Zur Differentiation bestimmter Integrale nach einem Parameter.

Von **Alfred Meder** in Riga.

1. Bezeichnet α einen veränderlichen Parameter, so ist unter der Funktion

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x, \alpha) \cdot dx$$

an der Stelle $\alpha = \alpha_0$ derjenige Wert des Integrals zu verstehen, der erhalten wird, wenn man in der Funktion $f(x, \alpha)$ das Argument α durch α_0 ersetzt und hierauf die Integration zwischen den Grenzen a und b vollzieht. Wir nehmen hiebei an, daß alle Operationen sich auf ein reelles Gebiet beschränken und daß die Grenzen a und b von x und α unabhängige Werte haben, wobei auch $a = -\infty$, $b = +\infty$ sein kann.

Um den Differentialquotienten der Funktion $F(\alpha)$ zu erhalten, hat man den Grenzwert des Ausdruckes

$$\frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h} = \int_a^b \frac{f(x, \alpha + h) - f(x, \alpha)}{h} dx \tag{1}$$

für $h = 0$ zu bilden, und zwar ist die Reihenfolge der hiebei zu vollführenden Operationen folgende: Zunächst gibt man α den speziellen Wert α_0, für den die Ableitung $F'(\alpha)$ gefunden werden soll, hierauf berechnet man das Integral auf der rechten Seite der Formel (1) für einen beliebigen, einem gewissen Intervalle $0 < |h| < \delta$ angehörenden Wert von h und dann erst geht man zum Grenzwert für ein nach Null strebendes h über. Wird die Reihenfolge dieser Rechnungen geändert, so kann sich ein Resultat ergeben, welches nicht den gesuchten Differentialquotienten liefert. Hiebei ist besonders häufig die Frage behandelt worden, unter welchen Umständen man $F'(\alpha)$ erhält, wenn man auf der rechten Seite der Formel (1) nach Festlegung des Wertes von α den Grenzwert des Integranden für $h = 0$ bestimmt und dann zwischen den Grenzen a und b integriert, d. h. unter welchen Umständen die sogenannte Leibnizsche Formel

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

gilt. Es hat jedoch auch nicht an Untersuchungen darüber gefehlt, wie die Ableitung von $F(\alpha)$ beim Versagen der Leibnizschen Formel bestimmt werden kann.

2. In manchen Fällen kann hiebei eine Bemerkung von Nutzen sein, die ich in der mir zur Verfügung stehenden Literatur nicht angetroffen habe und die sich unmittelbar aus dem nachstehenden bekannten Satze ergibt: „Wenn die Größe $F'(\alpha)$ für $\alpha = \alpha_0 + 0$ einen bestimmten und endlichen oder einen unendlich großen Grenzwert hat, so existiert auch die Derivierte der $F(\alpha)$ für $\alpha = \alpha_0$ zur Rechten und ist diesem Grenzwert der $F'(\alpha)$ gleich.“ [1])

Aus diesem Satze folgt nämlich:

Es möge die Funktion

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx$$

in einem gewissen Intervall $\alpha_0 \leqq \alpha < \alpha_0 + \delta$ stetig sein und für alle Punkte dieses Intervalls mit Ausnahme des Punktes $\alpha = \alpha_0$ die durch die Gleichung

$$F'(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx \tag{2}$$

definierte Derivierte haben. Wenn dann diese Größe $F'(\alpha)$ für $\alpha = \alpha_0 + 0$ einen bestimmten endlichen oder unendlich großen Grenzwert hat, so existiert auch die Derivierte der Funktion $F(\alpha)$ für $\alpha = \alpha_0$ zur Rechten und es ist

$$F'(\alpha_0 + 0) = \lim_{\alpha=\alpha_0+0}\int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)\,dx.$$

Das entsprechende gilt selbstverständlich auch für ein Intervall $\alpha_0 \geqq \alpha > \alpha_0 - \delta$ und die Derivierte zur Linken.

