Über einige Fragen betreffend die Theorie der Maxima und Minima mehrfacher Integrale.

Von **Johann Radon** in Göttingen.

Aufgabe der folgenden Betrachtungen ist es, die Methoden der Parameterdarstellung, welche seit Weierstraß in die Variationsrechnung Eingang gefunden haben und für das Integral $\int F(x\,y\,x'\,y')\,dt$ vollständig ausgebaut sind, auf den Fall mehrfacher Integrale, welche erste Ableitungen der unbekannten Funktionen enthalten, auszudehnen. Wir beschäftigen uns mit Integralen über n-dimensionale Hyperflächen im $n+1$-dimensionalen Raume und werden für diese einerseits die formalen Resultate betreffend die Theorie der ersten und zweiten Variation, anderseits die Hauptsätze der neueren Variationsrechnung — den Hilbertschen Unabhängigkeitssatz, die daraus sich ergebende Transformation der totalen Variation nach Weierstraß und den Kneserschen Transversalensatz — abzuleiten haben. Auf eine arithmetisch strenge Begründung ist dabei kein Gewicht gelegt; bei genügender Einschränkung der Begriffe „Hyperfläche", „Rand der Hyperfläche" bietet sie kaum Schwierigkeiten, würde aber trotzdem viel Raum erfordern.

Die Methoden der Parameterdarstellung sind bereits von Kobb (Acta mathematica, Bd. 16, 17) auf Doppelintegrale angewendet worden und ist diese Theorie im 8. Kapitel von Knesers Lehrbuch ausführlich dargestellt. Es ist nun bemerkenswert, daß die recht komplizierten Rechnungen dieser Autoren sich durch einen einfachen Kunstgriff sehr vereinfachen lassen und dann leicht auf den allgemeinen Fall von n-fachen Integralen übertragen werden können. Durch eben diesen Kunstgriff gelingt es, die Transversalitätsbedingung, den Unabhängigkeitssatz etc. sehr einfach und übersichtlich aussprechen zu können.

I.

In dem $(n+1)$-dimensionalen Raume mit den Koordinaten $x_0\,x_1\ldots x_n$ sei eine Hyperfläche in der Parameterdarstellung:

$$x_i = x_i(u_1\,u_2\ldots u_n) \qquad i=0,\,1\ldots n \tag{1}$$

gegeben und es mögen die Determinanten der Matrix

$$\left\| \frac{\partial x_i}{\partial u_k} \right\|$$

an keiner Stelle gleichzeitig verschwinden. Wir bezeichnen diese Determinanten wie folgt:

$$p_h = (-1)^h \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_{h-1}}{\partial u_1} \; \frac{\partial x_{h+1}}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Sei nun Φ eine Funktion von $x_0 \ldots x_1$ und den Ableitungen $\frac{\partial x_i}{\partial u_k}$. Wir betrachten dann das n-fache Integral

$$J = \int \Phi\left(x_i, \frac{\partial x_i}{\partial u_k}\right) d u_1 \ldots d u_n$$

erstreckt über die Hyperfläche. Wir wollen nun nur solche Funktionen Φ betrachten, für die dieses Integral von der Wahl der Parameter u_i unabhängig ist. Um das noch genauer zu fixieren, wollen wir voraussetzen, daß unsere Hyperfläche auf ein bestimmtes Parametersystem bezogen sei; dann wird durch die zugehörigen p_h eine positive Normalenrichtung festgelegt und damit in jedem Punkte eine positive und negative Seite der Hyperfläche unterschieden. Wir betrachten nun nur solche Parametertransformationen, welche die Seiten der Fläche nicht vertauschen, d. h. deren Determinante

$$\frac{\partial (u_1 \ldots u_n)}{\partial (u_1' \ldots u_n')} = \Delta \tag{3}$$

positiv ist. Das Integral geht dabei über in:

$$J' = \int \Phi\left(x_i, \frac{\partial x_i}{\partial u_k'}\right) d u_1' \ldots d u_n' = \int \Phi\left(x_i \ldots \frac{\partial x_i}{\partial u_k'}\right) \frac{1}{\Delta} d u_1 \ldots d u_n .$$

