par hypothèse, la suite $\{\tilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ est une suite semi-classique: elle est donc une suite de Laguerre-Hahn affine [25], [8], [11], c'est-à-dire que la fonction de Stieltjes formelle associée à la forme L, $S(z)$, vérifie l'équation affine:

$$A(z)\,S'(z)=C(z)\,S(z)+D(z) \tag{2.7}$$

où

$$A(z)=\Phi(z)\,,\qquad C(z)=-\Psi(z)-\Phi'(z)\,, \tag{2.8}$$

$$D(z)=-L\theta_0\,\Psi(z)-D(L\theta_0\,\Phi)(z)\,. \tag{2.9}$$

Dans (2.9), θ_0 désigne l'opérateur $f\rightarrow\theta_0\,f(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$

$$\text{et}\quad (L,f)\rightarrow Lf(x)=\sum_{n=0}^{p}\left(\sum_{\nu=n}^{p}a_\nu\,(L)_{\nu-n}\right)x^n\qquad \text{si } f(x)=\sum_{\nu=0}^{p}a_\nu\,x^\nu\,.$$

La relation de structure de la suite $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ s'écrit alors [7], [8]:

$$\Phi(x)\,P'_{n+1}(x)=\frac{1}{2}(C_{n+1}(x)-C_0(x))\,P_{n+1}(x)-D_{n+1}(x)\,P_n(x)\,,\qquad n\geqslant 0\,, \tag{2.10}$$

où

$$C_{n+1}(x)=-C_n(x)+2\frac{D_n(x)}{\gamma_n}(x-\beta_n)\,,\qquad n\geqslant 0\,, \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} &D_{n+1}(x)=-\Phi(x)+\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}D_{n-1}(x)+\frac{D_n(x)}{\gamma_n}(x-\beta_n)^2-C_n(x)(x-\beta_n)\,,\ \ n\geqslant 0\,,\\ &C_0(x)=C(x)\,;\qquad D_0(x)=D(x),\ D_{-1}(x)=0\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

REMARQUE. – Ici l'indice ne désigne pas le degré des polynômes C_n et D_n. On a $\deg C_n \leqslant s+1$ et $\deg D_n \leqslant s$, $n \geqslant 0$.

Lorsque $\Phi(c)=0$, on a, d'après (2.3):

$$\begin{cases} \tilde{C}_0(x) = (x-c)\,C_0(x)\,, \\ \tilde{D}_0(x) = (x-c)\,D_0(x) + \lambda\left(C_0(x) + \dfrac{\Phi(x)}{x-c}\right). \end{cases} \tag{2.13}$$

Lorsque $\Phi(c) \neq 0$, on a, d'après (2.5):

$$\begin{cases} \tilde{C}_0(x) = (x-c)^2\,C_0(x)\,, \\ \tilde{D}_0(x) = (x-c)^2\,D_0(x) + \lambda((x-c)\,C_0(x) + \Phi(x))\,. \end{cases} \tag{2.14}$$

On en déduit les polynômes $1/2(\tilde{C}_{n+1}(x) - \tilde{C}_0(x))$ et $\tilde{D}_{n+1}(x)$ à l'aide de (2.11) et (2.12) où β_n, γ_n et Φ sont remplacés respectivement par $\tilde{\beta}_n$, $\tilde{\gamma}_n$ et $\tilde{\Phi}$, ce qui permet d'écrire la relation de structure de la suite $\{\tilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$.

On peut préciser le calcul des polynômes $1/2(\tilde{C}_{n+1}(x) - \tilde{C}_0(x))$ et $\tilde{D}_{n+1}(x)$. De (1.4), on a:

$$(x-c)\,\tilde{P}'_{n+1}(x) + \tilde{P}_{n+1}(x) = \rho_{n+1} P'_n(x) + \sigma_{n+1}(x) P'_{n+1}(x) + P_{n+1}(x)$$

d'où compte-tenu de (2.10):

$$(x-c)\,\Phi(x)\,\tilde{P}'_{n+1}(x) + \Phi(x)\,\tilde{P}_{n+1}(x) = u_n(x)\,P_{n+1}(x) + v_n(x)\,P_n(x)\,, \qquad n \geqslant 0\,, \tag{2.15}$$

$$u_n(x) = \Phi(x) + \frac{1}{2}(C_{n+1}(x) - C_0(x))\,\sigma_{n+1}(x) + \frac{D_n(x)}{\gamma_n}\rho_{n+1}, \qquad n \geqslant 0\,, \tag{2.16}$$

$$v_n(x) = \frac{1}{2}(C_n(x) - C_0(x))\,\rho_{n+1} - D_{n+1}(x)\,\sigma_{n+1}(x) - \rho_{n+1}\frac{D_n(x)}{\gamma_n}(x-\beta_n)\,, \qquad n \geqslant 0\,. \tag{2.17}$$

LEMME 2.2. – On a la relation suivante:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{n+1}(c)&\left\{u_n(x)\left(\sigma_n(c) - \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}\lambda_{n,n}\right) + \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}v_n(x)\right\} + \\ &+ \tilde{P}_n(c)\left\{\frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}}\sigma_{n+1}(c)\,v_n(x) - \frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}}\rho_{n+1}\,u_n(x)\right\} = 0\,, \qquad n \geqslant 0\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

