Über die Approximation von komplexen Zahlen.

Von Nikolaus Hofreiter in Wien.

Was die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen eines vorgegebenen imaginären quadratischen Zahlkörpers $k(i\sqrt{m})$ betrifft, so ist darüber folgendes bekannt: Es sei α eine beliebige komplexe Zahl, die nicht in $k(i\sqrt{m})$ liegt, p, q seien ganze Zahlen aus $k(i\sqrt{m})$. Es gibt positive Zahlen γ, so daß

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{\gamma}{|q|^2}$$

unendlich viele Lösungen hat[1]).

Für den Körper $k(i)$ gab Minkowski die Zahl $\frac{\sqrt{6}}{\pi}$ für γ an[2]). Perron gab für alle imaginären quadratischen Körper Schranken für γ an[3]), die besagen, wie klein man γ wählen darf, um unendlich viele Lösungen zu erhalten, bzw. wann nicht mehr unendlich viele Lösungen existieren. Die genaue Schranke für γ für den Körper $k(i)$ fanden Ford[4]) und Perron[5]), und zwar $\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Für andere imaginär quadratische Körper liegen nur Untersuchungen von Perron vor. Es ergaben sich die genauen Schranken $\gamma = \frac{1}{\sqrt[4]{13}}$ für $k(i\sqrt{3})$[6]) und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$

---

[1]) Perron, „Diophantische Approximationen in imag. quad. Zahlkörpern, insbesondere im Körper $k(i\sqrt{2})$“. Math. Zeitschr. **37** (1933), S. 749—767.

[2]) Minkowski, „Geometrie der Zahlen“, § 39.

[3]) A. a. O. S. 750.

[4]) Ford, „On the closeness of approach of complex rat. fractions to a complex irrat. number“. Transactions **27**.

[5]) Perron, „Über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers $k(i)$“. Math. Ann. **103** u. **105**.

[6]) Über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers der dritten Einheitswurzeln. Sitz.-Ber. d. bayr. Ak. d. Wiss., 1931.

für $k(i\sqrt{2})$[7]. Was die gleichzeitige Approximation von mehreren komplexen Zahlen durch Zahlen eines imaginär quadratischen Körpers betrifft, so liegt nur eine Untersuchung von Minkowski vor[8]. Minkowski beschränkt sich auf den Körper $k(i)$. Er erhielt den Satz: Sind b_h+ic_h $(h=1, 2, \ldots, n-1)$ irgend $n-1$ komplexe Zahlen, die nicht im Körper $k(i)$ liegen, so gibt es unendlich viele komplexe Zahlen y_h+iz_h $(h=1, 2, \ldots, n)$, so daß

$$\left|b_h+ic_h-\frac{y_h+iz_h}{y_n+iz_n}\right|<\frac{n-1}{n}\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\left(\frac{2n-1}{n}\cdot\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{1}{2n-2}}\cdot\frac{1}{|y_n+iz_n|^{\frac{n}{n-1}}}$$

wird. $(h=1, 2, \ldots, n-1)$. Abschätzungen über die simultane Approximation von komplexen Zahlen nach unten, d. h. Angabe von Schranken, wenn nicht mehr unendlich viele Lösungen existieren, sind bisher nicht bekannt und sollen in dieser Arbeit durchgeführt werden. Dies soll durch Verallgemeinerung einer Arbeit von Furtwängler[9] geschehen. Wir nehmen als Grundkörper imaginäre quadratische Körper und betrachten komplexe Relativkörper über diesen Grundkörpern. Wir wollen uns auf die Grundkörper mit der Klassenzahl 1 beschränken. Wir betrachten komplexe Relativkörper n. Relativgrades über diesen Grundkörpern. Es sei d die absolut kleinste Relativdiskriminante für diese Relativkörper. Dann wird sich ergeben:

(I) Ist k eine positive Konstante, für die

$$k<\frac{1}{|d|^{\frac{1}{2(n-1)}}}$$

gilt, so gibt es sicher $n-1$ unabhängige Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$ von solcher Beschaffenheit, daß die $n-1$ Ungleichungen

$$\left|\alpha_i-\frac{x_i}{z}\right|<\frac{k}{|z|^{\frac{n}{n-1}}}$$

nicht unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen $x_1, \ldots, x_{n-1}$, z aus $k(i\sqrt{m})$ haben. ($k(i\sqrt{m})$ hat die Klassenzahl 1).

Für $n=2$ werden wir die absolut kleinsten Relativdiskriminanten (mit komplexen Relativkörpern) $d=3, 2, \sqrt{13}, \sqrt{8}, \sqrt{5}$ für $m=1, 2, 3,$

---

[7]) Siehe Anm. [1]), S. 750.

[8]) Siehe Anm. [2]).

[9]) Über die simultane Approximation von Irrationalzahlen. Ann. **96** und **99**.

7, 11 erhalten. Es ergeben sich somit die bereits bekannten Konstanten $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{13}}$ für $m=1, 2, 3$, die auch die genauen Schranken sind, und die neuen Konstanten $\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$ und $\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$ für $m=7$ und 11.

§ 1.

Wir beschränken uns auf die Grundkörper $k(i\sqrt{m})$ mit der Klassenzahl 1. Ich behaupte: Relativkörper über diesen Körpern besitzen eine Relativminimalbasis, d. h.: Es gibt ganze Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ aus K/k, so daß sich jede ganze Zahl β aus K/k eindeutig in der Form

$$\beta = x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + \ldots + x_n\omega_n$$

darstellen läßt. Die x_i sind ganze Zahlen aus $k(i\sqrt{m})$.

Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ganze Zahlen aus K/k, die K/k erzeugen. Ich bilde die Relativdiskriminante des Zahlsystems $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1'' & \ldots & \alpha_n'' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(n)} & \ldots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix}^2 \qquad (\alpha^{(i)} \text{ relativ konjugiert}).$$

Diese Zahl ist $\neq 0$ und ganz in k. Sie ist also von der Form

$$x + iy\sqrt{m}, \text{ wenn } m \not\equiv 3\,(4);\ x + y\,\frac{1+i\sqrt{m}}{2}, \text{ wenn } m \equiv 3\ (4).$$

(x, y ganz rational). Ich gehe zu den absoluten Beträgen über:

$$\left|x + i\sqrt{m}\,y\right| = +\sqrt{x^2 + my^2} \text{ oder } \left|x + y\,\frac{1+i\sqrt{m}}{2}\right| = +\sqrt{\left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{my^2}{4}}.$$

Die auftretenden quadratischen Formen sind positiv definit. Unter allen n-Tupeln von ganzen Zahlen aus K/k, die eine Relativdiskriminante $\neq 0$ haben, gibt es mindestens eines, für das die Relativdiskriminante absolut am kleinsten ist. Ein solches n-Tupel sei $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Ich behaupte, es bildet eine Relativminimalbasis. Ich führe den Beweis indirekt. Es gebe eine ganze Zahl β aus K/k, für die

$$\beta = b_1\omega_1 + b_2\omega_2 + \ldots + b_n\omega_n$$

gilt und für die nicht alle b_i ganz in k sind. Ich bringe auf gemeinsamen Nenner, nenne ihn m und erhalte

$$\beta = \frac{a_1 \omega_1 + a_2 \omega_2 + \ldots + a_n \omega_n}{m}$$

($a_1, a_2, \ldots, a_n, m$ ganz in k und nicht alle a_i durch m teilbar).

In m gibt es einen Primfaktor p, der nicht in allen a_i aufgeht. Es liegt p in k und es gelte $m = p \,.\, m'$ (p, m' ganz in k). Ich multipliziere β mit m' und erhalte die ganze Zahl

$$\beta\, m' = \beta' = \frac{a_1 \omega_1 + \ldots + a_n \omega_n}{p}.$$

Da nicht alle $a_i \equiv 0\,(p)$ und p Primfaktor, so gibt es mindestens ein a_i, etwa a_1, das zu p relativ prim ist. Es gibt in k ein ganzes $\bar{a}_1$, so daß $a_1 \bar{a}_1 \equiv 1\,(p)$. Ich multipliziere β' mit $\bar{a}_1$ und erhalte die ganze Zahl

$$\beta' \bar{a}_1 = \frac{a_1 \bar{a}_1 \omega_1 + a_2 \bar{a}_1 \omega_2 + \ldots + a_n \bar{a}_1 \omega_n}{p}.$$

Es sei $a_1 \bar{a}_1 = \lambda p + 1$, wo λ ganz in k. Ich schreibe $a_i \bar{a}_1 = c_i$ ($i = 2, \ldots, n$). Dann ist

$$\beta' \bar{a}_1 = \lambda \omega_1 + \frac{\omega_1 + c_2 \omega_2 + \ldots + c_n \omega_n}{p}.$$

Nun ist auch

$$\frac{\omega_1 + c_2 \omega_2 + \ldots + c_n \omega_n}{p}$$

ganz. Ich bilde die Relativdiskriminante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\omega_1 + c_2 \omega_2 + \ldots + c_n \omega_n}{p}, & \omega_2, \ldots, \omega_n \\ \cdot & \cdots\cdots \\ \cdot & \cdots\cdots\ w_n^{(n)} \end{vmatrix}^2.$$

Sie ist gleich $\frac{1}{p^2} D(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$, also absolut genommen kleiner als $|D(\omega_1, \ldots, \omega_n)|$. Damit habe ich einen Widerspruch erhalten. Also existiert eine Relativminimalbasis. Es heißt

$$d = \begin{vmatrix} \omega_1 & \ldots & \omega_n \\ \omega_1'' & \ldots & \omega_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_1^{(n)} & \ldots & \omega_n^{(n)} \end{vmatrix}^2$$

Relativdiskriminante von K/k.

Wir betrachten zunächst der Einfachheit halber komplexe Körper vom Relativgrad 2 über $k(i\sqrt{m})$. Es habe $k(i\sqrt{m})$ die Klassenzahl 1. Es sei ω_1, ω_2 eine Relativminimalbasis von K über k. Es sei K'' relativ konjugiert und ω_1'', ω_2'' dessen Relativminimalbasis. Dann ist $d = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1'' & \omega_2'' \end{vmatrix}^2$. Die adjungierte Determinante ist $\Delta = \begin{vmatrix} \omega_2'' & -\omega_1'' \\ -\omega_2 & \omega_1 \end{vmatrix}^2$. Es soll K ein komplexer Relativkörper sein. Dann ist $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ komplex. Denn wäre $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ reell, so wäre $K(\omega_1, \omega_2) = K(1, \frac{\omega_2}{\omega_1})$ reell gegen die Annahme. Mit $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ ist auch $\frac{\omega_2''}{\omega_1''}$ komplex. Denn es ist $\frac{\omega_2}{\omega_1} = a + bi\,(b \neq 0)$ und $\frac{\omega_2''}{\omega_1''} = a - bi$. Wir betrachten nun die Approximation

$$\left| \frac{x_1}{x_2} - \left(\frac{\omega_2''}{-\omega_1''} \right) \right| \leqq \frac{k}{|x_2|^2}.$$