Man schließt daraus leicht, daß, wenn $J = J'$ sein soll für alle Hyperflächen und möglichen Parameterdarstellungen, die Identität

$$\Phi\left(x_i \frac{\partial x_i}{\partial u_k'}\right) = \Delta \; \Phi\left(x_i \frac{\partial x_i}{\partial u_k}\right)$$

bestehen muß. Statt nun, wie es Kobb und Kneser tun, daraus durch verschiedene Differentiationen Relationen zwischen den Ableitungen von Φ nach den $\frac{\partial x_i}{\partial u_k}$ herzuleiten, machen wir die leicht zu verifizierende Bemerkung, daß obige Identität dann und nur dann erfüllt ist, wenn Φ die Form hat:

$$\Phi\left(x_i \frac{\partial x_i}{\partial u_k}\right) = F(x_i\, p_i),$$

wo F eine positiv homogene Funktion der p_i ist, sodaß:

$$F(x_i, k p_i) = k F(x_i\, p_i), \text{ wenn } k > 0. \tag{4}$$

Darin besteht der in der Einleitung erwähnte Kunstgriff, dessen nächste Folge in der Annehmlichkeit besteht, in der Funktion F nur noch $2n+2$ Veränderliche zu haben, während Φ deren $(n+1)^2$ enthielt. Aus (4) folgt weiter:

$$F(x_i\, p_i) = \sum_{h=0}^{n} p_h F_{p_h} \tag{5}$$

$$0 = \sum_{h=0}^{n} p_h F_{p_h p_k}, \tag{6}$$

wenn die Indizes p_h, Ableitung nach der betr. Veränderlichen bedeuten. Aus (6) folgt, da die allgemeine Lösung der Gleichung

$$\sum_{h=0}^{n} p_h \lambda_h = 0$$

durch

$$\lambda_h = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial x_h}{\partial u_i}$$

gegeben ist, daß sich die $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ Größen $F_{p_i p_k}$ durch $\frac{n(n+1)}{2}$ neue Größen $\Phi_{rs} = \Phi_{sr}$ in der Form ausdrücken lassen:

$$F_{p_i p_k} = \sum_{r,s=1}^{n} \Phi_{rs} \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s}. \tag{7}$$

Zu bemerken ist dabei, daß F, F_{p_i}, $F_{p_i p_k}$ gegenüber Parametertransformation invariant sind, und zwar bez. vom Index $1, 0, -1$, während die Φ_{rs} wieder von der Wahl des Parametersystems abhängig sind. Doch besteht folgende wichtige Beziehung für den Übergang zu neuen Parametern $u'_1 \ldots u'_n$:

$$\Phi'_{rs} = \Delta^{-1} \sum_{\varrho\sigma} \Phi_{\varrho\sigma} \frac{\partial u'_r}{\partial u_\varrho} \frac{\partial u'_s}{\partial u_\sigma} \tag{8}$$

wo Δ durch (3) definiert ist. Man kann nun, sobald die Determinante der Φ von Null verschieden ist, die Φ_{rs} als Unterdeterminanten eines Größensystems φ_{rs} auffassen und erhält das Resultat, daß die quadratische Differentialform

$$\sum_{rs=1}^{n} \varphi_{rs}\, du_r\, du_s$$

sich beim Übergang zu neuen Parametern, wie folgt, transformiert:

$$\sum_{rs=1}^{n} \varphi'_{rs}\, du'_r\, du'_s = \Delta^{-\frac{3}{n-1}} \sum_{rs=1}^{n} \varphi_{rs}\, du_r\, du_s. \tag{9}$$