DEM. – De (1.15) et (1.16), qu'on peut écrire:

$$
\left\{
\begin{aligned}
P_n(x) &= \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}} \frac{\tilde{P}_{n+1}(x) - \tilde{P}_{n+1}(c)}{x-c} + \frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}} \tilde{P}_n(x) + \\
&\qquad + \frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}} \sigma_{n+1}(c) \frac{\tilde{P}_n(x) - \tilde{P}_n(c)}{x-c}, \\
P_{n+1}(x) &= \tilde{P}_{n+1}(x) + \left(\sigma_n(c) - \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}} \lambda_{n,n}\right) \frac{\tilde{P}_{n+1}(x) - \tilde{P}_{n+1}(c)}{x-c} - \\
&\qquad - \frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}} \rho_{n+1} \frac{\tilde{P}_n(x) - \tilde{P}_n(c)}{x-c},
\end{aligned}
\right.
\tag{2.19}
$$

on obtient, en remplaçant dans (2.15):

$$
\begin{aligned}
(x-c)\Phi(x)\tilde{P}'_{n+1}(x) + \Phi(x)\tilde{P}_{n+1}(x) &= u_n(x)\tilde{P}_{n+1}(x) + v_n(x)\frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}}\tilde{P}_n(x) + \\
&+ \frac{\tilde{P}_{n+1}(x) - \tilde{P}_{n+1}(c)}{x-c}\left\{u_n(x)\left(\sigma_n(c) - \frac{\rho_n\lambda_{n,n}}{\lambda_{n,n-1}}\right) + \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}} v_n(x)\right\} + \\
&+ \frac{\tilde{P}_n(x) - \tilde{P}_n(c)}{x-c}\left\{\frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}}\sigma_{n+1}(c)v_n(x) - \frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}}\rho_{n+1}u_n(x)\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

D'autre part, on peut multiplier les deux membres de (2.15) par $x - c$ et compte tenu de (1.15) et (1.16), obtenir:

$$
\begin{aligned}
(x-c)^2\Phi(x)\tilde{P}'_{n+1}(x) + (x-c)\Phi(x)\tilde{P}_{n+1}(x) &= \\
&= (x-c)\left(u_n(x)\tilde{P}_{n+1}(x) + \frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}} v_n(x)\tilde{P}_n(x)\right) + \\
&+ \tilde{P}_{n+1}(x)\left\{u_n(x)\left(\sigma_n(c) - \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}\lambda_{n,n}\right) + \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}} v_n(x)\right\} + \\
&+ \tilde{P}_n(x)\left\{\frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}}\sigma_{n+1}(c)v_n(x) - \frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}}\rho_{n+1}u_n(x)\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

En comparant (2.20) et (2.21), on obtient (2.18). ∎

Le cas $\Phi(c) \neq 0$.

La relation (2.21) est la relation de structure de la suite $\{\tilde{P}_n\}_{n \geq 0}$; on a:

$$
(2.22) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}(\tilde{C}_{n+1}(x) - \tilde{C}_0(x)) = \\ \qquad = (x-c)(u_n(x) - \Phi(x)) + u_n(x)\left(\sigma_n(c) - \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}\lambda_{n,n}\right) + \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}} v_n(x)\,, \\ \tilde{D}_{n+1}(x) = \frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}}(\rho_{n+1} u_n(x) - \sigma_{n+1}(c) v_n(x) - (x-c) v_n(x))\,, \qquad n \geq 0\,. \end{cases}
$$

Le cas $\Phi(c) = 0$.

On a de (2.15):

$$
0 = u_n(c) P_{n+1}(c) + v_n(c) P_n(c)
$$

et de (1.17), (1.18):

$$
0 = \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}} P_{n+1}(c) - \left(\sigma_n(c) - \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}\lambda_{n,n}\right) P_n(c)\,,
$$

$$
0 = \sigma_{n+1}(c) P_{n+1}(c) + \rho_{n+1} P_n(c)\,,
$$

d'où

$$
(2.23) \quad \begin{cases} u_n(c)\left(\sigma_n(c) - \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}\lambda_{n,n}\right) + \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}} v_n(c) = 0\,, \\ -\rho_{n+1} u_n(c) + \sigma_{n+1}(c) v_n(c) = 0\,, \end{cases} \qquad n \geq 0\,,
$$

puisque $P_n(c)$ et $P_{n+1}(c)$ ne peuvent pas s'annuler simultanément.

On a alors la possibilité d'écrire la relation (2.21) sous la forme suivante:

$$
\begin{aligned}
(x-c)\Phi(x)\tilde{P}'_{n+1}(x) + \Phi(x)\tilde{P}_{n+1}(x) &= u_n(x)\tilde{P}_{n+1}(x) + \frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}} v_n(x)\tilde{P}_n(x) + \\
&+ \tilde{P}_{n+1}(x)\left\{\frac{u_n(x) - u_n(c)}{x-c}\left(\sigma_n(c) - \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}\lambda_{n,n}\right) + \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}\frac{v_n(x) - v_n(c)}{x-c}\right\} + \\
&+ \tilde{P}_n(x)\left\{\sigma_{n+1}(c)\frac{v_n(x) - v_n(c)}{x-c} - \rho_{n+1}\frac{u_n(x) - u_n(c)}{x-c}\right\}\frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}}, \qquad n \geq 0\,.
\end{aligned}
$$