Die Anwendung dieses Satzes ist offenbar gleichbedeutend damit, daß wir auf der rechten Seite der Formel (1) den Grenzwert des Integranden für $h = 0$ bei beliebigem α bilden, hierauf zwischen den Grenzen a und b integrieren und zuletzt α stetig dem speziellen Wert α_0 zustreben lassen.

[1]) Dini, Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Größe, dtsch. v. Lüroth u. Schepp, Leipzig 1892, S. 109.

3. Bei der Formulierung unseres Satzes ist die Annahme der einseitigen Stetigkeit von $F(\alpha)$ im Punkte $\alpha = \alpha_0$ wesentlich, da der Ausdruck (2) für $F'(\alpha)$, bei Annäherung von α an α_0, einem Grenzwerte zustreben kann, ohne daß die Bedingung der Stetigkeit für die Funktion $F(\alpha)$ erfüllt ist, so daß diese Funktion im betrachteten Punkte keinen Differentialquotienten zur Rechten, bezw. zur Linken besitzen kann.

So hat z. B. die Funktion [1])

$$F(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}\, dx$$

den Wert

$$-\frac{\pi}{2}, \quad 0, \quad +\frac{\pi}{2},$$

je nachdem

$$(2\varkappa - 1)\pi < \alpha < 2\varkappa\pi, \qquad \alpha = \varkappa\pi, \qquad 2\varkappa\pi < \alpha < (2\varkappa + 1)\pi$$

ist, wo $\varkappa$ eine ganze Zahl oder Null bedeutet; sie ist also in den Punkten $\alpha = \varkappa\pi$ unstetig.

Für ein Intervall, das keinen Punkt $\alpha = \varkappa\pi$ enthält, ist

$$\frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$$

eine stetige Funktion von x und α mit stetiger partieller Ableitung nach α und daher

$$F'(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}\right) dx = \int_{-1}^{+1} \frac{(1 + x^2)\cos \alpha - 2x}{(1 - 2x \cos \alpha + x^2)^2}\, dx =$$

$$= \left[\frac{1 - x \cos \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}\right]_{x=-1}^{x=+1} = 0.$$

Es ist daher auch

$$\lim_{\alpha = \varkappa\pi} F'(\alpha) = 0,$$

obwohl die Funktion $F(\alpha)$ an der Stelle $\alpha = \varkappa\pi$ unstetig ist.

4. Als Beispiel für unseren oben formulierten Satz betrachten wir die Funktion [2]):

$$F(\alpha) = \int_0^1 \log (x^2 + \alpha^2)\, dx,$$

---

[1]) Goursat, Cours d'analyse mathématique. I, Paris 1902, p. 219.

[2]) Stolz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung I, Leipzig 1893. S. 455.

die den Wert

$$F(\alpha) = \log(1+\alpha^2) - 2 + 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha} \tag{3}$$

hat, während

$$F(0) = \int_0^1 \log x^2\, dx = -2 \tag{4}$$

ist. Da

$$\lim_{\alpha=0}\left[\log(1+\alpha^2) - 2 + 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha}\right] = -2$$

ist, so ist die Funktion $F(\alpha)$ stetig in der Umgebung des Punktes $\alpha = 0$.

Bilden wir

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial\alpha}\log(x^2+\alpha^2)\,dx = \int_0^1 \frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}\,dx,$$

so ist der Integrand eine stetige Funktion von x und α, ausgenommen, wenn x und α gleichzeitig verschwinden. Es ist daher für ein von Null verschiedenes α:

$$F'(\alpha) = \int_0^1 \frac{2\alpha}{x^2+\alpha^2}\,dx = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha},$$

und, nach unserem Satze in Nr. 2,

$$F'(\pm 0) = \lim_{\alpha=\pm 0} 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha} = \pm\pi,$$

was mit dem aus den Gleichungen (3) und (4) resultierenden Werte

$$F'(\pm 0) = \lim_{\varepsilon=\pm 0}\frac{F(\varepsilon)-F(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon=\pm 0}\frac{\log(1+\varepsilon^2)+2\varepsilon\operatorname{arctg}\frac{1}{\varepsilon}}{\varepsilon} = \pm\pi$$

übereinstimmt.