Um die Φ_{ik} durch die $F_{p_i p_k}$ auszudrücken, verfahren wir wie folgt: Wir bezeichnen die Unterdeterminante von $\frac{\partial x_i}{\partial u_k}$ in p_h mit $P_{i,k}^{(h)}$ und setzen $P_{i,k}^{(i)} = 0$. Dann bestehen nach elementaren Determinantensätzen die Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
&P_{i,k}^{(h)} + P_{h,k}^{(i)} = 0 \\
&\sum_{\lambda=0}^{n} P_{\lambda,\sigma}^{(\varkappa)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_\varrho} = \delta_{\varrho\sigma}\, p_\varkappa. \qquad \sum_{\lambda=0}^{n} P_{\varrho,\sigma}^{(\lambda)} \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_\tau} = -\,\delta_{\tau\sigma}\, p_\varrho \\
&\sum_{\lambda=1}^{n} P_{\varrho\lambda}^{(\varkappa)} \frac{\partial x_\sigma}{\partial u_\lambda} = \delta_{\sigma\varrho}\, p_\varkappa - \delta_{\sigma\varkappa}\, p_\varrho \\
&\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P_{i,k}^{(s)}}{\partial u_k} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Dabei bedeutet $\delta_{ik} = 0$, wenn $i \neq k$, $\delta_{ii} = 1$.

Mit Hilfe der zweiten Gleichung von (10) ergibt sich aus (7):

$$p_\lambda\, p_\mu\, \Phi_{rs} = \sum_{ik=0}^{n} F_{p_i p_k}\, P_{ir}^{(\lambda)}\, P_{ks}^{(\mu)}. \tag{11}$$

Wenn daher $p_h \neq 0$, so gestatten diese Formeln, wenn wir $\lambda = \mu = h$ setzen, die Berechnung von Φ_{rs}.

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir an die Transformation der ersten Variation; wir haben zunächst:

$$\delta J = \int \delta F\, du_1 \ldots du_n.$$

Nun ist

$$\delta F = \sum_{h=0}^{n} F_{x_h}\,\delta x_h + F_{p_h}\,\delta p_h = \sum_{h=0}^{n} F_{x_h}\,\delta x_h +$$

$$+ \sum_{i,h=0}^{n}\sum_{k=1}^{n} P^{(h)}_{i,k}\frac{\partial\,\delta x_i}{\partial u_k} F_{p_h} = \Sigma F_{x_h}\,\delta x_h - \sum_{i,h=0}^{n}\sum_{k=1}^{n}\delta x_i \frac{\partial P^{(h)}_{i,k}}{\partial u_k} -$$

$$- \sum_{i,h=0}^{n}\sum_{k=1}^{n} P^{(h)}_{i,k}\,\delta x_i \frac{\partial F_{p_h}}{\partial u_k} + \sum_{i,h=0}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_k}(F_{p_h} P^{(h)}_{i,k}\,\delta x_i).$$

Nach der letzten Gleichung (10) verschwindet das zweite Glied; setzen wir noch

$$\frac{\partial F_{p_h}}{\partial u_k} = \sum_{\varrho}\left(F_{x_\varrho p_h}\frac{\partial x_\varrho}{\partial u_k} + F_{p_\varrho p_h}\frac{\partial p_\varrho}{\partial u_k}\right)$$

und drücken $\frac{\partial p_\varrho}{\partial u_k}$ durch $\sum_{rs} P^{(\varrho)}_{rs}\frac{\partial^2 x_r}{\partial u_k\,\partial u_s}$ aus, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Relation (10) das einfache Endresultat:

$$\delta F = \sum_{i,h=0}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial u_k}(F_{p_h} P^{(h)}_{ik}\,\delta x_i) + T\,.\sum_{h=0}^{n} p_h\,\delta x_h, \tag{12}$$

wo:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=0}^{n} F_{x_i p_i} - \sum_{r,s=1}^{n}\Phi_{rs}\,d_{rs} \\ d_{rs} &= \sum_{h=0}^{n} p_h\frac{\partial^2 x_h}{\partial u_r\,\partial u_s} = -\sum_{h=0}^{n}\frac{\partial x_h}{\partial u_s}\frac{\partial p_h}{\partial u_r} = -\sum_{h=0}^{n}\frac{\partial x_h}{\partial u_r}\frac{\partial p_h}{\partial u_s}. \end{aligned} \tag{13}$$