Wir können dann setzen

$$\frac{x_1}{x_2} = -\frac{\omega_2''}{\omega_1''} + \frac{k\,\varepsilon}{|x_2|^2}, \quad |\varepsilon| \leqq 1.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 &= -\frac{\sqrt{|d|}}{\omega_1''}\, x_2 + \frac{k\,\varepsilon\,\omega_1}{|x_2|} \\ \omega_1'' x_1 + \omega_2'' x_2 &= \qquad\qquad\quad \frac{k\,\varepsilon\,\omega_1''}{|x_2|}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich
$|$Rel. norm $(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)| = k\sqrt{|d|}\,.\,|\varepsilon| + \frac{k'}{|x_2|^2}$. ($k'$ nach oben und unten geschränkt.) Wenn

$$\left| \frac{x_1}{x_2} - \left(\frac{\omega_2''}{-\omega_1''} \right) \right| \leqq \frac{k}{|x_2|^2}$$

unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x_1, x_2 aus $k(i\sqrt{m})$ hat, dann gibt es solche mit beliebig großen $|x_2|$. Die Relativnorm ist ganz in $k(i\sqrt{m})$ und absolut $\geqq 1$. Also ist

$$k \geqq \frac{1}{\sqrt{|d|}} \cdot \frac{1}{|\varepsilon|}, \quad |\varepsilon| \leqq 1.$$

Wenn also $k < \frac{1}{\sqrt{|d|}}$, so gibt es nur **endlich** viele Lösungen.

§ 2.

Wir berechnen die absolut kleinsten Relativdiskriminanten für die komplexen Relativkörper vom Relativgrad 2 über den Grundkörpern $k(i\sqrt{m})$ mit $m=1, 2, 3, 7, 11$. Es sei δ eine ganze quadratfreie Zahl aus $k(i\sqrt{m})$. Durch Adjunktion von $\sqrt{\delta}$ erhalten wir den biquadratischen Körper $K(i\sqrt{m}, \sqrt{\delta})$. Ist $m=1$, so heißt K Dirichletscher Körper[10]). Wir ermitteln die ganzen Zahlen des Körpers $K(i\sqrt{m}, \sqrt{\delta})$. Jede ganze Zahl aus K läßt sich in die Gestalt

$$A = \frac{\alpha+\beta\sqrt{\delta}}{\gamma}$$

bringen, wo α, β, γ ganze Zahlen aus $k(i\sqrt{m})$ sind. Die ganzen Zahlen aus $k(i\sqrt{m})$ sind gegeben durch $x+iy\sqrt{m}$, wenn $m=1, 2$; $x+y\frac{1+i\sqrt{m}}{2}$, wenn $m=3, 7, 11$ (x, y ganz rational). Zu A relativkonjugiert ist $\overline{A}=\frac{\alpha-\beta\sqrt{\delta}}{\gamma}$. Damit A eine ganze Zahl in K ist, ist notwendig und hinreichend, daß $A+\overline{A}$ und $A\overline{A}$ ganze Zahlen in $k(i\sqrt{m})$ sind. Es ist

$$A+\overline{A}=\frac{2\alpha}{\gamma}, \qquad A\overline{A}=\frac{\alpha^2-\beta^2\delta}{\gamma^2}.$$

Diese sollen ganz in $k(i\sqrt{m})$ sein. Wenn $(\gamma, 2)=1$, dann ist $\alpha\equiv 0\,(\gamma)$ und auch $\beta\equiv 0\,(\gamma)$ und wir können durch γ kürzen. Ist λ eine ganze in γ aufgehende Zahl und ist λ/α, dann auch λ/β und wir können durch λ kürzen. Für γ kommen nur Teiler von 2 in Betracht. Die Diskriminanten von $k(i\sqrt{m})$ sind 4, 8, 3, 7, 11 für $m=1, 2, 3, 7, 11$. Nach den Zerlegungsgesetzen in quadratischen Zahlkörpern ist somit

a) $(2)=(2, 1+i)^2$ für $m=1$;

b) $(2)=(2, i\sqrt{2})^2$ für $m=2$;

c), e) (2) Primideal für $m=3$ und 11;

d) $(2)=\left(2, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)\cdot\left(2, \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}\right)$ für $m=7$.

---

[10]) Hilbert, Über den Dirichletschen biquadratischen Zahlkörper. Math. Ann. **45**, oder Ges. Werke, I, S. 24—52.

Für γ kommen in Betracht:

a) $1, 1+i, 2$; *b)* $1, i\sqrt{2}, 2$; *c)* und *e)* $1, 2$;

d) $1, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, 2$.

Für $\gamma=1$ ist $A=\alpha+\beta\sqrt{\delta}$. Wir erhalten die Relativminimalbasis 1, $\sqrt{\delta}$ mit der Relativdiskriminante 4δ. Für $\gamma=2$ ist $A=\frac{\alpha+\beta\sqrt{\delta}}{2}$. Es muß $\alpha^2-\beta^2\delta\equiv 0(4)$, also δ quadratischer Rest in $k(i\sqrt{m})$ mod 4 sein. Wir untersuchen zunächst die Fälle $m\not\equiv 3\ (4)$, also *a)* $m=1$ und *b)* $m=2$. Es ist $\delta=a+bi\sqrt{m}\equiv(x+yi\sqrt{m})^2\ (4)$, also $a\equiv x^2-my^2$, $b\equiv 2xy(4)$. Für $x\equiv y\equiv 0\,(2)$ ist δ nicht quadratfrei, für $x\equiv y\equiv 1\ (2)$ ist $a\equiv 1-m$, $b\equiv 2\ (4)$. (Für $m=1$ ist δ nicht quadratfrei.) Für $x\equiv 0$, $y\equiv 1\ (2)$ ist $a\equiv -m$, $b\equiv 0\ (4)$. (Für $m=2$ ist δ nicht quadratfrei.) Für $x\equiv 1$, $y\equiv 0\ (2)$ ist $a\equiv 1$, $b\equiv 0\ (4)$. Somit ist für

a) $m=1$, $\delta\equiv -1$ oder $1\ (4)$; *b)* $m=2$, $\delta\equiv -1+2i\sqrt{2}$ oder $1\ (4)$.