C'est la relation de structure de la suite $\{\tilde{P}_n\}_{n\geq 0}$ et on a:

$$(2.24)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\tilde{C}_{n+1}(x)-\tilde{C}_0(x)) = u_n(x) - \Phi(x) + \dfrac{u_n(x)-u_n(c)}{x-c}\left(\sigma_n(c) - \dfrac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}\lambda_{n,n}\right) + \\ \qquad\qquad + \dfrac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}\dfrac{v_n(x)-v_n(c)}{x-c}, \quad n\geq 0, \\ \tilde{D}_{n+1}(x) = \dfrac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}}\left\{\rho_{n+1}\dfrac{u_n(x)-u_n(c)}{x-c} - \sigma_{n+1}(c)\dfrac{v_n(x)-v_n(c)}{x-c} - v_n(x)\right\}. \end{cases}$$

Ecrivons maintenant l'équation différentielle vérifiée par chaque $\tilde{P}_{n+1}$ ([1], [7], [8], [9], [12], [28]):

$$(2.25)\quad \tilde{\Phi}(x)\tilde{D}_{n+1}(x)\tilde{P}''_{n+1}(x) + \{(\tilde{\Phi}'(x)+\tilde{C}_0(x))\tilde{D}_{n+1}(x) - \tilde{\Phi}(x)\tilde{D}'_{n+1}(x)\}\tilde{P}'_{n+1}(x) +$$

$$+\left\{\frac{1}{2}(\tilde{C}_{n+1}(x)-\tilde{C}_0(x))\tilde{D}'_{n+1}(x) - \frac{1}{2}(\tilde{C}'_{n+1}(x)-\tilde{C}'_0(x))\tilde{D}_{n+1}(x) - \right.$$

$$\left. - \tilde{D}_{n+1}(x)\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\tilde{D}_\nu(x)}{\tilde{\gamma}_\nu}\right\}\tilde{P}_{n+1}(x) = 0, \quad n\geq 0.$$

Dans le cas $\Phi(c)\neq 0$, on peut écrire, compte tenu de (2.18) et (2.22):

$$(2.26)\quad \frac{1}{2}(\tilde{C}_{n+1}(x)-\tilde{C}_0(x))\tilde{D}'_{n+1}(x) - \frac{1}{2}(\tilde{C}'_{n+1}(x)-\tilde{C}'_0(x))\tilde{D}_{n+1}(x) =$$

$$= \frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}}\Big\{\rho_{n+1}((x-c)\Phi(x))'u_n(x) - \{\sigma_{n+1}(c)\Phi(x) + (x-c)\sigma_{n+1}(x)\Phi'(x)\}v_n(x) -$$

$$-\rho_{n+1}u_n^2(x) - \left\{\sigma_n(c) - \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}\lambda_{n,n} - \sigma_{n+1}(c)\right\}u_n(x)v_n(x) -$$

$$-\frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}v_n^2(x) - \rho_{n+1}(x-c)\Phi(x)u'_n(x) + (x-c)\Phi(x)\sigma_{n+1}(x)v'_n(x) -$$

$$-(x-c)\left(\sigma_{n+1}(x) + \sigma_n(c) - \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}\lambda_{n,n}\right)\{u_n(x)v'_n(x) - u'_n(x)v_n(x)\}\Big\}, \quad n\geq 0.$$

Dans le cas $\Phi(c)=0$, on a, compte-tenu de (2.18), (2.23) et (2.24):

$$(2.27)\quad \frac{1}{2}(\tilde{C}_{n+1}(x)-\tilde{C}_0(x))\tilde{D}'_{n+1}(x) - \frac{1}{2}(\tilde{C}'_{n+1}(x)-\tilde{C}'_0(x))\tilde{D}_{n+1}(x) =$$

$$= \frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}}\Big\{(\Phi(x)-u_n(x))v'_n(x) - (\Phi'(x)-u'_n(x))v_n(x) + \left(\sigma_n(c) - \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}\lambda_{n,n}\right)\cdot$$

$$\cdot\left\{v_n(x)\left(\frac{u_n(x)-u_n(c)}{x-c}\right)'-v_n'(x)\frac{u_n(x)-u_n(c)}{x-c}\right\}+$$

$$+\frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}\left\{v_n(x)\left(\frac{v_n(x)-v_n(c)}{x-c}\right)'-v_n'(x)\frac{v_n(x)-v_n(c)}{x-c}\right\}+$$

$$+\rho_{n+1}\left\{\frac{u_n(x)-u_n(c)}{x-c}(\Phi'(x)-u_n'(x))-(\Phi(c)-u_n(x))\left(\frac{u_n(x)-u_n(c)}{x-c}\right)'\right\}+$$

$$+\sigma_{n+1}(c)\left\{(\Phi(x)-u_n(x))\left(\frac{v_n(x)-v_n(c)}{x-c}\right)'-(\Phi'(x)-u_n'(x))\frac{v_n(x)-v_n(c)}{x-c}\right\}\Bigg\},\qquad n\geq 0.$$

3. - Applications. Exemples.