Die quadratische Differentialform

$$\sum_{r,s=1}^{n} d_{rs}\,du_r\,du_s = -\sum_{h=0}^{n} dp_h\,dx_h$$

transformiert sich beim Übergang zu neuen Parametern wie folgt:

$$\sum_{r,s=1}^{n} d'_{rs}\,du'_r\,du'_s = \Delta\sum_{r,s=1}^{n} d_{rs}\,du_r\,du_s. \tag{14}$$

Daraus und aus (9) folgt, daß der Ausdruck T gegenüber Parametertransformation absolut invariant ist. $T = 0$ ist die Differentialgleichung der Extremalhyperflächen. Setzen wir jetzt

(12) in dem Ausdruck für δJ ein, so läßt sich das erste Glied durch partielle Integration in ein Integral über den ($n-1$-dimensionalen) Rand der Hyperfläche transformieren. Ist dieser durch $x_k = x_k(v_1 \ldots v_{n-1})$ gegeben, so erhält man schließlich:

$$\delta J = \pm \int \begin{vmatrix} F_{p_0} & F_{p_1} & \ldots & F_{p_n} \\ \delta x_0 & \delta x_1 & \ldots & \delta x_n \\ \frac{\partial x_0}{\partial v_1} & \frac{\partial x_1}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial v_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_0}{\partial v_{n-1}} & \frac{\partial x_1}{\partial v_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial v_{n-1}} \end{vmatrix} d v_1 \ldots d v_{n-1} + \qquad (15)$$

$$+ \int T . \sum_{i=0}^{n} p_i \, \delta x_i \, d u_1 \ldots d u_n$$

Das Vorzeichen des ersten Integrals hängt von der Wahl der Parameter $v_1 \ldots v_{n-1}$ ab.

Man sieht daraus, daß bei fester Begrenzung für das Extremum $T = 0$ notwendig ist, d. h. daß die Hyperfläche eine Extremale sein muß.

Ist dagegen nur vorgeschrieben, daß die Begrenzung auf einer gegebenen Hyperfläche K liegen soll, so sind die δx_i am Rande nicht Null. Man sieht aber ein, daß dann die Unterdeterminanten der ersten Zeile im ersten Gliede von (15) proportional den Größen $\pi_0 \, \pi_1 \ldots \pi_n$ sein müssen, wenn wir mit π_k die Richtungsparameter der Normale von K bezeichnen. Daher ergibt sich für das Extremum bei variabler Begrenzung die weitere notwendige Bedingung:

$$\sum_{h=0}^{n} F'_{p_h} \pi_h = 0, \qquad (16)$$

welche wir als Transversalitätsbedingung bezeichnen.

Es hätte hier die Theorie der zweiten Variation anzuschließen, es sei nur soviel bemerkt, daß sich — bei festen Grenzen — die zweite Variation einer Extremalhyperfläche in die Form:

$$\delta^2 J = \int \Psi(w) \, w \, d u_1 \ldots d u_n$$

bringen läßt, wo $w = \sum p_i \, \delta x_i$ und Ψ ein linearer, sich selbst adjungierter Differentialausdruck zweiter Ordnung von der Form ist:

$$\Psi(w) = A w - \sum_{h,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_h} \left(\Phi_{hk} \frac{\partial w}{\partial u_k} \right). \qquad (17)$$