Wir suchen eine Relativminimalbasis und setzen unbestimmt an

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{\delta}}{2}=u+v\frac{x+y\sqrt{\delta}}{2} \qquad (x, y \text{ ganze Zahlen in } k(i\sqrt{m})).$$

Versuchsweise setzen wir $y=1$. Es ergibt sich $\alpha\equiv\beta x(2)$, $\alpha^2\equiv\beta^2x^2\,(4)$, also $x^2\equiv\delta\ (4)$.

a) $x=i$ bzw. 1, *b)* $x=1+i\sqrt{2}$ bzw. 1.

Wir erhalten die Relativminimalbasen

$$a)\quad 1,\ \frac{i+\sqrt{\delta}}{2};\qquad 1,\ \frac{1+\sqrt{\delta}}{2}.$$

$$b)\quad 1,\ \frac{1+i\sqrt{2}+\sqrt{\delta}}{2};\qquad 1,\ \frac{1+\sqrt{\delta}}{2}$$

und die Relativdiskriminante δ.

Für $\gamma=1+i$ bzw. $i\sqrt{2}$ muß $\alpha^2\equiv\beta^2\delta\ (2)$, also δ quadratischer Rest mod 2 in $k(i\sqrt{m})$ sein. Es ist $a\equiv 1$, $b\equiv 0$; $\delta\equiv 1\ (2)$. Wir erhalten als Relativminimalbasis

$$a)\ 1,\ \frac{1+\sqrt{\delta}}{1+i},\qquad b)\ 1,\ \frac{1+\sqrt{\delta}}{i\sqrt{2}}$$

und als Relativdiskriminante $2\,\delta$. Einfache Rechnungen ergeben die absolut kleinsten Relativdiskriminanten *a)* $d=3$ Beispiel $K(i, i\sqrt{3})$;

b) $d=2$ Beispiel $K(i\sqrt{2}, i)$.

Nun untersuchen wir die Fälle $m \equiv 3\ (4)$, also

c) $m=3$,

d) $m=7$,

e) $m=11$.

Für $\gamma=2$ muß δ quadratischer Rest mod 4 sein. Es ist

$$\delta = a + b\frac{1+i\sqrt{m}}{2} \equiv \left(x + y\frac{1+i\sqrt{m}}{2}\right)^2 \quad (4),$$

$$a \equiv x^2 - \frac{m+1}{4}y^2 \quad (4), \qquad b \equiv 2xy + y^2 \quad (8).$$

Für $x \equiv y \equiv 0\ (2)$ ist δ nicht quadratfrei.

Für $x \equiv y \equiv 1\ (2)$ ist $a \equiv \frac{3-m}{4}$, $b \equiv 3\ (4)$,

für $x \equiv 0$, $y \equiv 1\ (2)$ ist $a \equiv -\frac{m+1}{4}$, $b \equiv 1\ (4)$,

für $x \equiv 1$, $y \equiv 0\ (2)$ ist $a \equiv 1$, $\quad b \equiv 0\ (4)$.

Die Aufstellung einer Relativminimalbasis erfolgt wie vorhin. Es ist $x^2 \equiv \delta\ (4)$ in $k(i\sqrt{m})$ zu lösen. Wir erhalten die Basen

$$1, \frac{\frac{1-i\sqrt{m}}{2}+\sqrt{\delta}}{2}; \qquad 1, \frac{\frac{1+i\sqrt{m}}{2}+\sqrt{\delta}}{2}; \qquad 1, \frac{1+\sqrt{\delta}}{2}$$

mit der Diskriminante δ. Hierfür sind die **absolut kleinsten Relativdiskriminanten**

c) $d=\sqrt{13}$ Beisp. $K\left(i\sqrt{3}, \sqrt{-1+2i\sqrt{3}}\right)$

d) $d=\sqrt{8}$ Beisp. $K\left(i\sqrt{7}, \sqrt{\frac{5-i\sqrt{7}}{2}}\right)$

e) $d=5$ Beisp. $K\left(i\sqrt{11}, \sqrt{\frac{3+i\sqrt{11}}{2}}\right)$.

Für *d)* $m=7$ ist noch

$$\gamma=\frac{1+i\sqrt{7}}{2}=\mathfrak{p}_1 \text{ bzw. } \mathfrak{p}_2=\frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$$

zu untersuchen. Es ist $\mathfrak{p}_1 \neq \mathfrak{p}_2$. Es ist $A=\frac{\alpha+\beta\sqrt{\delta}}{\mathfrak{p}_1}$ und $\alpha^2\equiv\beta^2\delta\,(\mathfrak{p}_1^2)$ also δ quadratischer Rest mod $\mathfrak{p}_1^2$ in $k(i\sqrt{7})$.

$$\delta=a+b\mathfrak{p}_1\equiv(x+y\mathfrak{p}_1)^2\,(\mathfrak{p}_1^2),\quad a+b\mathfrak{p}_1\equiv x^2\,(\mathfrak{p}_1^2).$$

Es kann x nicht gerade sein. Es ergibt sich $\delta\equiv1\,(\mathfrak{p}_1^2)$. Die Aufsuchung einer Basis erfolgt wie vorhin. Es ist $\alpha^2\equiv\beta^2x^2\,(\mathfrak{p}_1^2)$, $x^2\equiv1\,(\mathfrak{p}_1^2)$, $x=1$. Wir erhalten also die Basis

$$1,\ \frac{1+\sqrt{\delta}}{\frac{1+i\sqrt{7}}{2}}$$

mit der absolut genommenen Diskriminante $2\,|\delta|=2\sqrt{a^2+ab+2b^2}$. Wir erhalten keine kleinere Diskriminante. Denn $a^2+ab+2b^2=1$ nur für $a=\pm1$, $b=0$. Von vornherein kommt $a=1$ nicht in Betracht. $\delta=-1$ ist nicht möglich, da $-1\not\equiv1\,(\mathfrak{p}_1^2)$. Für $\mathfrak{p}_2$ gilt dasselbe.