1) *Les polynômes orthogonaux de type Hermite.*

On considère la suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ des polynômes d'Hermite normalisés, c'est-à-dire vérifiant la récurrence:

$$P_{n+2}(x)=xP_{n+1}(x)-\frac{1}{2}(n+1)P_n(x),\qquad n\geq 0,$$

$$P_0(x)=1,\qquad P_1(x)=x.$$

Ici $\Phi(x)=1$, $\Psi(x)=2x$, donc $C_0(x)=-2x$, $D_0(x)=-2$. La relation de structure s'écrit:

$$P_{n+1}'(x)=(n+1)P_n(x),$$

donc

$$\frac{1}{2}(C_{n+1}(x)-C_0(x))=0;\qquad D_{n+1}(x)=-(n+1),\qquad n\geq 0.$$

On choisit $c=0$. Alors:

$$\lambda_{2n}=\lambda_{2n+1}=-\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+1/2)}\,\frac{n!}{2n+1},\qquad n\geq 0,$$

$$\tilde{\Phi}(x)=x^2,\qquad \tilde{\psi}(x)=2x(x^2-1);\qquad \tilde{C}_0(x)=-2x^3,\qquad \tilde{D}_0(x)=\lambda-2(1+\lambda)x^2,$$

$$\rho_{2n+1}=0,\ \ \rho_{2n+2}=\frac{1}{2}\,\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}};\ \ \lambda_{2n+1,2n}=\frac{1}{2}(2n+1),\ \ \lambda_{2n+2,2n+1}=\left(n+\frac{3}{2}\right)\frac{\lambda-\lambda_{2n+2}}{\lambda-\lambda_{2n}},$$

$$n\geq 0,$$

$$u_{2n}(x)=1,\quad v_{2n}(x)=(2n+1)\,x;\quad u_{2n+1}(x)=-\frac{\lambda_{2n}}{\lambda-\lambda_{2n}},\quad v_{2n+1}(x)=\left(2n+2+\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)x,\qquad n\geqslant 0,$$

$$\frac{1}{2}(\tilde{C}_{n+1}(x)-\tilde{C}_0(x))=(-1)^n\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}x,\qquad n\geqslant 0,$$

$$\tilde{D}_{2n+1}(x)=-\left(2n+1-\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)x^2;$$

$$\tilde{D}_{2n+2}(x)=-\frac{1}{2}\frac{\lambda\lambda_{2n}}{(\lambda-\lambda_{2n})^2}-\left(2(n+1)+\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)x^2,\qquad n\geqslant 0.$$

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par $\tilde{P}_{2n+2}$:

$$x^2\left\{\frac{1}{2}\frac{\lambda\lambda_{2n}}{(\lambda-\lambda_{2n})^2}+\left(2(n+1)+\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)x^2\right\}\tilde{P}''_{2n+2}(x)+ \tag{3.1}$$

$$+x\tilde{P}'_{2n+2}(x)\left\{\frac{\lambda\lambda_{2n}}{(\lambda-\lambda_{2n})^2}(1-x^2)-2\left(2(n+1)+\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)x^4\right\}+$$

$$+\tilde{P}_{2n+2}(x)\left\{2\left\{n\left(\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)^2-3(n+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right\}x^2+4(n+1)\left(2n+2+\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)x^4\right\}=0,\qquad n\geqslant 0.$$

La suite $\{\tilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ vérifie la récurrence:

$$\begin{cases}\tilde{P}_{n+2}(x)=x\tilde{P}_{n+1}(x)-\tilde{\gamma}_{n+1}\tilde{P}_n(x), & n\geqslant 0,\\ \tilde{P}_0=1, \quad \tilde{P}_1(x)=x, \end{cases} \tag{3.2}$$

où

$$\tilde{\gamma}_{2n+1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)+n,\qquad n\geqslant 0,$$

$$\tilde{\gamma}_{2n+2}=\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}+n+1,\qquad n\geqslant 0.$$

2) *Les polynômes orthogonaux de type Hermite généralisés.*

Les polynômes d'Hermite généralisés sont définis par [4]

$$H^{\mu}_{2n}(x)=(-1)^n2^{2n}n!\,L_n^{(\mu-1/2)}(x^2),\qquad n\geqslant 0,$$

$$H^{\mu}_{2n+1}(x)=(-1)^n2^{2n+1}n!\,xL_n^{(\mu+1/2)}(x^2),\qquad n\geqslant 0,$$

où $L_n^{(\alpha)}$ désigne les polynômes de Laguerre. On note $H_n(x;\mu)$ et $L_n(x;\alpha)$ respectivement les polynômes normalisés d'Hermite généralisés et de Laguerre, de sorte que:

$$H_{2n}(x;\mu) = L_n(x^2;\mu - 1/2)\,; \qquad H_{2n+1}(x;\mu) = xL_n(x^2;\mu + 1/2)\,.$$

La relation de récurrence s'écrit alors:

$$H_{n+2}(x;\mu) = xH_{n+1}(x;\mu) - (1/2)(n+1+\theta_{n+1})H_n(x;\mu)\,, \qquad n \geqslant 0$$

$$H_0(x;\mu) = 1\,, \qquad H_1(x;\mu) = x$$

avec

$$\theta_{n+1} = \mu(1+(-1)^n)\,.$$

On note $\mathcal{H}(\mu)$ la forme canonique $((\mathcal{H}(\mu))_0 = 1)$ de la suite $\{H_n(x;\mu)\}_{n\geqslant 0}$; elle est régulière pour chaque $\mu \neq -n-1/2$, $n \geqslant 0$. De même, on note $\mathcal{L}(\alpha)$ la forme canonique de la suite $\{L_n(x;\alpha)\}_{n\geqslant 0}$; elle est régulière pour chaque $\alpha \neq -n$, $n \geqslant 1$. On sait que:

$$\langle \mathcal{L}(\alpha), f \rangle = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)\,dx \qquad \text{si } \operatorname{Re}\alpha > -1\,,$$

$$\langle \mathcal{H}(\mu), f \rangle = \frac{1}{\Gamma(\mu+1/2)} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{2\mu} e^{-x^2} f(x)\,dx \qquad \text{si } \operatorname{Re}\mu > -1/2\,.$$