Die daran anschließende Jacobische Transformation der zweiten Variation und die damit zusammenhängenden Betrachtungen wickeln sich genau so ab, wie wenn das Integral die Form hat $\int f\left(x_0 \ldots x_n \frac{\partial x_0}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x_0}{\partial x_n}\right) dx_1 \ldots dx_n$. Wir entnehmen dieser Theorie den Satz,[1]) daß für das Eintreten eines Minimums bezw. Maximums notwendig ist, daß die quadratische Form

$$\sum_{i,k=1}^{n} \Phi_{ik}\, y_i\, y_k \tag{17a}$$

entlang der Extremalhyperfläche für kein reelles Wertsystem $y_1 \ldots y_n$ negativ bezw. positiv wird.

Ist die Determinante $|\Phi_{ik}|$ nicht Null, so können wir statt dessen auch die Form mit den Koeffizienten φ_{ik} diskutieren (vgl. 9), welche mit der ersten Form gleichzeitig positiv oder negativ, definit bezw. indefinit ist.

II.

Wir wenden uns jetzt dem zweiten Teil unserer Betrachtungen zu. Es sei eine einparametrige Schar von Extremalhyperflächen gegeben, welche einen Teil des $(n+1)$-dimensionalen Raumes genau einfach überdeckt, den wir als Feld bezeichnen. Dort sind dann $p_0 \ldots p_n$, $F_{p_0} \ldots F_{p_n}$ eindeutige Funktionen des Ortes, wenn wir eben unter $p_0 \ldots p_n$ die für die durch den Punkt $x_0 \ldots x_n$ gehende Extremalhyperfläche berechneten Werte verstehen. Man kann nun sofort eine Differentialrelation ableiten, der die $F_{p_0} \ldots F_{p_n}$ genügen. Bezeichnen wir nämlich mit $\frac{\partial F_{p_i}}{\partial x_k}$ eine Differentiation in dem Sinne, daß F_{p_i} als eindeutige Funktion von $x_0 \ldots x_n$ gedacht wird, so haben wir:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F_{p_k}}{\partial x_k} &= \sum_{k=0}^{n} \left(F_{p_k x_k} + \sum_{h=0}^{n} F_{p_k p_h} \frac{\partial p_h}{\partial x_k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(F_{p_k x_k} + \sum_{h=0}^{n} \sum_{rs=1}^{n} \Phi_{rs} \frac{\partial x_k}{\partial u_r} \frac{\partial x_h}{\partial u_s} \frac{\partial p_h}{\partial x_k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} F_{p_k x_k} - \sum_{r,s=1}^{n} \Phi_{rs}\, d_{rs}.
\end{aligned}$$

Das ist aber nichts anderes als der Ausdruck T und dieser verschwindet, weil die Hyperflächen Extremalen sind.

[1]) der für $n=2$ von Mason streng bewiesen ist.

Wir haben also die Relation

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\partial F_{p_k}}{\partial x_k} = 0, \tag{18}$$

welche aber nichts anderes besagt, als daß das Integral

$$J^* = \int \sum_{k=0}^{n} \bar{p}_k \, F_{p_k} \, d\bar{u}_1 \ldots d\bar{u}_n \tag{19}$$

über alle Hyperflächen mit derselben Berandung, die ganz im Felde liegen und deren Parameter $\bar{u}_1 \ldots \bar{u}_n$, deren Normalenrichtung $\bar{p}_0 \ldots \bar{p}_n$ ist, denselben Wert hat. Damit ist das Analogon des Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes gewonnen.