§ 3.

Wir betrachten komplexe Relativkörper K vom Relativgrad n über den imaginär quadratischen Körpern $k(i\sqrt{m})$ mit der Klassenzahl 1. Die Relativdiskriminante bezeichnen wir mit $d\,(\neq 0)$. Es sei $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n$ eine Relativminimalbasis von K. Die zu

$$\begin{vmatrix}\omega_1 & \omega_2 & \ldots & \omega_n\\ \omega_1'' & \omega_2'' & \ldots & \omega_n''\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \omega_1^{(n)} & \omega_2^{(n)} & \ldots & \omega_n^{(n)}\end{vmatrix} \quad \text{adjungierte Determinante sei} \quad \begin{vmatrix}\Omega_1 & \Omega_2 & \ldots & \Omega_n\\ \Omega_1'' & \Omega_2'' & \ldots & \Omega_n''\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \Omega_1^{(n)} & \Omega_2^{(n)} & \ldots & \Omega_n^{(n)}\end{vmatrix}$$

Es ist Ω_i^2 eine Zahl aus K. Wäre $\Omega_i=0$, dann auch $\Omega_i^{(k)}=0\,(k=2,\ldots n)$ und somit auch $d=0$ (Widerspruch). Es ist also $\Omega_i\neq0$. Die Quotienten $\frac{\Omega_i}{\Omega_n}$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$ sind sicher nicht alle reell (Beh.). Angenommen, es sei $\frac{\Omega_i}{\Omega_n}$ $(i=1,\ldots,n-1)$ reell. Wir lassen $i\rightarrow -i$ übergehen. Es gehe $K\rightarrow K''$. Dann ist

$$\frac{\Omega_i}{\Omega_n} = \frac{\Omega''_i}{\Omega''_n} \quad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Ferner ist

$$\begin{vmatrix} \Omega_1 & \ldots & \Omega_n \\ \Omega''_1 & \ldots & \Omega''_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Omega_1^{(n)} & \ldots & \Omega_1^{(n)} \end{vmatrix} = \frac{\Omega''_n}{\Omega_n} \begin{vmatrix} \Omega_1 & \ldots & \Omega_n \\ \Omega_1 & \ldots & \Omega_n \\ \Omega_1^{(3)} & \ldots & \ldots \\ \Omega_1^{(n)} & \ldots & \Omega_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(Widerspr.)}$$

Für $n=2$ sahen wir, daß $\frac{\Omega_1}{\Omega_2}$ komplex ist. Es sei nun $n=3$. Von $\frac{\Omega_1}{\Omega_3}, \frac{\Omega_2}{\Omega_3}$ ist mindestens eine Zahl komplex. Dasselbe gilt von $\frac{\Omega_1}{\Omega_2}, \frac{\Omega_3}{\Omega_2}$ und von $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}, \frac{\Omega_3}{\Omega_1}$. Von diesen drei Paaren ist mindestens eines vorhanden, für das beide Zahlen komplex sind. Wir können also die Bezeichnung so wählen, daß $\frac{\Omega_1}{\Omega_3}$ und $\frac{\Omega_2}{\Omega_3}$ komplex sind. Diese Überlegungen gelten allerdings für größere n nicht. Es sollen nun die Quotienten $\frac{\Omega_i}{\Omega_n}$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ durch Zahlen aus $k(i\sqrt{m})$ simultan approximiert werden. (Die nun folgenden Überlegungen sind wie bei Furtwängler.) Es sei

$$(1) \qquad \left|\frac{x_i}{x_n} - \frac{\Omega_i}{\Omega_n}\right| \leqq \frac{k}{|x_n|^{\frac{n}{n-1}}} \quad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Wir können setzen

$$\frac{x_i}{x_n} = \frac{\Omega_i}{\Omega_n} + \frac{k\varepsilon_i}{|x_n|^{\frac{n}{n-1}}}, \qquad |\varepsilon_i| \leqq 1.$$

Daraus folgt

$$\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n = \frac{\sqrt{|d|}}{\Omega_n} x_n + \frac{k(\varepsilon_1\omega_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1}\omega_{n-1})}{|x_n|^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$\omega''_1 x_1 + \ldots + \omega''_n x_n = \frac{k(\varepsilon_1\omega''_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1}\omega''_{n-1})}{|x_n|^{\frac{1}{n-1}}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\omega_1^{(n)} x_1 + \ldots + \omega_n^{(n)} x_n = \frac{k(\varepsilon_1\omega_1^{(n)} + \ldots + \varepsilon_{n-1}\omega_{n-1}^{(n)}}{|x_n|^{\frac{1}{n-1}}}$$

Somit ergibt sich:

$$|\text{Rel. norm } (\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n)| =$$

$$= k^{n-1} \left| \frac{\sqrt{|d|}}{\Omega_n} \prod_{i=2}^{n} (\varepsilon_1 \omega_1^{(i)} + \ldots + \varepsilon_{n-1} \omega_{n-1}^{(i)}) \right| + \frac{|k'|}{|x_n|^{\frac{n}{n-1}}}.$$