Die Leibnizsche Formel dagegen verliert ihre Gültigkeit, da

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\log(x^2+\alpha^2)\right]_{\alpha=0} dx = 0$$

ist.

Thomae[1]) findet den letzten Schluß bedenklich, da

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \log (x^2 + \alpha^2)$$

an der Stelle $x = 0$, $\alpha = 0$ keine wohlbestimmte Funktion ist. Ich kann mich diesem Bedenken nicht anschließen; denn, nach der Definition uneigentlicher Integrale ist

$$\int^{1} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \log (x^2 + \alpha^2)\right]_{\alpha = 0} dx = \lim_{\varepsilon = 0} \int_{\varepsilon}^{1} \left[\frac{2\alpha}{x^2 + \alpha^2}\right]_{\alpha = 0} dx = \lim_{\varepsilon = 0} \int_{\varepsilon}^{1} 0 . dx = 0,$$

da, nach dem in Nr. 1 Gesagten, zuerst in der partiellen Ableitung von $\log (x^2 + \alpha^2)$ nach α für α der spezielle Wert 0 zu setzen und hierauf erst zu integrieren ist.

5. Als weiteres Beispiel wollen wir noch ein von Thomae[2]) angegebenes Integral näher untersuchen, nämlich das Integral

$$F(\alpha) = \int_{-1}^{+1} f(x, \alpha)\, dx,$$

für welches der Integrand folgendermaßen definiert wird:

$$f(x, 1) = (1 - x^2)\,|x|, \quad f(0, 0) = 0,$$

$$f(x\, \alpha,) = f\left(\frac{x}{\alpha}, 1\right) = \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)\left|\frac{x}{\alpha}\right|, \text{ wenn } \frac{1}{4}\pi \leqq \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x} \leqq \frac{3}{4}\pi,$$

$$f(x, \alpha) = 0, \text{ wenn } \frac{3}{4}\pi \leqq \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{x} \leqq \frac{9}{4}\pi.$$

Für die Funktion $F(\alpha)$ ergeben sich dann die nachstehenden Werte:

$$\alpha \leqq 0\colon\ F(\alpha) = 0;$$

$$0 \leqq \alpha < 1\colon\ F(\alpha) = \left(\int_{-1}^{-\alpha} + \int_{-\alpha}^{0} + \int_{0}^{+\alpha} + \int_{+\alpha}^{+1}\right) f(x, \alpha)\, dx =$$

$$= -\int_{-\alpha}^{0} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) \frac{x}{\alpha}\, dx + \int_{0}^{+\alpha} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) \frac{x}{\alpha}\, dx = 2\int_{0}^{\alpha} \left(1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) \frac{x}{\alpha}\, dx = \frac{\alpha}{2};$$

$$\alpha = 1\colon\ F(\alpha) = -\int_{-1}^{0} (1 - x^2)\, x\, dx + \int_{0}^{+1} (1 - x^2)\, x\, dx =$$

$$= 2\int_{0}^{1} (1 - x^2)\, x\, dx = \frac{1}{2};$$

---

[1]) Thomae, Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourierschen Reihen, Leipzig und Berlin 1908, S. 38.

[2]) Thomae, a. a. O. S. 36.

$$1<\alpha:\ F(\alpha)=-\int_{-1}^{0}\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\frac{x}{\alpha}\,dx+\int_{0}^{+1}\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\frac{x}{\alpha}\,dx=$$

$$=2\int_{0}^{1}\left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right)\frac{x}{\alpha}\,dx=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2\alpha^3}.$$

Die Funktion $F(\alpha)$ ist stetig für jeden Wert von α.