Daraus ergibt sich weiter folgende Transformation von ΔJ: Sei ein Extremalenstück mit einem Felde umgeben, so daß es selbst einer Feldextremale angehört. Dann können wir das Integral $\int F \, du_1 \ldots du_n = J$, genommen über die Extremale, ersetzen durch das Integral J^*, genommen über eine beliebige Hyperfläche, die ganz im Felde verläuft und denselben Rand hat wie die Extremalhyperfläche. Das Integral $\int F \, d\bar{u}_1 \ldots d\bar{u}_n$, genommen über letztere Fläche, sei mit $\bar{J}$ bezeichnet, dann wird:

$$\Delta J = \bar{J} - J = \bar{J} - J^* = \int E(\bar{x}_0 \ldots \bar{x}_n \, p_0 \ldots p_n \, \bar{p}_0 \ldots \bar{p}_n) \, d\bar{u}_0 \ldots d\bar{u}_n, \tag{20}$$

wenn wir setzen:

$$E(\bar{x}_0 \ldots \bar{x}_n p_0 \ldots p_n \bar{p}_0 \ldots \bar{p}_n) = F(\bar{x}\,\bar{p}) - \sum_{\varkappa=0}^{n} \bar{p}_\varkappa F_{p_\varkappa}(\bar{x}\,p), \tag{21}$$

wo die p die als Funktionen des Feldes gefaßten Normalenrichtungen der Extremalen sind.

Wir betrachten nun die durch die Differentialgleichungen:

$$\frac{dx_0}{F_{p_0}} = \frac{dx_1}{F_{p_1}} \cdots = \frac{dx_n}{F_{p_n}}$$

gegebenen Kurven des Feldes. Sie überdecken, $F \neq 0$ vorausgesetzt, das Feld einfach und sollen als „Transversalkurven" bezeichnet werden. Grenzt man auf einer Extremalhyperfläche des Feldes ein beliebiges Gebiet ab, so bilden die durch dessen Rand gehenden Transversalkurven eine Hyperfläche, die als „Transversalhyperfläche" bezeichnet werde. Diese begrenzt auf jeder Extremalhyperfläche des Feldes ein gewisses Gebiet und das Integral $\int F \, du_1 \ldots du_n$, über dieses Gebiet erstreckt, hat für alle Feldextremalen denselben Wert, wie aus (15) folgt. Das ist das Analogon des Kneserschen Transversalensatzes. Längs einer Transversalfläche erstreckt, hat das Hilbertsche Integral J^* den Wert Null, da dort sein Integrand identisch verschwindet; auch hieraus folgt sofort der Transversalensatz.

Wir wollen nun die Folgerungen aus der Transformation (20) entwickeln. Entwickeln wir $F(\overline{x}\,\overline{p})$ nach dem Taylorschen Satze in bezug auf die Veränderlichen $\overline{p}$, so ergibt sich, Stetigkeit der Ableitungen $F_{p_i p_k}$ vorausgesetzt:

$$E(\overline{x}\,p\,\overline{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=0}^{n} (\overline{p}_k - p_k)(\overline{p}_i - p_i)\, F_{p_i p_k}(\overline{x}\,p^*), \tag{22}$$

wenn wir setzen:

$$p_i^* = p_i + \Theta(\overline{p}_i - p_i),\ 0 < \Theta < 1.$$

Ferner ergibt sich:

$$E(\overline{x}, k_1 p, k_2 \overline{p}) = k_2\, E(\overline{x}, p, \overline{p}), \quad k_1, k_2 > 0.$$

Wir können daher bei der folgenden Diskussion über das Vorzeichen von E immer statt p, $\overline{p}$ die Richtungskosinus der betreffenden Normale einführen, d. h. p_k durch $\xi_k = \frac{p_k}{\sqrt{\sum_h p_h^2}}$, $\overline{p}_k$ durch $\overline{\xi}_k = \frac{\overline{p}_k}{\sqrt{\sum_h \overline{p}_h^2}}$ ersetzen. Wir machen nun folgende Voraussetzungen:

a) Entlang der Extremalhyperfläche H, die mit einem Felde umgeben sei, sei die quadratische Form mit den Koeffizienten Φ_{ik} positiv definit.

b) Entlang derselben Extremalhyperfläche sei $E(x\,p\,\overline{p})$ bezw. $E(x, \xi, \overline{\xi})$ positiv für alle Wertsysteme (x, p) bezw. (x, ξ) der Extremale H und jedes beliebige Wertsystem $\overline{p}$ bezw. $\overline{\xi}$ und verschwinde nur für $p_i = \overline{p}_i$ bezw. $\xi_i = \overline{\xi}_i$ $(i = 0, 1 \ldots n)$.