Es ist k' nach oben und unten geschränkt. Unser Ziel ist, eine Schranke für k zu finden, derart, daß (1) nicht unendlich viele Lösungen hat. Hat (1) unendlich viele Lösungen in ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus $k(i\sqrt{m})$, dann auch solche mit beliebig großen $|x_n|$. Es ist die Relativnorm ganz in k, also absolut $\geqq 1$. Somit ergibt sich

$$k^{n-1} \geqq \frac{1}{\sqrt{|d|}} \left| \frac{\Omega_n}{\prod\limits_{i=2}^{n} (\varepsilon_1 \omega_1^{(i)} + \ldots + \varepsilon_{n-1} \omega_{n-1}^{(i)})} \right|.$$

Nun wollen wir durch geeignete Wahl der Basiszahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ erreichen, daß der Quotient

$$Q = \left| \frac{\Omega_n}{\prod\limits_{i=2}^{n} (\varepsilon_1 \omega_1^{(i)} + \ldots + \varepsilon_{n-1} \omega_{n-1}^{(i)})} \right| > 1 - \varepsilon$$

wird. Dann ergibt sich der Satz I. Wir wollen ein Glied im Zähler und Nenner, und zwar in beiden Fällen dasselbe Glied so groß machen, daß es alle übrigen Glieder beliebig stark übertrifft. Dann ist $Q > 1 - \varepsilon$.

Wir verwenden hierzu den folgenden Hilfssatz:

Es sei ein lineares Gleichungssystem gegeben.

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= a_{11} \, x_1 + \ldots + a_{1n} \, x_n + l_1 &&= O(1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_{n-1} &= a_{n-1,1} \, x_1 + \ldots + a_{n-1,n} \, x_n + l_{n-1} &&= O(1) \\
\xi_n &= a_{n1} \, x_1 + \ldots + a_{nn} \, x_n + l_n &&= O(g).
\end{aligned}$$

Die Determinante $\Delta = |a_{ik}|$ sei $\neq 0$. Es sei $l_i = O(1)$, g eine beliebig große positive Zahl. Eine Linearform sei komplex, die übrigen reell oder paarweise konjugiert komplex. Die n-te Linearform sei reell oder wenn komplex, dann fehle ihre konjugiert komplexe Linearform. Es wird behauptet: Das Gleichungssystem besitzt Lösungen in ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus $k(i\sqrt{m})$.

Dieser Satz läßt sich auf den Minkowskischen Satz über reelle und komplexe Linearformen zurückführen. Wir betrachten zuerst die Körper $k(i\sqrt{m})$ mit $m \not\equiv 3\ (4)$.

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\xi_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k,\ \xi_2 = \sum_{k=1}^{n} a_{2k} x_k,\ \ldots\ \xi_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} x_k.$$

Es sei $\Delta = |a_{ik}| \neq 0$, die erste Linearform komplex, die übrigen reell oder paarweise konjugiert komplex. Ich setze

$$a_{1k} = \alpha_{1k} + i\sqrt{m}\,\alpha_{2k},\ x_k = y_k + i\sqrt{m}\,z_k\quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + i\sqrt{m} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1 + i\sqrt{m}\,\Delta_2.$$

Ferner ist

$$|\xi_1| = |\Sigma a_{1k} x_k| = |\Sigma(\alpha_{1k} + i\sqrt{m}\,\alpha_{2k})(y_k + i\sqrt{m}\,z_k)| =$$
$$= |\Sigma(\alpha_{1k} y_k - m\alpha_{2k} z_k) + i\sqrt{m}\,(\alpha_{2k} y_k + \alpha_{1k} z_k)| = |\Sigma(\alpha_{1k} y_k - m\alpha_{2k} z_k) +$$
$$+ i\sqrt{m}\,\Sigma(\alpha_{2k} y_k + \alpha_{1k} z_k)| = \sqrt{[\Sigma(\alpha_{1k} y_k - m\alpha_{2k} z_k)]^2 + m[\Sigma(\alpha_{2k} y_k + \alpha_{1k} z_k)]^2},$$
$$|\xi_2| = |\Sigma a_{2k} x_k| = |\Sigma a_{2k}(y_k + i\sqrt{m}\,z_k)| = |\Sigma a_{2k} y_k + i\sqrt{m}\,\Sigma a_{2k} z_k| =$$
$$= \sqrt{[\Sigma a_{2k} y_k]^2 + m[\Sigma a_{2k} z_k]^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|\xi_n| = \sqrt{[\Sigma a_{nk} y_k]^2 + m[\Sigma a_{nk} z_k]^2}.$$

Wir betrachten nun das Gleichungssystem

$$|\Sigma(\alpha_{1k} y_k - m\alpha_{2k} z_k)| \leqq l_1,\ |\Sigma(\alpha_{2k} y_k + \alpha_{1k} z_k)| \leqq l_1,\ |\Sigma a_{2k} y_k| \leqq l_2,\ |\Sigma a_{2k} z_k| \leqq$$
$$\leqq l_2,\ \ldots,\ |\Sigma a_{nk} y_k| \leqq l_n,\ |\Sigma a_{nk} z_k| \leqq l_n.$$

Die Determinante ist $\Delta_1^2 + m\Delta_2^2$. Die Gleichungen sind reell oder paarweise konjugiert komplex. Wenn $l_1 . l_2 \ldots l_n \geqq |\Delta|$, dann ist das System nach dem Minkowskischen Satz in ganzen rationalen Zahlen y_k, z_k lösbar. Aus den obigen Ungleichungen folgt: das System

$$|\xi_1| \leqq \sqrt{l_1^2 + m l_1^2} = l_1\sqrt{1+m},\ |\xi_2| \leqq l_2\sqrt{1+m}, \ldots,\ |\xi_n| \leqq l_n\sqrt{1+m}$$

ist in ganzen Zahlen $y_k + i\sqrt{m}\, z_k$ (aus $k(i\sqrt{m})$) lösbar, wenn $l_1 l_2 \ldots l_n \geqq |\Delta|$. Nun läßt sich g so groß wählen, daß daraus der Hilfssatz folgt.