Ici $\Phi(x) = x$, $\Psi(x) = 2x^2 - (2\mu+1)$, $s = 1$

$$C_0(x) = 2(\mu - x^2)\,, \qquad D_0(x) = -2x\,.$$

La relation de structure s'écrit:

$$xH'_{n+1}(x;\mu) = -\frac{n\theta_{n+1}}{n+\theta_n} H_{n+1}(x;\mu) + \left(n+1+\frac{n\theta_{n+1}}{n+\theta_n}\right) xH_n(x;\mu)\,, \qquad n \geqslant 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}(C_{n+1}(x) - C_0(x)) = -\frac{n\theta_{n+1}}{n+\theta_n}\,; \qquad D_{n+1}(x) = -\left(n+1+\frac{n\theta_{n+1}}{n+\theta_n}\right)x$$

avec la convention $n/(n+\theta_n) = 0$ pour $n = 0$.

On choisit $c = 0$. On a:

$$H_{2n}(0;\mu) = (-1)^n \frac{\Gamma(\mu+1/2+n)}{\Gamma(\mu+1/2)}\,; \qquad H'_{2n+1}(0;\mu) = \frac{2n+1+2\mu}{1+2\mu} H_{2n}(0;\mu)\,,$$

donc

$$\lambda_{2n} = \lambda_{2n+1} = -\frac{1+2\mu}{2n+1+2\mu}\,\frac{\Gamma(\mu+1/2)}{\Gamma(\mu+1/2+n)}\,n!\,, \qquad n \geqslant 0\,,$$

$$\tilde{\Phi}(x) = x^2; \qquad \tilde{\Psi}(x) = 2n(x^2-\mu-1)\,,$$

$$\tilde{C}_0(x) = 2x(\mu - x^2)\,, \qquad \tilde{D}_0(x) = \lambda(1+2\mu) - 2(1+\lambda)\,x^2\,,$$

$$\lambda_{2n+1,2n} = \mu + \frac{1}{2} + n\,, \qquad \lambda_{2n+2,2n+1} = n+1+\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\,,$$

$$\rho_{2n+1} = 0\,, \qquad \rho_{2n+2} = \left(\mu+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\,,$$

$$u_{2n}(x) = (1-2\mu)\,x\,, \qquad v_{2n}(x) = (2n+1+2\mu)\,x^2\,, \qquad n \geqslant 0\,,$$

$$u_{2n+1}(x) = \left\{1-(2\mu+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right\}x\,,$$

$$v_{2n+1}(x) = -\mu(2\mu+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}} + \left(2(n+1)+(2\mu+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)x^2\,,$$

$$\frac{1}{2}(\tilde{C}_{2n+1}(x) - \tilde{C}_0(x)) = \left(-2\mu + (2\mu+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)x\,,$$

$$\frac{1}{2}(\tilde{C}_{2n+2}(x) - \tilde{C}_0(x)) = \left(-(2\mu+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)x\,,$$

$$\tilde{D}_{2n+1}(x) = \left\{(2\mu+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}} - (2n+1+2\mu)\right\}x^2\,,$$

$$\tilde{D}_{2n+2}(x) = \frac{1}{2}(2\mu+1)^2\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right) - \left(2(n+1)+(2\mu+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)x^2\,, \quad n \geqslant 0\,.$$

On en déduit l'équation différentielle vérifiée par $\tilde{H}_{2n+2}(x;\mu)$:

$$x^2\left\{\frac{1}{2}(2\mu+1)^2\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right) - \left(2(n+1)+(2\mu+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)x^2\right\}\cdot \tag{3.3}$$

$$\cdot\tilde{H}''_{2n+2}(x;\mu) + x\tilde{H}'_{2n+2}(x;\mu)\left\{(1+\mu)(2\mu+1)^2\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right) -\right.$$

$$\left. -\left\{2\mu\left(2(n+1)+(2\mu+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right) + (2\mu+1)^2\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)\right\}x^2 + \right.$$

$$+2\left\{2(n+1)+(2\mu+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right\}x^4\Bigg\}+$$

$$+\tilde{H}_{2n+2}(x;\mu)\left\{2(2\mu+1)\left\{(2\mu+3)(n+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}-(2\mu+1)n\left(\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)^2\right\}x^2-\right.$$

$$\left.-4(n+1)\left\{2(n+1)+(2\mu+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right\}x^4\right\}=0\,,\qquad n\geqslant 0\,.$$

La suite $\{\tilde{H}_n(x;\mu)\}_{n\geqslant 0}$ vérifie la récurrence:

$$\begin{cases}\tilde{H}_{n+2}(x;\mu)=x\tilde{H}_{n+1}(x;\mu)-\tilde{\gamma}_{n+1}(\mu)\tilde{H}_n(x;\mu)\,, & n\geqslant 0\,,\\ \tilde{H}_0(x;\mu)=1\,,\quad \tilde{H}_1(x;\mu)=x\end{cases}\tag{3.4}$$

où

$$\left.\begin{cases}\tilde{\gamma}_{2n+1}(\mu)=\left(\mu+\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)+n\,,\\ \tilde{\gamma}_{2n+2}(\mu)=\left(\mu+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)+n+1\,,\end{cases}\right.\qquad n\geqslant 0\,.\tag{3.5}$$

3) *Les polynômes orthogonaux de type Laguerre.*

Choisissons $c=0$, ici $u=\mathcal{L}(\mu+1/2)+\lambda\delta$.