α) Aus der zweiten Voraussetzung folgt zunächst: Wenn wir eine beliebige Zahl ε, $0 < \varepsilon < 1$, vorgeben, so läßt sich eine Umgebung (ρ) von H innerhalb des Feldes so fixieren, daß für alle Wertsysteme $\overline{\xi}$, die der Relation $\sum_i \xi_i \overline{\xi}_i \leqq 1 - \varepsilon$ genügen, und in jedem Punkte der Umgebung (ρ) die E-Funktion ebenfalls positiv ist.

Wir betrachten jetzt den Ausdruck (22) für E als eine quadratische Form mit den Variablen $\overline{p} - p$ und den Koeffizienten $F_{p_i p_k}(\overline{x}, p^*)$. Für $\overline{x} = x$, $\overline{p}_i = p_i$ gehen diese Koeffizienten in

$F_{p_i p_k}(x, p)$ über und die quadratische Form erhält nach Einführung der Φ_{rs} den Wert:

$$\sum_{i,k=0}^{n} F_{p_i p_k}(x, p)\, y_i y_k = \sum_{rs=1}^{n} \Phi_{rs} \sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \sum_k y_k \frac{\partial x_k}{\partial u_s}.$$

Da aber nach der Voraussetzung *a*) die Φ_{rs} die Koeffizienten einer definiten Form sind, so verschwindet die Form $\Sigma F_{p_i p_k}(x, p)\, y_i y_k$ nur für $y_i = \rho p_i$ und wird niemals negativ. Sie ist also semidefinit. Die Bedingung dafür ist, daß keine Wurzel λ der Gleichung

$$\begin{vmatrix} F_{p_0 p_0} - \lambda & F_{p_0 p_1} \ldots\ldots & F_{p_0 p_n} \\ F_{p_0 p_0} & F_{p_1 p_1} - \lambda \ldots & F_{p_1 p_n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ F_{p_n p_0} & F_{p_n p_1} \ldots\ldots & F_{p_n p_n} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

negativ ist. Diese Gleichung hat nun die Wurzel $\lambda = 0$, welche eine einfache Wurzel ist, da der Koeffizient von λ den Wert $|\Phi_{ik}| \sum\limits_i p_i^2$ hat, wo $|\Phi_{ik}|$ die aus den Φ_{ik} gebildete Determinante ist. Alle übrigen Wurzeln sind daher positiv. Gehen wir jetzt von den $F_{p_i p_k}(x, p)$ zu den $F_{p_i p_k}(\bar{x}, p^*)$ über, so bleibt die Wurzel $\lambda = 0$ bestehen und die entsprechenden Werte von y_i, die die Form $\Sigma\, y_i y_k\, F_{p_i p_k}(\bar{x}, p^*)$ zum Verschwinden bringen, sind, wie man leicht sieht, proportional dem p^*. Letztere Form ist daher, wenn man die $\bar{x}$, p^* bezw. $\bar{p}$ genügend nahe an x, p wählt, ebenfalls semidefinit (positiv). Die E-Funktion, geschrieben mit den ξ, kann daher nach (22) nur dann verschwinden, wenn

$$\bar{\xi}_i - \xi_i = \rho\, \xi_i^* = \rho\, [\xi_i + \Theta\, (\bar{\xi}_i - \xi_i)], \tag{23}$$

wo ρ eine positive Konstante bedeutet, oder für $\bar{\xi}_i = \xi_i$. Aus (23) folgt aber, da $\Sigma\, \bar{\xi}_i^2 = \Sigma\, \xi_i^2 = 1$ ist,

$$(1 - \rho\Theta)(1 - \Sigma\, \xi_i \bar{\xi}_i) = -\rho$$

$$(1 - \rho\Theta)(1 - \Sigma\, \xi_i \bar{\xi}_i) = \rho\, \Sigma\, \xi_i \bar{\xi}_i.$$