Ist $m \equiv 3\ (4)$, dann setzt man

$$a_{1k} = \alpha_{1k} + \frac{1+i\sqrt{m}}{2}\alpha_{2k}, \quad x_k = y_k + \frac{1+i\sqrt{m}}{2} z_k$$

(y, z ganz rational). Die weitere Rechnung ist analog wie für $m \not\equiv 3\ (4)$ und es folgt wieder die Geltung des Hilfssatzes.

Nun sollen die Basiszahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ so normiert werden, daß $Q > 1-\varepsilon$. Es werde zuerst ω_1 normiert. Es ist K'' zu K konjugiert komplex. Wir setzen

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \omega_1 + \omega_2 u_1 + \omega_3 u_2 + \ldots + \omega_n u_{n-1} \\
\omega_2 &= \omega_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\omega_n &= \omega_n
\end{aligned}$$

Die u_i sind ganzzahlige Unbekannte aus $k(i\sqrt{m})$. Die Transformation ist unimodular und ganzzahlig in $k(i\sqrt{m})$. Die u_i sollen die Gleichungen befriedigen

$$\begin{aligned}
\tau_1^{(2)} &= \omega_1^{(2)} + \omega_2^{(2)} u_1 + \omega_3^{(2)} u_2 + \ldots + \omega_n^{(2)} u_{n-1} = O(g) \\
\tau_1^{(3)} &= \omega_1^{(3)} + \omega_2^{(3)} u_1 + \omega_3^{(3)} u_2 + \ldots + \omega_n^{(3)} u_{n-1} = O(1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\tau_1^{(n)} &= \omega_1^{(n)} + \omega_2^{(n)} u_1 \ldots\ldots + \omega_n^{(n)} u_{n-1} = O(1).
\end{aligned}$$

Die Determinante ist $\neq 0$, die erste Linearform komplex, die weiteren reell oder paarweise konjugiert komplex. Nach dem Hilfssatz ist das System lösbar. Nun seien bereits die ersten $(i-1)$ Basiszahlen normiert. Wir bezeichnen sie mit $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{i-1}$. Von den noch nicht normierten Basiszahlen $\omega_i, \ldots, \omega_n$ kann angenommen werden, daß

$$|\omega_j^{(l)}| = O(1) \qquad (j = i, i+1, \ldots, n), \qquad (l = 2, 3, \ldots, n).$$

Wir haben nun 2 Fälle zu unterscheiden. Es sei 1. $K^{(i+1)}$ reell. Wir ersetzen nur ω_i durch eine neue Größe τ_i, und zwar durch

$$\tau_i = \omega_i + \tau_1 u_1 + \ldots + \tau_{i-1} u_{i-1} + \omega_{i+1} u_i + \ldots + \omega_n u_{n-1}.$$

Die u_i sind ganzzahlig in $k(i\sqrt{m})$ so zu bestimmen, daß das Gleichungssystem erfüllt wird:

$$\tau_i^{(2)} = \omega_i^{(2)} + \tau_1^{(2)} u_1 + \dots + \tau_{i-1}^{(2)} u_{i-1} + \omega_{i+1}^{(2)} u_i + \dots + \\ + \omega_n^{(2)} u_{n-1} = O(1)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\tau_i^{(i)} = \omega_i^{(i)} + \tau_1^{(i)} u_1 + \dots + \tau_{i-1}^{(i)} u_{i-1} + \omega_{i+1}^{(i)} u_i + \dots + \\ + \omega_n^{(i)} u_{n-1} = O(1)$$

$$\tau_i^{(i+1)} = \omega_i^{(i+1)} + \tau_1^{(i+1)} u_1 + \dots + \tau_{i-1}^{(i+1)} u_{i-1} + \omega_{i+1}^{(i+1)} u_i + \dots + \\ + \omega_n^{(i+1)} u_{n-1} = O(g)$$

$$\tau_i^{(i+2)} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = O(1)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\tau_i^{(n)} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = O(1).$$

Die Determinante ist $\neq 0$. Die erste Linearform ist komplex, die übrigen reell oder paarweise konjugiert komplex, die Linearform mit $\tau_i^{(i+1)}$ ist reell. Wir können den Hilfssatz anwenden.

2. Es seien $K^{(i+1)}$ und $K^{(i+2)}$ konjugiert komplex. Die Linearformen zu $\tau_i^{(i+1)}$ und $\tau_i^{(i+2)}$ sind konjugiert komplex. Wir setzen

$$\omega_i^{(i+1)} = \rho_1 + i\sigma_1,\quad \omega_i^{(i+2)} = \rho_1 - i\sigma_1,\quad \omega_{i+1}^{(i+1)} = \rho_2 + i\sigma_2,\quad \omega_{i+1}^{(i+2)} = \rho_2 - i\sigma_2.$$

Dann ist die Determinante

$$\omega_i^{(i+1)} \omega_{i+1}^{(i+2)} - \omega_i^{(i+2)} \omega_{i+1}^{(i+1)} = 2i(\sigma_1 \rho_2 - \sigma_2 \rho_1).$$

Im Nenner tritt der Ausdruck auf:

$$\left(\varepsilon_1 \omega_i^{(i+1)} + \varepsilon_2 \omega_{i+1}^{(i+1)}\right)\left(\varepsilon_1 \omega_i^{(i+2)} + \varepsilon_2 \omega_{i+1}^{(i+2)}\right) = \varepsilon_1^2\left(\rho_1^2 + \sigma_1^2\right) + \varepsilon_2^2\left(\rho_2^2 + \sigma_2^2\right) = \\ = \left(\varepsilon_1\rho_1 + \varepsilon_2\rho_2\right)^2 + \left(\varepsilon_1\sigma_1 + \varepsilon_2\sigma_2\right)^2.$$