Introduisons les composantes non symétriques de $\tilde{H}_n(x;\mu)$:

$$\tilde{H}_{2n}(x;\mu)=R_n(x^2;\mu)\,;\qquad \tilde{H}_{2n+1}(x;\mu)=H_{2n+1}(x;\mu)=xL_n(x^2;\mu+1/2)\,.$$

Soit w la forme linéaire par rapport à laquelle la suite $\{R_n(x;\mu)_{n\geqslant 0}$ est orthogonale. On a $w=\sigma\tilde{\mathcal{H}}(\mu)$ où σv pour $v\in\mathcal{P}'$ désigne la forme linéaire telle que $(\sigma v)_n=(v)_{2n}$, $n\geqslant 0$. D'autre part, on a:

$$xw=(w)_1\,\mathcal{L}(\mu+1/2)$$

d'où

$$w=(w)_0\,\delta+(w)_1\,x^{-1}\mathcal{L}(\mu+1/2)\,.$$

Or $(w)_0=(\tilde{\mathcal{H}}(\mu))_0=1+\lambda$; $(w)_1=(\tilde{\mathcal{H}}(\mu))_2=(\mathcal{H}(\mu))_2=(\mathcal{L}(\mu-1/2))_1=\mu+1/2$ et il est facile de vérifier que

$$x^{-1}\mathcal{L}(\alpha)=(1/\alpha)[\mathcal{L}(\alpha-1)-\delta]\,,\qquad \alpha\neq 0$$

de sorte que:

$$w=\mathcal{L}(\mu-1/2)+\lambda\delta\,.$$

Cela signifie que $w=\tilde{\mathcal{L}}(\mu-1/2)$ et $R_n(x;\mu)=\tilde{L}_n(x;\mu-1/2)$, $n\geqslant 0$.

L'équation différentielle vérifiée par $\tilde{L}_{n+1}(x;\mu-1/2)$ se déduit immédiatement de (3.3) qu'on peut écrire sous la forme:

$$x^2 E_n(x^2)\widetilde{H}''_{2n+2} + x\widetilde{H}'_{2n+2}F_n(x^2) + \widetilde{H}_{2n+2}G_n(x^2) = 0$$

donc

$$4x^2 E_n(x)\widetilde{L}''_{n+1}(x;\mu-1/2) + 2x\widetilde{L}'_{n+1}(x;\mu-1/2)\{E_n(x)+F_n(x)\} + \\ + \widetilde{L}_{n+1}(x;\mu-1/2)\,G_n(x) = 0\,. \tag{3.6}$$

La suite $\{\widetilde{L}_n(x;\mu-1/2)\}_{n\geqslant 0}$ vérifie la récurrence:

$$\begin{cases} \widetilde{L}_{n+2}(x;\mu-1/2) = \\ \qquad = (x-\widetilde{\beta}_{n+1})\widetilde{L}_{n+1}(x;\mu-1/2) - \widetilde{\gamma}_{n+1}\widetilde{L}_n(x;\mu-1/2)\,, \qquad n\geqslant 0\,, \\ \widetilde{L}_0(x;\mu-1/2) = 1\,, \quad \widetilde{L}_1(x;\mu-1/2) = x - \dfrac{\mu+1/2}{1+\lambda} \end{cases} \tag{3.7}$$

où

$$\widetilde{\beta}_{n+1} = 2(n+1) + (\mu+1/2)\left(\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}} + 1 - \frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n+2}}\right), \qquad n\geqslant 0\,,$$

$$\widetilde{\gamma}_{n+1} = \left\{(\mu+1/2)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}}\right)+n\right\}\left\{(\mu+1/2)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_{2n}} + n + 1\right\}, \qquad n\geqslant 0\,.$$

4) *Les polynômes orthogonaux de type Bessel.*

Les polynômes de Bessel normalisés sont définis par [14], [2]:

$$B_{n+2}(x;\alpha) = (x-\beta_{n+1})B_{n+1}(x;\alpha) - \gamma_{n+1}B_n(x;\alpha)\,, \qquad n\geqslant 0\,,$$

$$B_0(x;\alpha) = 1\,, \qquad B_1(x;\alpha) = x + 1/\alpha$$

où

$$\beta_{n+1} = \frac{1-\alpha}{(n+\alpha)(n+\alpha+1)}\,, \qquad n\geqslant 0$$

$$\gamma_{n+1} = -\frac{(n+1)(n+2\alpha-1)}{(2n+2\alpha-1)(2n+2\alpha+1)(n+\alpha)^2}\,, \qquad n\geqslant 0\,.$$

Notons $\mathcal{B}(\alpha) = L$ la forme associée à la suite $\{B_n(x;\alpha)\}_{n\geqslant 0}$. Cette forme est régulière pour chaque $\alpha \neq -n/2$, $n\geqslant 0$. On a

$$\Phi(x) = x^2\,, \qquad \Psi(x) = -2(\alpha x + 1)$$

et

$$C_0(x) = 2((\alpha-1)x+1)\,, \qquad D_0(x) = 2\alpha - 1\,.$$

La relation de structure s'écrit:

$$x^2 B'_{n+1}(x;\alpha) = (n+1)\left(x - \frac{1}{n+\alpha}\right) B_{n+1}(x;\alpha) - (2n+2\alpha+1)\gamma_{n+1} B_n(x;\alpha), \qquad n \geqslant 0,$$

donc

$$\frac{1}{2}(C_{n+1}(x) - C_0(x)) = (n+1)\left(x - \frac{1}{n+\alpha}\right); \qquad D_{n+1}(x) = (2n+2\alpha+1)\gamma_{n+1}, \qquad n \geqslant 0.$$