Für die Funktion $f'_\alpha(x,\alpha)$ erhält man:

$$\alpha<0:\ f'_\alpha(x,\alpha)=0;$$

$$\alpha=0,\ x=0:\ f'_\alpha(x,\alpha)=f'_\alpha(0,0)=\lim_{\varepsilon=0}\frac{f(0,\varepsilon)-f(0,0)}{\varepsilon}=0;$$

$$0\leqq\alpha<|x|:\ f'_\alpha(x,\alpha)=0;$$

$$0\leqq x<\alpha:\ f'_\alpha(x,\alpha)=-\frac{x}{\alpha^2}+\frac{3x^3}{\alpha^4};$$

$$0\leqq -x<\alpha:\ f'_\alpha(x,\alpha)=\frac{x}{\alpha^2}-\frac{3x^3}{\alpha^4};$$

$$0<\alpha=x:\ f'_\alpha(\alpha-0,\alpha)=\frac{2}{\alpha},\ f'_\alpha(\alpha+0,\alpha)=0;$$

$$0<\alpha=-x:\ f'_\alpha(-\alpha-0,\alpha)=0,\ f'_\alpha(-\alpha+0,\alpha)=\frac{2}{\alpha}.$$

Die Funktion $f'_\alpha(x,\alpha)$ ist für $x=\alpha$ unstetig. Nichts destoweniger ist, nach einem Satz von Hardy,[1] für von Null verschiedene Werte von α:

$$F'(\alpha)=\int_{-1}^{+1}f'_\alpha(x,\alpha)\,dx,$$

was sich leicht verifizieren läßt. In der Tat hat man:

$$\alpha<0:\ \int_{-1}^{+1}f'_\alpha(x,\alpha)\,dx=\int_{-1}^{+1}0.dx=0;$$

[1]) Hardy, On differentiation and integration under the integral sign. Quart. Journ. of Math. XXXII (1901), p. 81.

$$0 < \alpha \leqq 1: \int_{-1}^{+1} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \left(\int_{-1}^{-\alpha} + \int_{-\alpha}^{0} + \int_{0}^{+\alpha} + \int_{+\alpha}^{+1}\right) f'_\alpha(x,\alpha)\,dx =$$

$$= \int_{-\alpha}^{0}\left(\frac{x}{\alpha^2} - \frac{3x^3}{\alpha^4}\right)dx + \int_{0}^{+\alpha}\left(-\frac{x}{\alpha^2} + \frac{3x^3}{\alpha^4}\right)dx =$$

$$= 2\int_{0}^{\alpha}\left(-\frac{x}{\alpha^2} + \frac{3x^3}{\alpha^4}\right)dx = \frac{1}{2};$$

$$1 \leqq \alpha: \int_{-1}^{+1} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx = \int_{-1}^{0}\left(\frac{x}{\alpha^2} - \frac{3x^3}{\alpha^4}\right)dx + \int_{0}^{+1}\left(-\frac{x}{\alpha^2} + \frac{3x^3}{\alpha^4}\right)dx =$$

$$= 2\int_{0}^{1}\left(-\frac{x}{\alpha^2} + \frac{3x^3}{\alpha^4}\right)dx = -\frac{1}{\alpha^2} + \frac{3}{2\alpha^4}.$$

Nach unserem Satze auf S. 2 ist daher

$$F'(-0) = 0, \quad F'(+0) = \frac{1}{2},$$

was ebenfalls leicht nachgeprüft werden kann.

Für $\alpha = 0$ erhält man

$$\int_{-1}^{+1} f'_\alpha(x,0)\,dx = 0;$$

die Leibnizsche Formel versagt, weil das Integral

$$\int_{-1}^{+1} f'_\alpha(x,\alpha)\,dx$$

in der Umgebung der Stelle $\alpha = 0$ nicht gleichmäßig konvergiert.