Es handelt sich nun darum, durch geeignete Verfügung über die ρ, σ zu erreichen, daß

$$\varkappa = \frac{2\,|\rho_1\sigma_2 - \rho_2\sigma_1|}{(\varepsilon_1\rho_1 + \varepsilon_2\rho_2)^2 + (\varepsilon_1\sigma_1 + \varepsilon_2\sigma_2)^2} > 1 - \varepsilon.$$

Es ist $|\varepsilon_1| \leqq 1$, $|\varepsilon_2| \leqq 1$. Wir fordern $\rho_1 - \sigma_2 = O(1)$, $\rho_2 + \sigma_1 = O(1)$. Dann wird

$$\varkappa \geqq \frac{2\,[\rho_1^2 + \sigma_1^2 + \rho_1 O(1) + \sigma_1 O(1)]}{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)(\rho_1^2 + \sigma_1^2) + \rho_1 O(1) + \sigma_1 O(1)}$$

Es genügt also, $\rho_1^2+\sigma_1^2$, d. h. ρ_1 oder σ_1 von der Ordnung g zu machen. Wir ändern nun die Basiszahlen ω_i und ω_{i+1} ab, und zwar durch

$$\tau_i = \omega_i + u_1\tau_1 + \ldots + u_{i-1}\tau_{i-1} + u_i\omega_{i+1} + \ldots \ldots + u_{n-1}\omega_n = \\ = \rho_i + i\sigma_i$$

$$\tau_{i+1} = \omega_{i+1} + v_1\tau_1 + \ldots \quad v_{i-1}\tau_{i-1} + \quad + v_i\omega_{i+2} + \ldots + v_{n-2}\omega_n = \\ = \rho_{i+1} + i\sigma_{i+1}.$$

Wir fordern als Normierungsbedingungen:

$$|\tau_i^{(l)}| = O(1), \; |\tau_{i+1}^{(l)}| = O(1) \; (l=2,3,\ldots, i, i+3, \ldots n)$$

$$|\rho_i^{(i+1)} - \sigma_{i+1}^{(i+1)}| = O(1), \; |\sigma_i^{(i+1)} + \rho_{i+1}^{(i+1)}| = O(1)$$

$$|\rho_i^{(i+1)}| = O(g) \text{ oder } |\sigma_i^{(i+1)}| = O(g).$$

Wir erhalten ein inhomogenes Gleichungssystem von $(2n-3)$ Gleichungen mit $(2n-3)$ Unbekannten. Eine Linearform ist komplex, alle übrigen reell oder paarweise konjugiert komplex, die Linearform mit $O(g)$ ist reell. Das Gleichungssystem ist nach dem Hilfssatz lösbar, sofern die Determinante $\neq 0$, was wir noch zeigen wollen. Die Determinanten der beiden Systeme zerfallen beide in das Produkt einer $(n-1)$- und einer $(n-2)$-zeiligen Determinante. Die erste Determinante ist $\neq 0$, da sonst nicht alle $\Omega_i \neq 0$ wären. Wir behaupten, daß die beiden $(n-2)$-zeiligen Determinanten nicht gleichzeitig verschwinden können.

Wäre dies der Fall, so wäre auch ihre Summe 0. Es wäre also

$$\begin{vmatrix} \tau_1^{(2)} & \ldots & \tau_{i-1}^{(2)} & \omega_{i+2}^{(2)} & \ldots & \omega_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_1^{(i)} & \ldots & \tau_{i-1}^{(i)} & \omega_{i+2}^{(i)} & \ldots & \omega_n^{(i)} \\ \tau_1^{(i+1)} & \ldots & \tau_{i-1}^{(i+1)} & \omega_{i+2}^{(i+1)} & \ldots & \omega_n^{(i+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_1^{(n)} & \ldots & \tau_{i-1}^{(n)} & \omega_{i+2}^{(n)} & \ldots & \omega_n^{(n)} \end{vmatrix} = 0.$$

Wir können die Basiszahlen ganzzahlig unimodular so abändern, daß wir zu ω_k ω_i oder ω_{i+1} addieren und die übrigen ω_j $(j \neq k)$ festlassen. Dadurch ändert sich die Normierung nicht wesentlich. Die noch nicht normierten Basiszahlen bleiben von der Größenordnung 1. Wären alle auftretenden Determinanten 0, so müßte die Matrix

$$\begin{vmatrix} \tau_1^{(2)} & \ldots & \tau_{i-1}^{(2)} & \omega_i^{(2)} & \omega_{i+1}^{(2)} & \ldots & \omega_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_1^{(i)} & \ldots & \tau_{i-1}^{(i)} & \omega_i^{(i)} & \omega_{i+1}^{(i)} & \ldots & \omega_n^{(i)} \\ \tau_1^{(i+2)} & \ldots & \tau_{i-1}^{(i+2)} & \omega_i^{(i+2)} & \omega_{i+1}^{(i+2)} & \ldots & \omega_n^{(i+2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_1^{(n)} & \ldots & \tau_{i-1}^{(n)} & \omega_i^{(n)} & \omega_{i+1}^{(n)} & \ldots & \omega_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

den Rang $n-3$ haben. Das ist nicht möglich, da sie den Rang $n-2$ hat, da alle $\Omega_i \neq 0$ sind. Damit ist erreicht, daß $Q > 1-\varepsilon$ und es ergibt sich der Satz I.

(Eingegangen: 11. VII. 1935.)