On choisit $c = 0$. On a

$$B_n(0;\alpha) = 2^n \frac{\Gamma(n+2\alpha-1)}{\Gamma(2n+2\alpha-1)}, \qquad B'_n(0;\alpha) = 2^{n-1} n \frac{\Gamma(n+2\alpha)}{\Gamma(2n+2\alpha-1)}, \qquad n \geqslant 0,$$

donc

$$\lambda_n = (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(2\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha)} n!, \qquad n \geqslant 0.$$

Ensuite:

$$\tilde{\Phi}(x) = x^3, \qquad \tilde{\Psi}(x) = -x((2\alpha+1)x+2); \qquad \tilde{s} = 1,$$

$$\tilde{C}_0(x) = 2x((\alpha-1)x+1); \qquad \tilde{D}_0(x) = (2\alpha-1)(1+\lambda)x + 2\lambda,$$

$$\rho_{n+1} = -\frac{2n+2\alpha+1}{n+1}\gamma_{n+1}\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}; \qquad \lambda_{n+1,n} = \gamma_{n+1}\left(1 - \frac{2n+2\alpha+1}{n+1}\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\right), \qquad n \geqslant 0,$$

$$\lambda_{n+1,n+1} = \beta_{n+1} - \frac{1}{n+\alpha}\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}, \qquad n \geqslant 0,$$

$$u_n(x) = (n+2)x^2 - \frac{n+1}{n+\alpha}\left(1 + \frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\right)x + \frac{2}{n+\alpha}\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}, \qquad n \geqslant 0,$$

$$v_n(x) = \frac{2n+2\alpha+1}{n+1}\gamma_{n+1}\left\{\left\{(n+2\alpha-1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n} - (n+1)\right\}x + 2\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\right\}, \qquad n \geqslant 0,$$

$$\frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}} = \frac{2n+2\alpha-1}{n+2\alpha-1}\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}; \qquad \frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}} = 1 - \frac{2n+2\alpha-1}{n+2\alpha-1}\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}, \qquad n \geqslant 0,$$

$$\sigma_n(0) - \frac{\rho_n}{\lambda_{n,n-1}}\lambda_{n,n} = \frac{1}{n+\alpha}\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}, \qquad n \geqslant 0,$$

$$\frac{1}{2}(\tilde{C}_{n+1}(x) - \tilde{C}_0(x)) = (n+1)x^2 - \frac{1}{n+\alpha}\left(n+1-\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\right)x +$$

$$+ \frac{2}{n+\alpha}\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\right), \qquad n \geqslant 0,$$

$$\tilde{D}_{n+1}(x) = \frac{\gamma_n}{\lambda_{n,n-1}} \frac{2n+2\alpha+1}{n+1} \gamma_{n+1} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left\{ n+1-(2n+2\alpha+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n} \right\} x - 2\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\right) \right\}, \qquad n \geqslant 0 .$$

D'où l'équation différentielle vérifiée par $\tilde{B}_{n+1}(x,\alpha)$:

$$(3.8) \quad x^2 \left\{ \left(n+1-(2n+2\alpha+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n} \right) x - 2\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\right) \right\} \tilde{B}''_{n+1}(x,\alpha) +$$

$$+ 2\tilde{B}'_{n+1}(x,\alpha) \left\{ \alpha \left(n+1-(2n+2\alpha+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n} \right) x^2 + \right.$$

$$\left. + \left\{ (2\alpha+1)\left(\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\right)^2 - 2(n+2\alpha+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n} + n + 1 \right\} x - 2\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\right) \right\} -$$

$$- (n+2\alpha)\tilde{B}_{n+1}(x;\alpha) \cdot$$

$$\cdot \left\{ (n+1) \left\{ n+1-(2n+2\alpha+1)\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n} \right\} x - 2\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\left(n+1-n\frac{\lambda}{\lambda-\lambda_n}\right) \right\} = 0 , \quad n \geqslant 0 .$$

La suite $\{\tilde{B}_n(x;\alpha)\}_{n\geqslant 0}$ vérifie la récurrence:

$$(3.9) \qquad \begin{cases} \tilde{B}_{n+2}(x;\alpha) = (x-\tilde{\beta}_{n+1})\tilde{B}_{n+1}(x;\alpha) - \tilde{\gamma}_{n+1}\tilde{B}_n(x;\alpha) , & n \geqslant 0 \\ \tilde{B}_0(x;\alpha) = 1 , \quad \tilde{B}_1(x;\alpha) = x + \dfrac{1}{\alpha(1+\lambda)} & \end{cases}$$

où

$$(3.10) \qquad \begin{cases} \tilde{\beta}_{n+1} = \beta_{n+1} + \dfrac{1}{n+\alpha+1}\dfrac{\lambda}{\lambda-\lambda_{n+1}} - \dfrac{1}{n+\alpha}\dfrac{\lambda}{\lambda-\lambda_n} , \qquad n \geqslant 0 , \\ \tilde{\gamma}_{n+1} = \dfrac{\gamma_{n+1}}{(n+1)(n+2\alpha-1)} \left\{ (2n+2\alpha+1)\dfrac{\lambda}{\lambda-\lambda_n} - (n+1) \right\} \cdot \\ \qquad \cdot \left\{ (2n+2\alpha-1)\dfrac{\lambda}{\lambda-\lambda_n} - (n+2\alpha-1) \right\} . \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. V. ATKINSON - W. N. EVERITT, *Orthogonal polynomials which satisfy second order differential equations*, in *E. B. Christoffel, the Influence of His Work on Mathematics and the Physical Sciences*, edited by P. L. BUTZER and F. FEHER, Birkhaüser, Basel (1981), pp. 173-181.