Da ρ positiv sein soll, $\sum\limits_i \xi_i \bar{\xi}_i$ aber, wenn die Richtung $\bar{\xi}_i$ genügend nahe an ξ_i liegt, positiv ist, so sind diese Gleichungen unverträglich. Es folgt daher:

β) Es läßt sich eine Umgebung $\overline{(\rho')}$ von H und eine positive Zahl $\varepsilon < 1$ so bestimmen, daß $E(\bar{x}, \xi\, \bar{\xi})$ in der Umgebung (ρ') von H und für $1 > \sum\limits_i \xi_i \bar{\xi}_i > 1 - \varepsilon$ nicht verschwindet.

Wenn wir dann den unter α) bewiesenen Satz anwenden, so folgt, daß eine Umgebung (ρ'') von H innerhalb des Feldes angegeben werden kann, in der die E-Funktion nur für $p_i = \overline{p}_i$ verschwindet und sonst überall positiv ist.

Die Bedingungen a) und b) sind daher hinreichend für das Bestehen eines starken Minimums.

Es gelingt auch die Notwendigkeit der Bedingung $E \geqq 0$ nachzuweisen, was für eine spätere Arbeit vorbehalten sei.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß die Form, in der wir das Problem behandelt haben, zu einer sinngemäßen Erweiterung des Begriffes Flächenintegral Anlaß gibt, die hier für den Fall $n = 2$ angedeutet werden soll. Dieselbe entspricht vollkommen der Verallgemeinerung des Kurvenintegralbegriffes durch Weierstraß bei der Behandlung des Problems des Integrals $\int F(x y x' y')\,dt$. Wir überziehen die Fläche, über welche das Integral zu erstrecken ist, mit einem Dreiecksnetz, dessen Seitenlänge eine positive Zahl η nicht übersteigt und dessen Winkel größer sind als eine positive Zahl ε, die beliebig klein, aber fest gegeben ist. Ist ferner die Fläche, wie wir voraussetzen wollen, einseitig, so ist auch in jedem Dreieck der Einteilung eine positive Seite ausgezeichnet, sobald dies für die ganze Fläche geschehen ist. Bezeichnen wir nun die Projektionen eines solchen Dreiecks auf die Koordinatenebenen bezw. ihre Flächeninhalte mit $\delta_1\,\delta_2\,\delta_3$, wobei z. B. δ_1 die Projektion auf die (yz)-Ebene ist, positiv oder negativ gerechnet, je nachdem die positive Dreieckseite der (yz)-Ebene ab- bezw. zugewendet ist, und bilden die Summe:

$$\Sigma F(x y z\, \delta_1\, \delta_2\, \delta_3), \tag{24}$$

welche über alle Dreiecke zu erstrecken ist, wo x, y, z einen beliebigen Punkt des betreffenden Dreiecks bedeutet, so kann man zeigen, daß, wenn die Fläche eine stetig sich drehende Tangentialebene hat, d. h. die Funktionen $x(u, v)$ $y(u, v)$ $z(u, v)$ mit ihren ersten Ableitungen stetig sind, daß diese Summe für $\eta = 0$, aber festes ε gegen das Integral $\int F(x y z\, p_1\, p_2\, p_3)\,du\,dv$ konvergiert. Es ist daher eine naheliegende Verallgemeinerung, den Grenzwert von (24), falls er existiert, als Definition des Flächenintegrals zu betrachten.