[2] M. BACHENE, *Les polynômes semi-classiques de classe zéro et de classe un*, Thèse de troisième cycle, Univ. P. et M. Curie, Paris (1985).

[3] A. CACHAFEIRO - F. MARCELLAN, *Polinomios ortogonales y medidas singulares sobre curvas*, Act. Jorn. Hisp.-Lusas. de Mat., **11** (1986), pp. 128-139.

[4] T. S. CHIHARA, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York (1978).

[5] T. S. CHIHARA, *Orthogonal polynomials and measures with end point masses*, Rocky Mount. J. of Math., **15** (3) (1985), pp. 705-719.

[6] J. S. DEHESA - F. J. GALVEZ, *Propiedades globales de ceros de polinomios ortogonales*, Act. III Symp. Pol. Ortog., edited by F. MARCELLAN (1985), pp. 9-41.

[7] J. DZOUMBA, *Sur les polynômes de Laguerre-Hahn*, Thèse de troisième cycle, Univ. P. et M. Curie, Paris (1985).

[8] M. GUERFI, *Les polynômes de Laguerre-Hahn affines discrets*, Thèse de troisième cycle, Univ. P. et M. Curie, Paris (1988).

[9] W. HAHN, *Uber Differentialgleichungen für Orthogonalpolynome*, Monat. Math., **95** (1983), pp. 269-274.

[10] E. HENDRIKSEN, *A Bessel type orthogonal polynomial system*, Indagat. Math., **46** (1982), pp. 407-414.

[11] E. HENDRIKSEN - H. VAN ROSSUM, *A Padé type approach to non-classical orthogonal polynomials*, J. Math. Anal. Appl., **106** (1985), pp. 237-248.

[12] E. HENDRIKSEN - H. VAN ROSSUM, *Semi-classical orthogonal polynomials*, Proc. Symp. Laguerre, Lect. Notes in Math., **1171**, Springer-Verlag (1985), pp. 354-361.

[13] T. H. KOORNWINDER, *Orthogonal polynomials with weight function* $(1-x)^{\alpha}(1+w)^{\beta}+$ $+M\delta(x+1)+N\delta(x-1)$, Canad. Math. Bull., **27** (2) (1984), pp. 205-214.

[14] H. L. KRALL - O. FRINK, *A new class of orthogonal polynomials: The Bessel polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc., **65** (1949), pp. 100-115.

[15] A. M. KRALL, *Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinb., 87-A (1981), pp. 271-288.

[16] A. M. KRALL - L. L. LITTLEJOHN, *On the classification of differential equations having orthogonal polynomial solutions - II*, Ann. Mat. Pura Appl., **149** (4) (1987), pp. 77-102.

[17] L. L. LITTLEJOHN - S. SHORE, *Non classical orthogonal polynomials as solutions to second order differential equations*, Canad. Math. Bull., **25** (3) (1982), pp. 291-295.

[18] L. L. LITTLEJOHN, *The Krall polynomials: a new class of orthogonal polynomials*, Quaest. Math., **5** (1982), pp. 255-265.

[19] L. L. LITTLEJOHN, *On the classification of differential equations having orthogonal polynomial solutions*, Ann. Mat. Pura Appl., **138** (4) (1984), pp. 35-53.

[20] L. L. LITTLEJOHN, *An application of a new theorem on orthogonal polynomials and differential equations*, Quaest. Math., **10** (1986), pp. 49-61.

[21] L. L. LITTLEJOHN - A. M. KRALL, *Orthogonal polynomials and singular Sturm-Liouville systems - I*, Rocky Mount. J. Math., **16** (1986), pp. 435-479.

[22] F. MARCELLAN - A. RONVEAUX, *Differential equation for classical type orthogonal polynomials*, Canad. Math. Bull. 32(4) (1989), pp. 404-411.

[23] P. MARONI, *Une caractérisation des polynômes orthogonaux semi-classiques*, C. R. Acad. Sc. Paris, **301**, I, n. 6 (1985), pp. 269-272.

[24] P. MARONI, *Prolégomènes à l'étude des polynômes orthogonaux semi-classiques*, Ann. Mat. Pura Appl., **149** (4) (1987), pp. 165-184.

[25] P. MARONI, *Le calcul des formes linéaires et les polynômes orthogonaux semi-classiques*, in *Proc. of Second Symp. on Orth. Poly. and Appl.*, edited by M. ALFARO et alt., Lecture Notes in Math., **1329**, Springer-Verlag (1988), pp. 279-290.

[26] P. MARONI, *L'orthogonalité et les récurrences de polynômes d'ordre supérieur à deux*, Publ. Lab. Anal. Num. Univ. P. et M. Curie, C.N.R.S., n. 87024, Paris (1987), a paraître.

[27] P. NEVAI, *Orthogonal polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc., **213**, AMS Providence (1979).

[28] J. SHOHAT, *A differential equation for orthogonal polynomials*, Duke Math. J., **5** (1939), pp. 401-417.

[29] G. SZEGÖ, *Orthogonal polynomials*, AMS Colloq. Pub. 23, 4ème ed., AMS Providence (1975).

[30] V. B. UVAROV, *The connection between systems of polynomials orthogonal with respect to different distribution functions*, USSR Comp. Math. Phys., **9** (6) (1969), pp. 25-36.